ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 519.17

О ГРАФАХ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ЯВЛЯЮТСЯ РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫМИ ГРАФАМИ БЕЗ 3-ЛАП[1]

Минчжу Чень, А. А. Махнев, М. С. Нирова

Граф Крейна без треугольников $\mathrm{Kre}(r)$ является сильно регулярным с параметрами $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. Известно существование таких графов только для $r=1$ (дополнительный граф для графа Клебша) и $r=2$ (граф Хигмена — Симса). А. Л. Гаврилюк и А. А. Махнев доказали, что граф $\mathrm{Kre}(3)$ не существует. Позднее А. А. Махнев доказал, что граф $\mathrm{Kre}(4)$ не существует. Граф $\mathrm{Kre}(r)$ — это единственный сильно регулярный граф без треугольников, в котором антиокрестность вершины $\mathrm{Kre}(r)'$ сильно регулярна. Граф $\mathrm{Kre}(r)'$ имеет параметры $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$. В работе уточняется один результат А. А. Махнева о графах, в которых окрестности вершин являются сильно регулярными графами без 3-коклик. Как следствие доказано, что граф $\mathrm{Kre}(r)$ существует тогда и только тогда, когда граф $\mathrm{Kre}(r)'$ существует и является дополнительным графом к блочному графу квазисимметричной 2-схемы.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, сильно регулярный граф.

M. Chen, A. A. Makhnev, M. S. Nirova. On graphs in which the neighborhoods of vertices are edge-regular graphs without 3-claws.

The triangle-free Krein graph $\mathrm{Kre}(r)$ is strongly regular with parameters $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. The existence of such graphs is known only for $r=1$ (the complement of the Clebsch graph) and $r=2$ (the Higman–Sims graph). A. L. Gavrilyuk and A. A. Makhnev proved that the graph $\mathrm{Kre}(3)$ does not exist. Later Makhnev proved that the graph $\mathrm{Kre}(4)$ does not exist. The graph $\mathrm{Kre}(r)$ is the only strongly regular triangle-free graph in which the antineighborhood of a vertex $\mathrm{Kre}(r)'$ is strongly regular. The graph $\mathrm{Kre}(r)'$ has parameters $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$. This work clarifies Makhnev's result on graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular graphs without 3-cocliques. As a consequence, it is proved that the graph $\mathrm{Kre}(r)$ exists if and only if the graph $\mathrm{Kre}(r)'$ exists and is the complement of the block graph of the quasi-symmetric 2-design.

Keywords: distance-regular graph, strongly regular graph.

MSC: 05E30, 05C50

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-279-282

1. Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Пусть Γ — граф диаметра d, $i\in\{2,3,\ldots,d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u,w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u,w)=i$.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,\ldots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1=1$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$

[1]Исследование выполнено при поддержке Естественнонаучного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

Граф Крейна без треугольников $\mathrm{Kre}(r)$ является сильно регулярным с параметрами $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. Известно существование таких графов только для $r = 1$ (дополнительный граф для графа Клебша) и $r = 2$ (граф Хигмена — Симса). А. Л. Гаврилюк и А. А. Махнев доказали, что граф $Kre(3)$ не существует [2]. Позднее А. А. Махнев показал, что не существует граф $\mathrm{Kre}(4)$ (см. [3]).

Для графа $\mathrm{Kre}(r)$ антиокрестность вершины $\mathrm{Kre}(r)'$ сильно регулярна с параметрами $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$, пересечение антиокрестностей двух смежных вершин $\mathrm{Kre}(r)''$ является сильно регулярным графом с параметрами $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$, и пересечение окрестностей трех попарно не смежных в $\mathrm{Kre}(r)$ вершин является r-кокликой. Граф $\mathrm{Kre}(r)$ — это единственный сильно регулярный граф без треугольников, в котором антиокрестность вершины также сильно регулярна.

В работе сначала уточним один результат одного из авторов — А. А. Махнева — о реберно регулярных графах без 3-лап (см. [4]).

Предложение 1. *Пусть Γ — реберно регулярный граф без 3-лап. Тогда Γ — один из следующих графов:*
(1) *полный многодольный граф $K_{l\times 2}$;*
(2) *реберный граф регулярного графа без треугольников (и μ-подграфы являются кокликами из не более чем двух вершин);*
(3) *треугольный граф $T(m)$, $m \geq 5$;*
(4) *граф Шлефли или граф икосаэдра;*
(5) *сильно регулярный граф без 3-коклик.*

Далее классифицированы графы, в которых окрестности вершин имеют параметры графа, дополнительного к сильно регулярному графу без треугольников.

Теорема 1. *Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин имеют параметры сильно регулярного графа Δ без 3-коклик. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) *Δ и Γ являются кликами;*
(2) *$\Delta = K_{l\times 2}$ и $\Gamma = K_{(l+1)\times 2}$;*
(3) *Δ — дополнительный граф к $\mathrm{Kre}(r)'$ и Γ — дополнительный граф к $\mathrm{Kre}(r)$ для некоторого r;*
(4) *Δ — пятиугольник и Γ — граф икосаэдра;*
(5) *Δ — граф Клебша и Γ — граф Шлефли.*

Ввиду теоремы имеем следующий результат.

Следствие 1. *Граф $\mathrm{Kre}(r)$ существует тогда и только тогда, когда граф $\mathrm{Kre}(r)'$ существует и является дополнительным графом к блочному графу квазисимметричной 2-схемы.*

2. Доказательство теоремы

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1 базируется на следствии из [4]. Пусть Γ — реберно регулярный граф без 3-лап с параметрами (v, k, λ). Если $2+\lambda-k = 0$, то окрестность любой вершины в Γ является объединением двух изолированных $(\lambda+1)$-клик. Поэтому Γ получается из симметричной 2-(V, K, Λ) схемы $(X, \mathcal{B})$ превращением X и $\mathcal{B}$ в клики и смежностью между вершинами из X и $\mathcal{B}$, задаваемой инцидентностью схемы. Отсюда $\lambda = (V-2)+\Lambda = 2(K-1)$. Далее, граф Γ сильно регулярен с $\mu = 2K$ и Γ — полный многодольный граф $K_{l\times 2}$.

Остальное, как в работе [4]. □

Доказательство теоремы 1. Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин имеют параметры графа Δ, дополнительного к сильно регулярному графу без треугольников.

Если $\bar{\Delta}$ — коклика, то Δ и Γ являются кликами.

Если $\bar{\Delta}$ — объединение l изолированных ребер, то $\Delta = K_{l\times 2}$ и $\Gamma = K_{(l+1)\times 2}$.

Если $\bar{\Delta}$ — пятиугольник, то Δ — пятиугольник и Γ — граф икосаэдра.

Если Γ — граф Шлефли, то Δ — граф Клебша и $\bar{\Delta} = \mathrm{Kre}(1)$.

Заметим, что Γ не может быть треугольным графом $T(m)$, $m \geq 5$, так как окрестность вершины в $T(m)$ является $2 \times (m-2)$-решеткой (и не сильно регулярна).

Заметим, что Γ не может быть реберным графом регулярного графа без треугольников, в котором μ-подграфы являются кокликами из не более чем двух вершин, так как окрестность вершины в μ-подграфе из Γ изоморфна объединению этой вершины с μ-подграфом из Δ.

Таким образом, по предложению граф Γ является сильно регулярным графом без 3-коклик, в котором окрестности вершин также являются сильно регулярными графами без 3-коклик. Отсюда Δ — дополнительный граф к $\mathrm{Kre}(r)'$ и Γ — дополнительный граф к $\mathrm{Kre}(r)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф без треугольников с $2 < \mu < v$. Тогда для любой вершины u пара $\mathcal{D} = ([u], \Gamma_2(u))$ является 2-схемой. По теореме 5.5 из [5] следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\mathcal{D}$ является 3-схемой;

(2) $\mathcal{D}$ является квазисимметричной 2-схемой;

(3) $\Gamma_2(u)$ — сильно регулярный граф.

Отсюда следует необходимость следствия. Докажем достаточность. Пусть $\Delta = \mathrm{Kre}(r)'$ является дополнительным графом к блочному графу квазисимметричной 2-схемы $(X, \mathcal{B})$.

Рассмотрим граф $\Gamma = \{u\} \cup X \cup \Delta$, где $X = [u]$ является $(r^3 + 3r^2 + r)$-кокликой и вершина из X смежна с блоком B, если они инцидентны в $(X, \mathcal{B})$. Тогда Γ — граф $\mathrm{Kre}(r)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Крейн графы без треугольников // Докл. АН. 2005. Т. 403, № 6. С. 727–730.
3. **Махнев А.** Граф Kre(4) не существует // Докл. АН. 2017. Vol. 475, №3. P. 251–253. doi: 10.7868/S0869565217210022
4. **Махнев А.А.** Об одном классе графов без 3-лап // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 407–413.
5. **Cameron P., van Lint J.** Graphs, codes and designs. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1980. (London Math. Soc. Lecture Notes Series; vol. 43). doi: 10.1017/CBO9780511662140.

Поступила 22.08.2023

После доработки 12.09.2023

Принята к публикации 18.09.2023

Минчжу Чень

Хайнаньский университет, г. Хэйкоу, Китай

e-mail: 994194@hainanu.edu.cn

Махнев Александр Алексеевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-Балкарский госуниверситет
г. Нальчик
e-mail: nirova_m@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; NY: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On Krein graphs without triangles. *Dokl. Math.*, 2005, vol. 72, no. 1, pp. 591–594.
3. Makhnev A. Krein graph $Kre(4)$ does not exist. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 1, pp. 348–350. doi: 10.1134/S1064562417040123
4. Makhnev A.A. On some class graphs without 3-claws. *Math. Notes*, 1998, vol. 63, no. 3-4, pp. 357–362. doi: 10.1007/BF02317782
5. Cameron P., van Lint J. *Graphs, codes and designs.* London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 43, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. doi: 10.1017/CBO9780511662140

Received August 22, 2023
Revised September 12, 2023
Accepted September 18, 2023

Funding Agency: This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (project no. 12171126) and by a grant from the Engineering Modeling and Statistical Computing Laboratory of the Hainan Province.

Mingzhu Chen, Hainan University, Haikou, China, e-mail: 994194@hainanu.edu.cn .

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member RAS, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Marina Sefovna Nirova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kabardino-Balkarian State University named after H.M.Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: nirova_m@mail.ru .

Cite this article as: M. Chen, A. A. Makhnev, M. S. Nirova. On graphs in which the neighborhoods of vertices are edge-regular graphs without 3-claws. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 279–282.