ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.544

AT-ГРУППЫ

А. В. Рожков, В. Ю. Барсукова

Изучаются периодические не локально конечные (бернсайдовы) группы неограниченного периода. Первый явно заданный пример такой группы предложил С.В.Алешин в 1972 г. Обобщением его конструкции стали AT-группы — группы автоморфизмов деревьев. С помощью AT-групп решен ряд известных проблем. Данная работа является продолжением и развитием предыдущей статьи одного из авторов. Реализована новая стратегия изучения AT-групп. Вновь рассмотрены ставшие уже классическими, но, как оказалось малоизученные примеры Алешина, Сущанского и Гупты. Обобщен и по-новому рассмотрен хорошо изученный пример 2-группы Григорчука. Введены новые классы AT-групп. Предложены задачи “для часа проблем”.

Ключевые слова: бернсайдовы группы, финитно аппроксимируемые группы, условия конечности, AT-группы, деревья, сплетения.

A. V. Rozhkov, V. Yu. Barsukova. AT-groups.

Periodic nonlocally finite (Burnside) groups of infinite period are studied. The first explicitly given example of such a group was proposed by S. V. Aleshin in 1972. His construction was generalized to AT-groups, which are automorphism groups of trees. A number of well-known problems have been solved with the help of AT-groups. This work is a continuation and development of the previous article by one of the authors. A new strategy for studying AT-groups has been implemented. The examples of Alyoshin, Sushanskii, and Gupta, which have already become classical, but, as it turned out, are poorly studied, are reviewed again. A well-studied example of Grigorchuk's 2-group is generalized and reviewed in a new way. New classes of AT-groups are introduced. Tasks for the hour of problems are proposed.

Keywords: Burnside groups, residually finite groups, finiteness conditions, AT-groups, trees, wreath products.

MSC: 20B07, 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-241-258

К 70-летию
Александра Алексеевича Махнева

Введение

В статье речь идет о периодических не локально конечных (бернсайдовых) группах неограниченного периода. Первые такие примеры в 1964 г. построил Е. С. Голод [1] как присоединенные группы фактор-алгебр. Первый пример, доступный прямому изучению, предложил С. В. Алешин [2] в 1972 г. Близкие примеры построили В. И. Сущанский [3] в 1979 г., Р. И. Григорчук [4] в 1980 и Н. Гупта [5] в 1983 г. Обобщением этих примеров стала конструкция AT-групп (групп алешинского типа) ([6], 1986 г.).

Используя AT-группы или группы, с ними тесно связанные, разные авторы решили ряд известных проблем алгебры, касающихся в основном условий конечности. Отметим решение проблемы Милнора [7], где доказан промежуточный рост 2-группы Григорчука.

Все изучали почти исключительно только класс AT_ω-групп, AT-групп над последовательностью циклических групп простого порядка. Структура циклической группы простого порядка позволяет применять методы линейной алгебры, что сильно облегчает изучение AT_ω-групп. Например, в [8, гл. 2.] в терминах векторных пространств над полями Галуа удалось исчерпывающе описать костабилизаторы AT_ω-групп над последовательностью нечетных простых чисел. После решения вопроса 16.79 [9] стало ясно [10], что если мы делаем упор на изучении

p-групп, то среди АТ-групп можно ограничиться изучением AT_Ω-групп над последовательностью циклических групп конечного порядка.

Отметим, что примеры [2; 3] формально не являются АТ-группами, но тесно с ними связаны. Для 2-группы Алешина A_2 и группы Григорчука H_2 это впервые установил Ю. И. Мерзляков [11], а для нечетных p это сделано в работе [6]. Группа Алешина порождается двумя элементами — один порядка p, второй порядка p^2 — $A_p \cong H_p \wr \mathbb{Z}_{p^2}$. Формула верна и для $p = 2$. При $p > 2$ активную группу сплетения можно было взять порядка p. Квадрат — это плата за то, что для любого p группа A_p является двупорожденной.

Группа H_2 порождается тремя инволюциями, две из которых, продольные порождающие, перестановочны [11].

Группа H_p порождается $p+1$ элементом порядка p, p из которых, продольные порождающие, попарно перестановочны [6].

Группа Сущанского G_p схожа с группой Алешина A_p, она тоже двупорожденная и является сплетением $G_p \cong S_p \wr \mathbb{Z}_p$, где S_p — это AT_ω-группа, $\omega = (p, p, \dots)$, $p > 2$, которая порождается тремя элементами порядка p. Один из них корневой, а два продольных перестановочны.

Чтобы оба порождающих имели порядок p, Сущанский ограничился только нечетными простыми числами. Он сразу отмел случай $p = 2$. Как выяснилось через 44 года, напрасно, 2-группа Сущанского существует.

При $p = 2$ активный элемент сплетения Сущанского становится элементом порядка 2^2. Бесконечная 2-группа не может быть порождена двумя инволюциями, но элементами порядка 2 и 4 может.

Отметим, что H_2 — это наиболее просто устроенный пример периодической AT_ω-группы, $\omega = (2, 2, \dots)$, порожденной тремя инволюциями, две из которых перестановочны. И в этом качестве он единственный, в том числе и потому, что все n-срезки группы H_2 совпадают с исходной группой (точнее, изоморфны ей и подобны, как группы перестановок).

Группа H_2 — это не отдельный случайный пример, это уникальная 2-группа, которая неизбежно была бы открыта.

Мы рассмотрим различные обобщения указанных классических примеров и укажем некоторые их новые свойства.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Почти все нужные нам определения и результаты имеются в [10]. Но самые важные определения мы приведем здесь, чтобы не отсылать читателя с первых же строк к другим источникам.

Пусть $A = (A_0, A_1, \dots)$ — последовательность множеств, каждое из которых содержит не менее двух элементов, T — сферически(слойно)-однородное дерево, построенное над последовательностью A.

О п р е д е л е н и е 1. Автоморфизм f дерева T называется *корневым*, если $f(\varnothing)$ — единственная нетождественная перестановка автоморфизма f.

Пусть $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots), \gamma_i \in A_i$, — путь в дереве T. Автоморфизм f дерева T называется *продольным с направляющим путем* γ, если из $f(u) \neq 1$ следует, что $u = (\gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}a_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \in A_n$, причем $a_n \neq \gamma_n$.

Корневые и продольные порождающие — аналог активного и пассивного порождающих сплетения.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть C, D — некоторое множество корневых и продольных автоморфизмов дерева T. Группа $G = gr(C, D)$ называется АТ-*группой над последовательностью* A (деревом T), если группа перестановок $\Pi_0 = gr(c(\varnothing) \mid c \in C)$ транзитивно действует — на множестве A_0, а группа $\Pi_n = gr(f(u) \mid f \in D,\ |u| = n)$ на множестве A_n для всех $n = 1, 2, \dots$.

Все АТ-группы бесконечны и имеют тривиальный центр. Если последовательность состоит из конечных множеств, то АТ-группа ф.а.

В работе [10] приведены следующие определения и утверждения:

— определен стабилизатор вершины $st_G(u)$;

— определен стабилизатор n-го слоя вершин — главный стабилизатор $st_G(n)$;

— определены костабилизатор (или жесткий стабилизатор) вершины $cost_G(u)$ и главный костабилизатор $cost_G(n)$;

— определена группа G_n — n-срезка АТ-группы G на поддереве $T_u, |u| = n$;

— введены классы AT_ω-групп и AT_Ω-групп;

— даны определения сопровождающего вектора $v(d)$ продольного порождающего d и сопровождающего пространства $V(G) = V(D)$;

— определено спрямление продольного порождающего вдоль пути γ в дереве T;

— доказана теорема о том, что исходная АТ-группа периодична тогда и только тогда, когда периодична спрямленная группа;

— введено понятие хэша (следа) продольного порождающего AT_Ω-групп.

Одним из основных инструментом изучения АТ-групп является индукция по слоговой длине $\rho(g)$. Слогами назовем степени корневых и продольных порождающих. Каждый элемент группы $g \in G$ может быть записан в виде произведения этих слогов. Слоговой длиной назовем число вхождений продольных слогов. Продольными слогами мы ограничиваемся потому, что при сужении на поддеревья неединичные образы имеют только они.

В дальнейшем у нас речь пойдет в основном об AT_Ω-группах — АТ-группах над последовательностью конечных циклических групп.

Введем два технически важных класса АТ-групп: один фактически введен С. В. Алешиным, а второй — В. И. Сущанским.

Определение 3. Пусть у всех продольных порождающих AT_ω-группы не более одной нетривиальной сопровождающей перестановки данного уровня, и все они равны $\pi = (0, 1, 2, \ldots, p-1)$. Назовем такие группы *$AT_i$-группами.*

Все продольные порождающие AT_I-групп имеют не более одной нетривиальной сопровождающей перестановки данного уровня, и все они — степени перестановки $\pi = (0, 1, 2, \ldots, p-1)$.

Очевидно, что $_i \leq_I$. Эти классы — аналоги матричных единиц в линейных группах. Фактически это простейшие АТ-группы, из которых можно конструировать другие АТ-группы. В силу минималистичности дизайна они наиболее доступны для прямого изучения.

Важнейшую роль в исследовании АТ-групп играют их главные костабилизаторы — прямое произведение костабилизаторов вершин данного уровня. Они показывают, насколько АТ-группа близка к прямому произведению.

Как правило, в случае AT_ω-групп костабилизатор (жесткий стабилизатор) — это коммутант соответствующей срезки (проекции исходной АТ-группы на поддерево).

Поэтому, факторизуя по костабилизатору, мы оказываемся в коммутативной группе или даже в векторном пространстве над полем Галуа.

Этот переход является одним из важных инструментов изучения АТ-групп.

Полное описание костабилизаторов в терминах сопровождающих пространств над полями Галуа дано в [8, гл. 2] для AT_ω-групп $\omega = (p, q, \ldots)$, где $p, q, \ldots$ — нечетные простые числа.

При этом самый сложный случай возникает, когда сопровождающее пространство одномерно и порождается вектором специального вида.

Определение 4. Пусть p, q — нечетные простые числа, $n \in \mathbb{N}$, ε — корень p-й степени из 1 в поле $GF(q^n)$. Вектор v вида

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_s, \varepsilon^s v_s + (\varepsilon^{s-1} + \varepsilon^{s-2} + \ldots + 1)v_0, \ldots, \varepsilon v_1 + v_0),$$

где $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_s \in GF(q),\ s = (p-1)/2$, назовем $\overline{\varepsilon}$-симметричным вектором. Если при этом $v_0 = 0$, то назовем его ε-симметричным вектором.

Нам это определение требуется для AT-групп, являющихся p-группами. В этом случае $\omega = (p, p, \ldots), p > 2$, поэтому $\varepsilon = 1$.

Значит, 1-симметричный вектор — это $v = (v_1, v_2, \ldots, v_s, v_s, \ldots, v_2, v_1)$, а $\overline{1}$-симметричный вектор — это $v = (v_1, v_2, \ldots, v_s, v_s + s \cdot v_0, \ldots, v_1 + v_0)$.

Следующая теорема фактически доказана в [8].

Теорема 1. *Пусть G — AT_ω-группа, $\omega = (p, p, \ldots)$, $p > 2$, и пусть сопровождающее пространство не является одномерным, порожденным 1-симметричным или $\overline{1}$-симметричным вектором. Тогда костабилизатор вершины содержит коммутант соответствующей срезки.*

2. 2-группа Алешина — Григорчука

Знаменитая 2-группа Григорчука H_2 [4] не является оригинальной конструкцией. H_2 — компонента группы A_2, построенной С. В. Алешиным в [2]. Как выяснил в 1983 г. Ю. И. Мерзляков, $A_2 \cong H_2 \wr \mathbb{Z}_{2^2}$ [11].

С. В. Алешин построил p-группу A_p с двумя порождающими. Конструкция универсальная, корректная для любого простого p.

Поскольку бесконечная 2-группа не может быть порождена двумя инволюциями, ему пришлось три порождающих инволюции свернуть в сплетение, что утяжелило конструкцию, и появился порождаюший порядка p^2. Все это было изложено на языке конечных автоматов, трудном для восприятия неспециалиста.

В силу важности группы H_2 приведем явный вид ее порождающих на самом универсальном языке — языке деревьев. Рисунок 1 нам пригодится в дальнейшем.

Пусть $A = (\{0,1\}, \{0,1\}, \ldots)$, T — дерево над последовательностью A, $\pi = (0, 1)$ — транспозиция. Порождающие группы H_2: c — корневой, f, g, h — продольные с направляющим путем $\gamma = (0, 0, \ldots)$ и последовательностью сопровождающих перестановок, указанных на рис. 1.

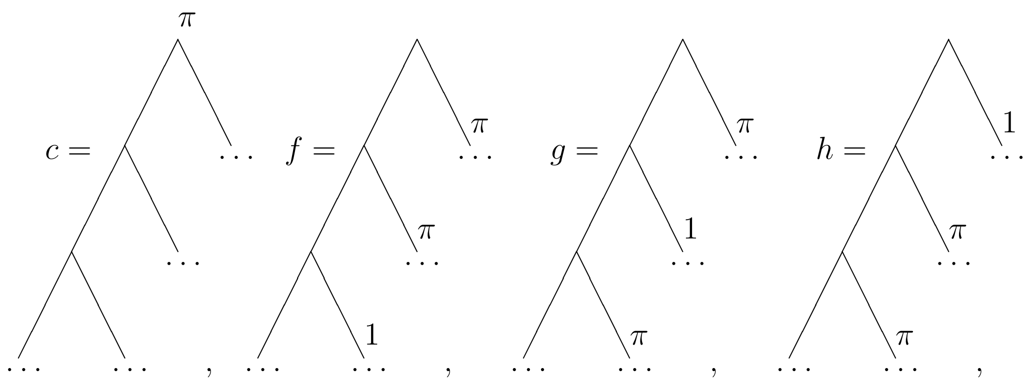

Рис. 1

Последовательности $\pi, \pi, 1, \ldots$; $\pi, 1, \pi, \ldots$; $1, \pi, \pi, \ldots$ циклически повторяются, во всех остальных вершинах стоят тождественные перестановки.

Группа $H_2 = gr(c, f, g, h)$ — 2-группа Григорчука. Она порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны: $fgh = 1, c^2 = f^2 = g^2 = h^2 = 1$. Это AT_ω-группа над последовательностью $\omega = (2, 2, 2, \ldots)$. Достоинством примера Григорчука [4] является представление группы H_2 как перекладывания долей отрезка. Это образный язык, доступный всем. Поэтому пример мгновенно стал очень популярен.

Вспомним замечательного математика, ученика В. Д. Мазурова, Дмитрия Фон-Дер-Флаасса, который в 1984 г. сказал: "Пример Григорчука такой замечательный, что так и хочется в нем что-нибудь посчитать!"

Теорема 2. *Группа H_2 — это бесконечная 2-группа, единственная, у которой сопровождающие перестановки повторяются с периодом* 3. *Период* 2 *невозможен. Период* 4 *содержит* 2-*группу Сущанского.*

Доказательство. а) Группа H_2 по определению спрямленная вдоль пути $\gamma = (0, 0, \dots)$. В силу того, что $p = 2$, сопровождающее пространство на каждом слое одномерно. Поэтому можно использовать "вертикальную" нотацию, а в качестве вектора рассматривать набор последовательных срезок, которые образуют период.

В нашем случае период равен 3, "вертикальные" векторы продольных порождающих имеют вид

$$[f] = (1, 1, 0); \quad [g] = (1, 0, 1); \quad [h] = (0, 1, 1).$$

Эти векторы порождают двумерное подпространство $V(H_2)$.

Векторы $V(H_2)$ не имеют общей нулевой координаты, поэтому АТ-группа H_2 была бесконечна.

Как следует из теоремы о периодичности [10], чтобы АТ-группа H_2 была периодической, в нашем случае — 2-группой, у каждого вектора пространства $V(H_2)$ хотя бы одна координата должна быть равна 0. Это условие тоже выполнено.

б) Возможен ли "вертикальный" период 2? Очевидно, нет. Двумерное пространство содержит 4 вектора, в том числе и вектор $(1, 1)$. Это равносильно тому, чтобы у продольного порождающего f группы H_2 все сопровождающие перестановки сделать равными π. Но тогда элемент cf будет бесконечного порядка, и группа перестанет быть периодической.

в) Если "вертикальный" период 4 или более, то и бесконечность, и периодичность достижимы многими способами. Один из таких примеров — 2-группа Сущанского при вертикальном периоде 4 рассмотренна ниже. У 2-группы Сущанского все 4 уровня срезок разные. Поэтому нужно вести индукцию по 4 копиям группы Сущанского, которые возникают на разных слоях дерева. Это очень затрудняет вычисления — не в 4 раза, а в $4^4 = 256$ раз. На каждом из 4 уровней возникает по 4 варианта.

г) Группа H_2 интересна еще и тем, что все ее срезки тождественны ей самой. Хотя теоретически есть $3! = 6$ вариантов, но все они совпадают. Причина в том, что все вектора $[f], [g], [h]$ — это циклические сдвиги друг друга, поэтому при переходе к срезкам они только меняются местами. Новые векторы не возникают.

д) Почему H_2 — единственная группа с периодом 3? Потому что в трехмерном пространстве над $GF(2)$ нет другого двумерного пространства кроме $V(H_2) = \{0, [f], [g], [h]\}$, у которого каждый вектор имеет хотя бы одну координату 0 и которое не содержит вектор $(1, 1, 1)$.

Теорема доказана.

У группы H_2 вычислен нижний центральный ряд (верхнего центрального ряда у нее нет). В ней найдена максимальная локально конечная подгруппа и явно указаны порождающие элементы. Эти результаты принадлежат одному из авторов данной статьи, и это решение известных проблем. Поэтому важно установить такие свойства и у других АТ-групп. Важный инструмент исследований АТ-групп — изучение и использование костабилизаторов вершин и слоев дерева T.

Фундаментальная лемма [8], описывающая костабилизаторы (жесткие стабилизаторы) группы H_2, служит базой для описания нижнего центрального ряда и для построения максимальной локально конечной подгруппы.

Условимся об обозначениях.

При переходе к поддеревьям возникает много изоморфных и подобных групп и подгрупп, что, сильно усложняет изложение и затрудняет восприятие материала. Вместо многочисленных изоморфизмов поддеревьев мы воспользуемся эмуляцией оператора присваивания из программирования, когда содержимое ячейки меняется, а обозначение содержимого остается прежним. Он интуитивно понятен и нагляден.

Например, продольный порождающий f группы H_2 можно кратко записать как $f := (g, c)$. Левая координата — это автоморфизм, индуцированный на поддереве $T_{(0)}$, а правая — на поддереве $T_{(1)}$. Этот хорошо поддается программной реализации

$$f := (g, c); \quad g := (h, c); \quad h := (f, 1).$$

Мы постулируем, что все 4 элемента c, f, g, h — инволюции, последние 3 элемента попарно перестановочны. Тогда

$$fgh := (g, c)(h, c)(f, 1) = (ghf, cc1 = (fgh, 1)).$$

Таким образом, у элемента fgh все сопровождающие перестановки равны 1, значит, и он равен 1.

На самом деле группа Григорчука [4] — совсем не наша H_2. Конечно, она изоморфна H_2. Только у ее продольных порождающих направляющий путь $(1, 1, 1, \ldots)$, а не $(0, 0, \ldots)$. Группы совпадут, если в дереве T символ 0 поменять местами с 1. Причина разночтения проста — в силу европейской традиции писать слева направо мы сначала разделяем пополам левую половинку отрезка, потом правую, затем правую правой и т. д. И направляющий путь у нас получается $(1, 1, 1, \ldots)$. А если мы строим общую теорию и в качестве направляющего пути берем нейтральные элементы, в нашем случае 0, то у нас направляющий путь становится равным $(0, 0, 0, \ldots)$.

Но что получится, если обе группы H_2 с разными направляющими путями совместить на одном дереве?

Рассмотрим двоичное дерево T и его автоморфизм, который во всех вершинах меняет местами 0 и 1. Этот автоморфизм легко задать явно. Во всех вершинах должна находиться перестановка $\pi = (0, 1)$, а сам автоморфизм из $\mathrm{Aut}(T)$ так и назовем: $\Pi = \{\Pi(u) = \pi \mid u \in T\}$. Очевидно, что автоморфизм Π — инволюция, перестановочен с корневым порождающим c и может быть записан $\Pi := (\Pi, \Pi)c$.

П р и м е р 1. Группу $H_{2,2} = gr(c, f, g; \Pi f \Pi, \Pi g \Pi) = gr(H_2, \Pi H_2 \Pi)$ назовем сдвоенной группой Григорчука.

П р и м е р 2. Группу $H_{1+1} = gr(c, f; \Pi g \Pi)$ назовем расщепленной группой Григорчука.

Это совершенно новые группы, изучение которых затруднено тем, что их спрямление совпадает с группой H_2. В силу этого фактор-группы $G/st(n)$, где $G \in \{H_{2,2}, H_{1+1}\}$, будут совпадать с фактор-группой $H_2/st(n)$, $n \in \mathbb{N}$, и один из важных инструментов исследования АТ-групп будет бесполезен. Поэтому придется использовать тонкие методы, развитые только в работах Е. Л. Первовой, например, в [12].

В АТ-группах естественные подгруппы, отсекающие ветви длиннее n, т. е. подгруппы $st(n)$, не всегда, а скорее редко являются базой проконечной топологии [12].

И теперь, наконец, сформулируем базовую лемму для $H = H_2$. Верхняя черта означает нормальное замыкание в соответствующей группе, в нашем случае в группе H_2. Возможно, ее аналог будет полезен и для других 2-групп при нахождении нижнего центрального ряда.

Лемма (см. [8]). *Пусть* $a = (cf)^2$, $K = \overline{a}^H$, $L = \overline{f}^H$ *— нормальные подгруппы. Тогда имеют место следующие соотношения*:

$$\text{(a)} \quad K = gr(a, (1, a), (a, 1)), \quad L = gr(f,\ K);$$

$$\text{(b)} \quad H/L \cong D_4 \cong gr(c,\ h), \quad H/K \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2, \quad L/K \cong gr(f) \cong \mathbb{Z}_2;$$

$$\text{(c)} \quad cost(v)_{(v)} = L, \quad |v| = 1;$$

$$\text{(d)} \quad cost(v)_{(v)} = cost_K(v)_{(v)} = K, \quad |v| = n > 1;$$

$$\text{(e)} \quad (cg)^4 \in K, \ K/cost_K(1) \cong D_4,$$

и всякий элемент этой фактор-группы имеет вид

$$(\psi(c,g),\ \psi(g,c))cost_K(1),$$

где ψ — некоторое слово от двух переменных.

3. Обобщение 2-группы Григорчука

Прежде всего, изменим направляющие пути продольных порождающих группы H_2.

Если направляющий путь $(0,0,\dots)$ заменить на произвольный путь γ, то получится AT_ω-группа $H_2(\gamma) = gr(c, f(\gamma), g(\gamma))$. Такие группы составляют континуум, все они изоморфны, подобны как группы перестановок и попарно сопряжены в группе $\mathrm{Aut}(T)$ автоморфизмов дерева T.

П р и м е р 3. Построим универсальную группу $\overline{H} = gr(c, f(\gamma), g(\gamma), h(\gamma) \ \mid\ \gamma \in T)$. Эта группа будет 2-группой, потому что ее спрямленная группа совпадет с группой H_2. Она будет содержать все сопряженные в $\mathrm{Aut}(T)$ копии группы H_2. Однако изучать ее затруднительно, поскольку все ее конечные образы совпадают с фактор-группами группы $H_2/st(n), n \in \mathbb{N}$.

Так как для периодичности неважно, каков направляющий путь, то далее мы будем рассматривать только путь $(0,0,\dots)$.

В силу того что мы находимся в дереве, построенном над последовательностью $\omega = (2,2,\dots)$, все продольные порождающие будут попарно перестановочными инволюциями.

Перейдем к аддитивной форме записи, обозначим перестановку $\pi = (0,1)$ как 1, а тождественную — через 0. Тогда последовательность перестановок $(\pi,\pi,1,\dots)$, задающую порождающий f группы H_2, можно интерпретировать как бесконечный вектор $(1,1,0,1,1,0,\dots)$ над полем $GF(2)$.

Если перестановки (назовем их *кодирующими*) циклически повторяются с периодом k, в случае 2-группы Григорчука с периодом $k=3$, то порожденное ими пространство будет *кодирующим подпространством* U, а его элементы — *кодирующими векторами* в k-мерном пространстве V_k.

В случае группы H_2 имеем $U(H_2) = \langle(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\rangle$ — двумерное подпространство объемлющего трехмерного пространства $V_3 = GF(2)^3$.

Уточним переход к аддитивной форме записи. Порождающий f группы H_2 задается сопровождающими перестановками, образующими цикл $(\pi,\pi,1,\dots)$ длины 3. Соответствующий кодирующий вектор имеет вид $u = (1,1,0)$.

Пусть d — символ, обозначающий продольный порождающий. Положим

$$d(u) = d((1,1,0)) = f \in H_2.$$

Теперь мы имеем две формы задания группы H_2: стандартное $H_2 = gr(c,f,g,h)$ и через кодирующее пространство $gr(c, U(H_2))$.

Если же периода k нет, то объемлющее пространство V бесконечномерно — это декартова степень $V = \prod_i^\infty GF(2)$.

Группу, порожденную корневым автоморфизмом и продольными порождающими, заданными подпространством U, обозначим $gr(c,U) = gr(c, d(u) \ \mid\ u \in U)$.

Отметим, что это очень неэкономная форма выбора порождающих. Если через U обозначить не все подпространство, а только его базис, то предыдущая запись останется правильной. Сделано это по техническим соображениям, чтобы не рассматривать произведения продольных порождающих.

Теорема 3. *Группа $gr(c,U)$, $U \le V_k, k > 2$, будет бернсайдовой 2-группой тогда и только тогда, когда*

a) для каждой координаты i найдется $u \in U$ такой, что $u_i = 1$;

б) $(1, 1, \dots 1) \notin$ U;

в) хотя бы одна из координат каждого вектора $u \in U$ равна 0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае AT_ω-групп, а это наш случай, для транзитивности действия на всех слоях дерева T достаточно наличия на данном слое хотя бы одной нетождественной перестановки. В нашем случае 1, что и обеспечивает п. а).

Пусть вектор $e = (1, 1, \dots, 1)$ будет задавать продольный порождающий $d = d(e)$, который на языке оператора присваивания будет иметь вид $d := (d, c)$. В этом случае бесконечный порядок будет иметь произведение dc. Значит, группа не будет периодической. Именно эту ситуацию исключает условие б).

Условие в) означает периодичность всех произведений $\{d(u)c \mid u \in U\}$, что эквивалентно периодичности группы в силу теорем о периодичности из [8; 10].

Требование $k > 2$ констатирует тот факт, что для меньших размерностей выполнение условий теоремы невозможно.

Отметим, что условие б) формально лишнее, оно следует из условия в). Но очень просто его проверить, сразу заметить непериодичность и не тратить силы на проверку тяжелого условия в).

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. При $k \geq 3$ найдется l-мерное, $1 < l < k$, подпространство $U \leq V_k$ такое, что $H_k(U) = gr(c, U)$ будет бернсайдовой 2-группой, аналогом группы Григорчука, порожденным $l + 1$ инволюцией, l из которых попарно перестановочны. При $k = 3$ группа $H_3(U)$ будет порождаться тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Полный аналог группы Григорчука.

Это чисто техническое следствие, констатирующее тот факт, что построение аналогов 2-группы H_2 в силу предыдущей теоремы свелось к перечислению подпространств со свойствами а) и в).

Теорема 4. *Группа $gr(c, U)$, $U < V$ будет бернсайдовой 2-группой тогда и только тогда, когда*

а) $(1, 1, \dots) = \prod_i^\infty 1 \notin$ U;

б) для каждой координаты i найдется $u \in U$ такой, что $u_i = 1$;

в) каждый вектор $u \in U$ имеет бесконечно много нулевых координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это аналог предыдущей теоремы для случая бесконечномерного пространства, фактически описание всех 2-групп, являющихся АТ-группами над 2-деревом T, построенном над последовательностью $\omega = (2, 2, \dots)$.

Это не новая теорема, просто она изложена на языке векторных пространств. Впервые это обобщение было предложено Григорчуком, правда для двумерных подпространств U, для АТ-групп с двумя порождающими. У нас число порождающих не ограничено. Если вернуться к примеру 3, добавить все эти группы и искривить все их пути, получится абсолютно универсальная 2-группа Григорчука без ограничения на направляющие пути и число порождающих.

Доказательство данной теоремы совпадает с доказательством предыдущей. И так же, как и раньше условие а) формально лишнее, но методически полезное.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2. При $k \geq 2$ найдется k-мерное подпространство $U \leq V$ такое, что $H(k, U) = gr(c, U)$ будет бернсайдовой 2-группой, порожденной $k+1$ инволюцией, k из которых попарно перестановочны.

Это снова технический переход от абстрактных подпространств к конкретным АТ-группам, аналогам группы H_2 с конечным числом порождающих. Новое заключается в том, что последовательность сопровождающих перестановок не имеет циклов конечной длины.

Случай двупорожденной группы равносилен обобщению Григорчука для своих групп, им это сделано в других терминах.

Теперь от дерева над последовательностью $(2, 2, \ldots)$ перейдем к AT_Ω-группам.

П р и м е р 4. Пусть $T(n)$ — дерево над последовательностью циклических групп $\Omega = (\mathbb{Z}_{2^n}, \mathbb{Z}_{2^n}, \ldots)$, $n > 1$, $c = c(n)$ — корневой порождающий.

1. Положим

$$f = f(n) := \underbrace{(g, c, 1, 1, \ldots, 1)}_{2^n}; \quad g = g(n) := \underbrace{(h, c, 1, 1, \ldots, 1)}_{2^n}; \quad h = h(n) := \underbrace{(f, 1, 1, 1, \ldots, 1)}_{2^n}.$$

Группа $H(n) = gr(c, f(n), g(n), h(n))$ является 2-группой, порожденной четырьмя элементами порядка 2^n, три из которых перестановочны.

При $n = 1$ получается 2-группа Григорчука.

Кроме того 2-группами, обобщающими 2-группу Григорчука, являются

$$gr(c, f(n), g(n)); \quad gr(c, f(n), h(n)); \quad gr(c, g(n), h(n)).$$

2. Пусть $f := (f, c, 1, c, 1, \ldots, 1, c), g := (g, c, 1, 1, \ldots, 1, c^{-1})$, тогда $gr(c, f)$ — обобщение в духе Григорчука, $gr(c, g)$ — обобщение в духе Гупты — Сидки.

Возможны и другие многочисленные обобщения. Мы остановимся на этих, поскольку об AT_Ω-группах мы практически ничего не знаем.

4. p-группы Алешина

Группы С. В. Алешина [2] при $p > 2$ практически не изучались. Все исследователи занимались 2-группой Григорчука и конструкцией АТ-групп, позволяющей строить примеры, приближающимися по набору свойств к группам А. Ю. Ольшанского (см. [13]).

Пропагандируя новое научное направление, Ю. И. Мерзляков писал: "...сейчас эти примеры производят приблизительно такое же впечатление, как первые образцы лунного грунта. Каждый из них, несомненно, заслуживает самого пристального внимания..." [14].

Обратим пристальное внимание (впервые за 50 лет) на группу Алешина A_p при $p > 2$.

Группа A_p порождается двумя элементами — один порядка p, второй порядка p^2. Как показано в [6], группу Алешина можно представить в виде сплетения АТ-группы H_p и циклической группы $A_p \cong H_p \wr \mathbb{Z}_{p^2}$.

Группа H_p является AT_ω-группой над последовательностью $\omega = (p, p, \ldots)$, порождается $p+1$ элементом, все они имеют порядок p, продольные порождающие попарно перестановочны и все имеют направляющий путь $(0, 0, \ldots)$.

На каждом уровне у продольных порождающих не более одной нетождественной перестановки, причем это всегда перестановка $\pi = (0, 1, 2, \ldots, p-1)$, и расположены они в вершинах вида $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, т. е. H_p — это AT_i-группа.

Чтобы изобразить такое расположение перестановок на дереве, достаточно на рисунке, задающем продольные порождающие группы H_2, дорисовать из каждой вершины $p-2$ ребра, помеченных символами $2, 3, \ldots, p-1$, и во всех вновь возникших вершинах разместить 1-тождественные перестановки. Даже из него видно, что случай $p = 2$ ничем не отличается от остальных простых чисел p.

Из свойств АТ-групп [8; 10] следует, что для периодичности требуется, чтобы у любого произведения продольных порождающих (вот откуда пространство векторов U, а не только его базис) на бесконечном числе слоев дерева T произведение сопровождающих перестановок данного слоя равнялось 1 (в аддитивной записи 0). Это как бы "горизонтальное условие периодичности". Поэтому для периодичности [8; 10] группы H_p нужно, чтобы у всех произведений продольных порождающих было бесконечно много слоев, где все сопровождающие перестановки тождественны. Для проверки периодичности по дереву нужно двигаться вниз, переходя со слоя на слой — это "вертикальное условие периодичности".

Итак, для периодичности нужно, чтобы произведение продольных порождающих $D = d_1^{a_1} d_2^{a_2} \dots d_k^{a_k}$ имело бесконечно много координат, равных нулю (в аддитивной нотации) или 1 в мультипликативной.

Вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ назовем кодирующим вектором произведения D.

Проблема выбора продольных порождающих, которые задавали бы периодическую группу, — весьма нетривиальная задача. Ее решение — главное достоинство примеров Алешина.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ — некоторое множество подалфавитов алфавита $\{1, 2, \dots, p\}$ с тем свойством, что для любого вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in GF(p)^p$ найдется такой подалфавит $\sigma \in \Sigma$, что $\sum_{i \in \sigma} a_i = 0$, или что скалярное произведение $(a, \sigma) = 0$. Здесь мы подалфавит $\sigma = \{i, j, \dots, k\}$ интерпретируем как вектор, у которого координаты с номерами $\{i, j, \dots, k\}$ равны 1, а остальные 0. Назовем его *условием Алешина.*

Алешин предложил следующую п р о ц е д у р у создания множества порождающих d_1, $d_2, \dots, d_p$, отталкиваясь от множества Σ.

Упорядочим множество Σ каким-нибудь образом, например, естественным: $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$.

Положим, что сопровождающие перестановки первого слоя нетривиальны только у тех порождающих d_i, у которых $i \in \sigma_1$. Сопровождающие перестановки второго слоя нетривиальны только у d_i таких, что $i \in \sigma_2$, и т. д. до n-го слоя. После этого слои начинают циклически повторяться.

При фиксированном множестве Σ, если оно содержит n элементов, разных упорядочений, а значит, разных p-групп Алешина будет $n!$ К тому же и самих множеств Σ при $p > 2$ будет несколько. В силу этого при $p > 2$ p-группа Алешина — это не отдельная группа, а целое семейство групп, при больших p весьма обширное. Именно поэтому было много дискуссий, что же такое p-группа Алешина при $p > 2$.

Теорема 5. *Для периодичности AT_i-группы над последовательностью $\omega = (p, p, \dots)$ необходимо, чтобы количество продольных порождающих было не меньше p. Если это выполнено, то периодичность обеспечивает условие Алешина* (см. [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у нашей группы с продольными порождающими вида, как у группы H_p ровно k продольных порождающих $d_1, d_2, \dots, d_k$ и $k < p$. В этом случае произведение $d_1 d_2 \dots d_k$ с кодирующим вектором $a = (1, 1, \dots, 1)$ не будет иметь ни одного слоя с тождественными перестановками. Причина в том, что сумма любого подмножества координат вектора a меньше числа p и поэтому не равна 0.

Если же на каком-то слое тождественны сопровождающие перестановки всех порождающих d_i, то группа не будет AT-группой, потому что именно на этом слое она не будет действовать транзитивно, что и заканчивает доказательство теоремы.

Теорема 6. *Минимальное алешинское множество Σ содержит*

$$n = 1 + 2 + \dots + p = p(p+1)/2$$

подалфавитов: p одноэлементных, $p - 1$ двухэлементных и т. д. и один полный алфавит $\{1, 2, \dots, p\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим частные случаи.

При $p = 2$ множество Σ единственное: $\{\{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\}$. При $p = 3$ минимальных множеств Σ три. Еще есть полный набор непустых подалфавитов из 7 элементов.

Порождающие $h_1, h_2, \dots, h_p$ зависят от упорядочения элементов множества $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, поэтому при $p = 3$ мы имеем разные упорядочения трех 6-элементных множеств и одного 7-элементного, итого $3 \cdot 6! + 7! = 7200$ различных наборов продольных порождающих 3-группы H_3. Значит, формально разных 3-групп Алешина 7200. А для произвольного p

их больше (2^p)! Это также объясняет, почему никто не брался изучать группы A_p при $p > 2$. Допустимых групп — факториал от экспоненты.

О д о к а з а т е л ь с т в е теоремы 6. Судя по формулировке, теорема является известным теоретико-числовым фактом. Найденное авторами доказательство очень громоздко, и нет смысла его приводить, тем более что теорема носит чисто технический характер.

Следующая теорема в силу сказанного выше очевидна. Это естественное обобщение p-групп Алешина, случай $p = 2$ не исключается.

Теорема 7. *Пусть $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ — некоторое алешинское множество. Из его элементов построим бесконечную последовательность таким образом, чтобы каждое σ_i в этой последовательности встречалось бесконечное число раз.*

Пусть m — произвольное натуральное число и $\sigma = \{i, j, \ldots, k\}$ — элемент бесконечной последовательности с номером m. Потребуем, чтобы неединичную m-ю сопровождающую перестановку имели только порождающие $h_i, h_j, \ldots, h_k$.

Тогда группа $H_p = gr(c, h_1, h_2, \ldots, h_p)$, где c — корневой порождающий, будет бесконечной p-группой.

Назовем p-группу Алешина *минимальной*, если она построена по минимальному множеству Σ. Минимальных групп, отвечающих данному минимальному Σ, ровно $(1 + 2 + \ldots + p)!$ штук. Реально доступны изучению только минимальные группы Алешина.

В действительности изучение даже 3-группы Алешина очень затруднительно. Нужно параллельно изучать 6 различных срезок и примерно $2^6 = 64$ вариантов перехода между срезками. Поэтому изучают или абсолютно ручную группу Григорчука, или строят примеры, решающие важные проблемы. В этом смысле конструкция АТ-групп свою актуальность не потеряла.

5. 2-группа Сущанского

Формально 2-группа Сущанского не существует. В работе [3] сразу отмечено, что $p > 2$. Однако мы утверждаем, что конструкция Сущанского корректна и при $p = 2$.

Группа Сущанского G_p [3] похожа на группу Алешина A_p [2]. Как и группа Алешина, она не АТ-группа.

Группа Сущанского порождается двумя элементами порядка p. Как абстрактная группа она сплетение АТ-группы S_p и циклической группы порядка p: $G_p \cong S_p \wr \mathbb{Z}_p$, где S_p — AT_ω-группа, $\omega = (p, p, \ldots)$, $p > 2$.

В такой формулировке это верно только для $p > 2$, поскольку бесконечная 2-группа не может порождаться двумя инволюциями. Группа S_p порождается 3 элементами порядка p. Один из них корневой, а два продольных перестановочны. Вид продольных порождающих задает еще один класс АТ-групп.

Группа S_p — это AT_I-группа, т. е. сопровождающие перестановки (а их данного уровня всего одна) могут быть любой степенью перестановки $\pi = (0, 1, 2, \ldots, p - 1)$.

Очевидно, $AT_i \leq AT_I$, но если $\omega = (2, 2, \ldots)$, то эти классы совпадают. Отличия этих классов кажутся небольшими, но имеют существенные последствия.

Теорема 8. *Для периодичности AT_I-p-группы необходимо, чтобы количество продольных порождающих было не меньше* 2. *Если это выполнено, то периодичность обеспечивает условие, аналогичное условию Сущанского* [3]. *Но оно может быть улучшено, и период повторения сопровождающих перестановок снижен с p^2, как у Сущанского, до $p + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это упражнение на тему сопровождающих (кодирующих) векторных пространств.

Если речь идет о циклически повторяющихся сопровождающих перестановках, нам нужно, чтобы а) для любой координаты нашелся вектор, у которого эта координата не равна 0,

б) у всех векторов была хотя бы одна нулевая координата.

Если периодичности нет, нулевых координат должно быть бесконечно много.

Для доказательства теоремы нужно предложить два вектора в $(p+1)$-мерном пространстве над $GF(p)$, любая линейная комбинация которых удовлетворяет условиям а) и б).

Вот эти векторы, они не единственные:

$$u = (0, 1, 1, \dots, 1); \quad v = (1, 2, \dots, p-1, 0, 1).$$

Условие а), очевидно, выполнено.

Поскольку мы работаем над полем, то можем рассматривать только линейные комбинации $\alpha u + v$. Прямой перебор показывает, что для любого α вектор $\alpha u + v$ имеет нулевую координату.

Можно показать, что уменьшить размерность пространства до p невозможно, потому что размерность пространства совпадает с числом элементов поля $GF(p)$.

Теорема доказана.

Почему же 2-группа Сущанского все же существует?

Дело в том, что $G_p = gr(A, B)$ и порождающий B корректно задан, и при $p = 2$, и для любого p имеет порядок p.

Поскольку порождающий A при $p > 2$ имеет порядок p, то естественно предположить, что и при $p = 2$ его порядок равен 2. Значит, группа G_2 порождается двумя инволюциями и поэтому конечна.

Однако это не так.

Элемент A на языке автоморфизмов деревьев имеет вид

$$A = (1, c, c^2, \dots, c^{p-1}) \cdot c,$$

где c — корневой порождающий с сопровождающей перестановкой $\pi = (0, 1, 2, \dots, p-1)$. При $p > 2$, поскольку $1 + 2 + \ldots + (p-1) = 0 (\text{mod } p)$, элемент действительно имеет порядок p.

Однако при $p = 2$ он имеет вид $A = (1, c) \cdot c$, и поэтому $A^2 = (c, c) \neq 1$, значит, $A^4 = 1$.

Таким образом, при $p = 2$ группа Сущанского имеет вид $S_2 \wr \mathbb{Z}_4$, на 4 координатах циклической группы размещаются 3 порождающих бесконечной 2-группы S_2, и, значит, группа G_2 бесконечна.

Отметим, что 2-группа S_2 не совпадает с 2-группой Григорчука. У первой цикл повторения перестановок по слоям равен 3, а у Сущанского 4.

Формально разных 2-групп Сущанского 24, и неизвестно сколько из них попарно изоморфны.

П р и м е р 5. Два продольных порождающих 2-группы Григорчука и их сумму можно символически представить как три вектора

$$(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).$$

Тогда 2 продольных порождающих и их сумма одной из 24 2-групп Сущанского будет выглядеть так:

$$(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0).$$

Тем не менее это не новая 2-АТ-группа, она является одной из групп, обобщающих 2-группу Григорчука. Но вклад Сущанского в науку важен — он создал новый класс групп, и предложил для него новую идею доказательства периодичности, отличную от идеи Алешина.

6. АТ-группы как абстрактный класс групп

На повестке дня стоит вопрос об абстрактном описании если не всего класса АТ-групп, то хотя бы AT_ω-групп, $\omega = (p, p, \dots)$.

А. В. Тимофеенко поставил вопрос 13.55 [9]: "Существует ли группа Голода, изоморфная АТ-группе?"

Мы бы поставили вопрос по-другому: можно ли так обобщить конструкцию АТ-групп, чтобы ее порождающие стали равноправными, равносильными, взаимозаменяемыми?

В группе Голода порождающие — это символы, задающие многочлены, в этом смысле у них нет индивидуальности, они "одни из".

Но в АТ-группах есть активный элемент сплетения, а все остальные пассивные. О взаимо заменяемости вопрос даже не возникает. Математически точно это означает, что перестановка порождающих, продолженная по гомоморфности, гомоморфизм не задает.

Еще одна задача — выделить АТ-группы как абстрактный класс, описать их без привязки к однородным деревьям.

1. Первый вариант решения обозначенной выше проблемы. Задание АТ-группы как некой формально-логической системы.

Наиболее перспективными выглядят конечно порожденные 2-группы для $\omega = (2, 2, \ldots)$. Причина не только в том, что 2-группа Григорчука H_2 наиболее полно исследована. Именно для 2-групп наиболее просто реализовать идею формальных вычислений в духе операторов присваивания $f := (g, c)$, которая обсуждалась в конце второго раздела данной статьи.

Все используемые символы $\{c; f, g, h, \ldots\}$ являются инволюциями. Выделенный символ c переставляет половинки правой части оператора присваивания. Символы $f, g, h, \ldots$ попарно перестановочны и при помощи оператора присваивания единственным образом представляются как вектор.

Для окончания вычислений важно появление ситуации "остановки", а именно, появление записи вида $x := (x, c)$, которая означает, что группа не периодическая, так как элемент xc имеет бесконечный порядок. Запись вида $x := (x, 1)$ означает, что $x = 1$. Подобная формально-вычислительная система может быть полезна и для классической криптографии, поскольку она формализует сеть Файстеля, очень популярную в теории блочных шифров.

Оператор присваивания позволяет формализовать переход к поддеревьям и фактически является инструментом реализации градуировки элементов АТ-групп, у которых стабилизаторы вершин данного уровня $st(n)$ эту градуировку задают.

Здесь могут быть полезны различные тонкие конструкции А. И. Созутова [15], связанные с условиями конечности в алгебраических структурах, в том числе и в группах Голода. Важна работа И. Г. Лысенка [16], где в стиле градуировки и оператора присваивания описаны определяющие соотношения группы H_2.

2. Второй вариант. Рассмотрим АТ-группу G над деревом T как абстрактную группу и построим дерево T из частей самой группы G.

Способ уйти от конкретного вида порождающих АТ-групп предложил Григорчук [17]. Оставаясь внутри группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(T)$ слойно однородного дерева T, он рассмотрел подгруппу $G \leq \mathrm{Aut}(T)$ и сохранил в ней некоторые из свойств АТ-групп:

— группа G должна действовать транзитивно на всех слоях дерева T;

— если при этом все костабилизаторы $cost(n) = gr(cost(u) \mid |u| = n)$ нетривиальны, то группа называется *слабо ветвящейся*;

— если $|G : cost(n)| < \infty$, то она называется *ветвящейся.*

Ветвящиеся и слабо ветвящиеся группы существуют. Таковыми являются все к.п. периодические AT_ω-группы и многие другие АТ-группы. Ветвящиеся и слабо ветвящиеся группы, не являющиеся АТ-группами, пока не найдены. Однако идея использования костабилизаторов для абстрактного описания АТ-групп полезна.

П р и м е р 6. Пусть G — к.п. периодическая AT_ω-группа над деревом T, тогда в силу работы [8] для любой вершины $u \in T, |u| = n$, верно неравенство $|G_n \colon cost(u)| < \infty$, где G_n — n-срезка группы G. Более того, $cost(u) = cost(v)$, если $|u| = |v|$. Точнее, они подобны, как группы перестановок, поскольку действуют на разных поддеревьях. Для начальной вершины естественно положить, что $cost(\varnothing) = G$.

Из костабилизаторов построим дерево $T(G)$, изоморфное исходному дереву T. Изоморфизм зададим соответствием $u \leftrightarrow cost(u), u \in T, \varnothing \leftrightarrow G$, и ребрами соединим вершины $cost(u), cost(v)$ тогда и только тогда, когда ими соединены вершины u, v.

Мы зададим действие АТ-группы G на себе сопряжениями $g \rightarrowtail g^x$, распространим его на подгруппы $H \leq G$ и положим $H^g = \{h^g | g \in G\}$. Действие будет точным, поскольку АТ-группы не имеют центра.

Теперь мы можем задать действие группы G на дереве $T(G)$.

Вначале возьмем корневой порождающий c. Поскольку $G^c = G$, то он не сдвигает начальную вершину. Так как $cost(u)^c = cost(u^c)$, то корневой порождающий является и корневым порождающим $c(G)$ в группе автоморфизмов дерева $T(G)$. Те же рассуждения верны и для любого продольного порождающего $f \in G$.

Таким образом, действуя сопряжениями на дереве $T(G)$, группа G порождает свою копию — АТ-группу $gr(c(G); f(G), g(G), \ldots)$ над деревом $T(G)$. Этот переход не является тавтологией. Операция умножения в группе G заменена нами на сопряжение, т.е. на внутренние автоморфизмы группы G.

Из группы G мы перешли в группу $\mathrm{Aut}(G)$. Этот переход будет полным, если мы сможем абстрактно охарактеризовать костабилизаторы вершин как подгруппы абстрактной группы, а не как костабилизаторы группы автоморфизмов дерева, т. е. будем рассматривать АТ-группу G без привязки к дереву T как абстрактную группу.

В случае, если G — это AT_ω-группа, являющаяся p-группой, и $\omega = (p, p, \ldots)$, то, возможно, $cost(1)$ максимальная среди подгрупп, имеющих конечный индекс и являющихся p-й степенью некоторой подгруппы. Тут уже нет привязки к геометрическому смыслу костабилизатора.

Это утверждение верно для 2-группы H_2 и, скорее всего, для всех к.п. периодических AT_ω-групп с костабилизаторами, содержащими коммутант соответствующей срезки.

Далее, имея $cost(1)$, мы находим в нем максимальную подгруппу-степень и т. д. Построение такие вложенных p-степеней сразу задает структуру p-дерева. Скорее всего, это нас приведет к абстрактному описанию некоторых AT_ω-групп.

П р и м е р 7. В предыдущем примере при построении дерева костабилизаторов $T(G)$ конечность индекса костабилизатора не использовалась. Поэтому мы можем построить дерево костабилизаторов $T(G)$ и тогда, когда костабилизаторы просто не равны 1. Но в этом случае об абстрактном описании дерева костабилизаторов $T(G)$ нет смысла даже мечтать — костабилизаторы неизвестны. То, что они не равны 1, ничего о них не говорит.

3. Обобщение АТ-групп. У АТ-групп есть два важных свойства, делающих их доступными для изучения.

1. АТ-группа действует транзитивно на слоях дерева T;

2. На всех поддеревьях дерева T АТ-группа индуцирует АТ-группу.

Чтобы говорить о связи АТ-групп и групп Голода, должно быть выполнено еще одно важное условие, которого нет у АТ-групп:

3. Порождающие автоморфизмы дерева T должны быть равноправными, в том смысле, что их перестановка, продолженная по гомоморфности, должна порождать автоморфизм АТ-группы (в идеале).

Пусть $f = \{f(u) \mid u \in T\}$ — автоморфизм дерева T. Назовем сопровождающую перестановку $f(u)$ *висящей*, если на поддереве T_u, с начальной вершиной u она задает корневой автоморфизм поддерева T_u.

Иными словами, в других вершинах v этого поддерева размещены только тождественные перестановки $f(v) = 1$. Поэтому если мы построили некую гипотетическую АТ-группу G, для которой выполнены условия 1 и 2 и у одного из порождающих $f \in G$ есть висящая вершина $f(u), |u| = n$, то n-срезка G_n будет содержать корневой порождающий $c(f(u))$, и мы окажемся в стандартной АТ-группе с неравноправными порождающими.

Единственные автоморфизмы, не имеющие висящих перестановок, имеют вид, схожий с продольными порождающими, только нетривиальные перестановки расположены не рядом с направляющим путем, а на самом направляющем пути.

О п р е д е л е н и е 6 . Пусть $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots), \gamma_i \in A_i$ — путь в дереве T, построенном над последовательностью множеств $A_0, A_1, \ldots$. Автоморфизм f дерева T назовем γ-автоморфизмом, если из $f(u) \neq 1$ следует, что $u = (\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $F = \{f, g, h, \ldots\}$ — некоторое множество γ-автоморфизмов дерева T. Группа $G = gr(F)$ называется *γAT-группой*, если группа перестановок $\Pi_n = gr(f(u) \mid f \in F, |u| = n)$ транзитивно действует на множестве A_n для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 9. *Любая γAT-группа $G = gr(F)$ над деревом T индуцирует на поддеревьях n-го слоя γAT-группу, $G_n = gr(F_n)$, где F_n — автоморфизмы из F, у которых удалили начальный отрезок длины n.*

Любая γAT-группа транзитивно действует на слоях дерева T.

Порождающие γAT-группы имеют единый геометрический вид. Таким образом, все три условия выполнены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Назовем γ-автоморфизм f *главным*, если $f(\varnothing) \neq 1$. Для простоты и учитывая, что в силу геометрического вида γ-автоморфизмов вид дерева T не важен, можно считать, что это 2-дерево над последовательностью $\omega = (2, 2, \ldots)$, а все γ-автоморфизмы имеют направляющий путь $(0, 0, \ldots)$.

1. Если f — главный автоморфизм, то мы можем его записать в виде $f = f_0c = (f_1, 1)c$, где c — корневой автоморфизм, а f_1 — индуцированный автоморфизм на левом поддереве. Поэтому

$$f^2 = (f_1, 1)c(f_1, 1)c = (f_1, 1)(1, f_1) = (f_1, f_1).$$

Таким образом, группа G и на левом, и на правом поддереве индуцирует срезку f_1 любого главного γ-автоморфизма f.

Пусть теперь g — не главный, т. е. $g = g_0 = (g_1, 1)$. Тогда на левом поддереве сразу индуцирована срезка g_1. Чтобы индуцировать ее на правом поддереве, рассмотрим произведение

$$fgf = (f_1, 1)c(g_1, 1)(f_1, 1)c) = (f_1, 1)(1, g_1)(1, f_1) = (f_1, g_1f_1).$$

Так как срезка f_1 на правом поддереве уже есть, то произведение f_1g_1 дает нам и элемент g_1.

Получив на поддеревьях первого слоя 1-срезки G_1, мы, используя их, получаем на поддеревьях слоя два 1-срезки 1-срезок, т. е. 2-срезки G_2 и т. д.

2. Транзитивность действия на слоях дерева следует из определения γAT-группы и предыдущего пункта.

Теорема доказана.

Однако γ-автоморфизм f, если он имеет бесконечно много нееденичных сопровождающих перестановок, имеет бесконечный порядок над любым деревом. В самом деле, в силу равенства $f^2 = (f_1, f_1)$ (для главного автоморфизма) возведение в квадрат (для 2-дерева) на поддереве индуцирует автоморфизм того же типа. И если неединичных сопровождающих перестановок бесконечно много, этот процесс никогда не остановится. Поэтому очевидно, что любая к.п. γAT-группа не является периодической. Будет ли она группой без кручения — более сложный вопрос.

4. Итог. Если мы хотим построить аналог AT-групп с равноправными порождающими, то мы получаем γ-автоморфизмы, имеющие бесконечный порядок.

Если мы хотим иметь дело с периодическими группами, то у нас любой путь в порождающих элементах должен заканчиваться висящей перестановкой; соответственно начиная с некоторой срезки обязательно появятся корневые порождающие.

Последовательности вложенных поддеревьев, на которых расположено бесконечно много неединичных сопровождающих перестановок, зададут направляющие пути. Поэтому каждый некорневой порождающий будет похож на продольный.

Если некорневые порождающие будут иметь конечное число направляющих путей и число самих некорневых порождающих будет конечно, то начиная с некоторой срезки останутся только порождающие, имеющие ровно один направляющий путь.

Если сопровождающие перестановки располагать не на расстоянии 1 от направляющего пути, а на расстоянии 2, 3 или более, это только утяжелит конструкцию. Кроме корневых автоморфизмов появятся *корнеподобные*, у которых нетождественные автоморфизмы расположены не только в начальной вершине, но и в нескольких ближайших слоях дерева.

При переходе к срезкам корнеподобные автоморфизмы все равно сведутся к корневым, и это сильно усложнит вычисления.

Остается экзотический случай, когда каждый продольный автоморфизм имеет бесконечно много направляющих путей. Нет никаких идей, как задать понятные условия периодичности такой группы и как вообще с ней работать, отслеживая поведение бесконечного числа направляющих путей порождающих ее элементов.

Таким образом, если мы остаемся внутри группы $\mathrm{Aut}(T)$ слойно-однородного дерева T и хотим строить в ней к.п. бернсайдовы группы, то неизбежно возникнет конструкция, схожая с АТ-группами, в том смысле, что порождающие всегда будут двух различных типов — корневые и продольные.

Поэтому ответ на вопрос Тимофеенко, по-видимому, отрицательный.

Идея Станислава Владимировича Алешина неулучшаема.

7. Вопросы для “Часа проблем”

В о п р о с 1. Вычислить костабилизаторы и ряд коммутантов γ-аналога 2-группы Григорчука.

В дереве T над последовательностью $\omega = (2, 2, \ldots)$ берем группу $H = gr(f, g, h)$, порожденную 3 автоморфизмами дерева T. У всех этих автоморфизмов направляющий путь $(0, 0, \ldots)$, и нетривиальные сопровождающие перестановки расположены *на этом пути* с периодом 3 (а не рядом, на расстоянии 1, как у АТ-групп.) Перестановка вершин дерева — это $\pi = (0, 1)$, для краткости 1 — это π, а 0 — это тождественная перестановка. Ниже приводим код, задающий порождающие f, g, h :

$$(1, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1).$$

В о п р о с 2. Вычислить факторы нижнего центрального ряда 2-группы Сущанского [3].

Речь идет об АТ-группе $G = gr(c, f, g)$ над деревом T, построенном над последовательностью $\omega = (2, 2, \ldots)$, где c — корневой порождающий. Перестановка вершин дерева — это $\pi = (0, 1)$. Ниже 1 — это π, а 0 — это тождественная перестановка. Оба продольных порождающих f, g имеют направляющий путь $(0, 0, \ldots)$ и по одной нетривиальной перестановке на каждом слое дерева T. Вот эти перестановки — период повторения равен 4: $(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)$. Отметим, что это одна из $4! = 24$ возможных 2-групп Сущанского. В работе [3] нет указаний, как упорядочены координаты, поскольку это не влияет на периодичность группы.

В о п р о с 3. Рассмотрим двоичное дерево T и его автоморфизм Π, который во всех вершинах меняет местами 0 и 1. Пусть $\pi = (0, 1)$, тогда $\Pi = \{\Pi(u) = \pi \mid u \in T\}$.

Пусть $H_2 = gr(c, f, g)$ — 2-группа Григорчука. Группу $H_{2,2} = gr(c, f, g; \Pi f \Pi, \Pi g \Pi) = gr(H_2, \Pi H_2 \Pi)$ назовем сдвоенной 2-группой Григорчука. Нужно найти костабилизаторы, ряд коммутантов и нижний центральный ряд группы $H_{2,2}$.

В о п р о с 4. Рассмотрим двоичное дерево T и его автоморфизм Π, который во всех вершинах 0 и 1 меняет местами. Пусть $\pi = (0, 1)$, тогда $\Pi = \{\Pi(u) = \pi \mid u \in T\}$.

Пусть $H_2 = gr(c, f, g)$ — 2-группа Григорчука. Группу $H_{1+1} = gr(c, f; \Pi g \Pi)$ назовем расщепленной группой Григорчука. Найти костабилизаторы, ряд коммутантов и нижний центральный ряд группы H_{1+1}.

Мы благодарны Махневу Александру Алексеевичу за его гражданский подвиг — сохранение российской науки. И за поддержку алгебраистов, причастных к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голод Е.С.** О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.
2. **Алешин С.В.** Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 319–328.
3. **Сущанский В.И.** Периодические p-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 3. С. 561–565.
4. **Григорчук Р.И.** К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14, № 1. С. 53–54.
5. **Gupta N., Sidki S.** Some infinite p-groups // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 584–589.
6. **Рожков А.В.** О подгруппах бесконечных конечно порожденных p-групп // Мат. сб. 1986, Т. 129 (171), № 3. С. 422–433.
7. **Григорчук Р.И.** Степени роста конечно-порожденных групп и инвариантное среднее // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1984. Т. 48, № 5. С. 572–589.
8. **Рожков А.В.** Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев: дис. . . . д-р физ.-мат. наук / Краноярск. гос. ун-т. Красноярск, 1997. 230 с.
9. The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 20th ed. Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022. 269 p. URL: https://kourovka-notebook.org/ .
10. **Рожков А.В.** AT-группы, не являющиеся AT-подгруппами: переход от AT_ω-групп к AT_Ω-группам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 1. С. 218–231. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-218-231
11. **Мерзляков Ю.И.** О бесконечных конечно-порожденных периодических группах // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 4. С. 803–805.
12. **Первова Е.Л.** Конгруэнц-свойство AT-групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 553–567.
13. **Ольшанский А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 448 p.
14. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982. 288 p.
15. **Созутов А.И.** О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика, 2000, Т. 39, № 5. С. 602–617.
16. **Лысёнок И.Г.** Система определяющих соотношений для группы Григорчука // Мат. заметки. 1985, Т. 38, № 4, С. 503–516.
17. **Григорчук Р.И.** Ветвящиеся группы // Мат. заметки, 2000, Т. 67, № 6. С. 852–858.

Поступила 24.09.2023
После доработки 12.11.2023
Принята к публикации 20.11.2023

Рожков Александр Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор Кубанского государственного университета
г. Краснодар
e-mail: ros@math.kubsu.ru

Барсукова Виктория Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
доцент Кубанского государственного университета
г. Краснодар
e-mail: barsukova.v.y@gmail.com

REFERENCES

1. Golod E.S. On nil-algebras and finitely approximable p-groups. *Amer. Math. Soc., Translat., II*, 1965, vol. 48, pp. 103–106. doi: 10.1090/trans2/048
2. Aleshin S.V. Finite automata and Burnside's problem for periodic groups. *Math. Notes*, 1972, vol. 11, no. 3, pp. 199–203. doi: 10.1007/BF01098526
3. Sushchanskii V.I. Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem. *Soviet Math. Dokl.*, 1979, vol. 20, pp. 766–770.
4. Grigorchuk R.I. Burnside problem on periodic groups. *Funct. Anal. Appl.*, 1980, vol. 14, no. 1, pp. 41–43. doi: 10.1007/BF01078416
5. Gupta N., Sidki S. Some infinite p-groups. *Algebra and Logic*, 1983, vol. 22, no. 5, pp. 421–424. doi: 10.1007/BF01982120
6. Rozhkov A.V. On subgroups of infinite finitely generated p-groups. *Math. USSR-Sbornik*, 1987, vol. 57, no. 2, pp. 437–448. doi: 10.1070/SM1987v057n02ABEH003078
7. Grigorchuk R.I. Degrees of growth of finitely generated groups and the invariant mean. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.*, 1984, vol. 48, no. 5, pp. 572–589 (in Russian).
8. Rozhkov A.V. Conditions of finiteness in groups of automorphisms of trees: Diss. ... Dr. Phys.-Math. Sci. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State Univ., 1997, 230 p. (in Russian)
9. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory, 20th ed.*, eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Novosibirsk: Inst. Math. SO RAN Publ., 2022, 269 p. Available at: https://kourovka-notebook.org/ .
10. Rozhkov A.V. AT-groups which are not AT-subgroups: transition from AT_ω-groups to AT_Ω-groups. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 218–231 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-218-231
11. Merzlyakov Yu.I. On infinite finitely generated periodic groups. *Soviet Math. Dokl.*, 1983, vol. 27, pp. 169–172.
12. Pervova E.L. The congruence property of AT-groups. *Algebra and Logic*, 2002, vol. 41, no. 5, pp. 306–313. doi: 10.1023/A:1020979720331
13. Ol'shanskii A.Yu. *The geometry of defining relations in groups*, Dordrecht, Kluwer Publ., 1991, 505 p. ISBN: 9780792313946 . Original Russian text was published in Ol'shanskii A. Yu., *Geometriya opredelyayushchikh sootnoshenii v gruppakh*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 448 p. ISBN: 5-02-013916-5 .
14. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups.* Transl. from the 2nd Russian ed. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 62. NY; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag. 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. Osnovy teorii grupp, Moscow, Nauka Publ., 1982, 288 p.
15. Sozutov A.I. On some infinite groups with a strongly embedded subgroup. *Algebra and Logic*, 2000, vol. 39, no. 5, pp. 345–353. doi: 10.1007/BF02681619
16. Lysenok I.G. A system of defining relations for a Grigorchuk group. *Math. Notes*, 1985, vol. 38, no. 4, pp. 784–792. doi: 10.1007/BF01158402
17. Grigorchuk R.I. Branch groups. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no. 6, pp. 718–723. doi: 10.1007/BF02675625

Received September 24, 2023
Revised November 12, 2023
Accepted November 20, 2023

Alexander Vicktorovich Rozhkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Kuban State University, Krasnodar, 350040 Russia, e-mail: ros@math.kubsu.ru .

Victoria Yurievna Barsukova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kuban State University, Krasnodar, 350040 Russia, e-mail: barsukova.v.y@gmail.com .

Cite this article as: A. V. Rozhkov, V. Yu. Barsukova. AT-groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 241–258 .