ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.98

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КАРЛСОНА СО МНОГИМИ ВЕСАМИ

К. Ю. Осипенко

В работе рассматриваются точные неравенства типа Карлсона вида

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \le K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T)} \max_{1\le j\le n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T)},$$

где T — конус в $\mathbb{R}^d$, а веса $w_j(\cdot)$, $j = 1,\dots,n$, являются однородными и обладают некоторым свойством симметрии.

Ключевые слова: неравенства типа Карлсона, точные константы.

K. Yu. Osipenko. Sharp Carlson type inequalities with many weights.

The paper is concerned with sharp Carlson type inequalities of the form

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \le K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T)} \max_{1\le j\le n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T)},$$

where T is a cone in $\mathbb{R}^d$ and the weight functions $w_j(\cdot)$, $j = 1,\dots,n$, are homogeneous with some symmetry property.

Keywords: Carlson type inequalities, sharp constants.

MSC: 26D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-229-240

1. Введение

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(T,\mu)$ обозначим совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} = \left(\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty.$$

Для $T \subset \mathbb{R}^d$ и $d\mu = dt$, $t \in \mathbb{R}^d$, положим $L_p(T) = L_p(T,\mu)$.

Неравенство Карлсона [1]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \sqrt{\pi}\|x(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}\|tx(t)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}_+)}, \quad \mathbb{R}_+ = [0,+\infty),$$

обобщалось многими авторами (см. [2–9]). В работе [7] была найдена точная константа в неравенстве вида

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \le K\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu)}\|w_1(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)}, \tag{1.1}$$

где T — конус в линейном пространстве, $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot)$ — однородные функции, μ — однородная мера и $1 \le q < p, r < \infty$ (при $T = \mathbb{R}^d$ точная константа была получена в работе [5]). Напомним, что константа K называется точной, если ее нельзя заменить на меньшую. Само неравенство в таком случае называется точным.

Нахождение точной константы в неравенстве (1.1) тесно связано со следующей экстремальной задачей:

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \to \max, \quad \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \le \delta, \quad \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \le 1,$$

где $\delta > 0$. В этой работе изучается экстремальная задача

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \to \max, \quad \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \le \delta, \quad \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \le 1, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.2}$$

где $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ и $w_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, n$, — однородные функции с некоторыми дополнительными свойствами симметрии на функции $w_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, n$. Полученные результаты применяются для получения точных неравенств типа Карлсона со многими весами.

Ряд общих результатов относительно задачи (1.2) были получены в работе [9], но там основное внимание было уделено задачам оптимального восстановления линейных операторов, а точные неравенства типа Карлсона получались как следствия экстремальных задач, возникающих при построении оптимальных методов восстановления. В данной работе мы получаем эти неравенства непосредственно.

2. Однородные весовые функции на конусе в линейном пространстве

Пусть T — конус в линейном пространстве, $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка d, $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$ — однородные функции порядков θ, θ_0, а $|w_j(\cdot)|$, $j = 1, \dots, n$, — однородные функции порядка θ_1. Будем предполагать, что $w(t), w_0(t) \ne 0$ и $\sum_{j=1}^n |w_j(t)| \ne 0$ для почти всех $t \in T$. Если $1 \le q < p, r < \infty$, то при $k \in [0,1)$ функция $k^{1/(p-q)}(1-k)^{-1/(r-q)}$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Следовательно, существует функция $k(\cdot)$ такая, что для почти всех $t \in T$

$$\frac{k^{1/(p-q)}(t)}{(1-k(t))^{1/(r-q)}} = \Big|\frac{w(t)}{w_0(t)}\Big|^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}} \Big(\sum_{j=1}^n \Big|\frac{w_j(t)}{w_0(t)}\Big|^r\Big)^{-1/(r-q)}. \tag{2.1}$$

Положим

$$\gamma = \frac{\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r)}{\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p)}. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Пусть $1 \le q < p, r < \infty$ и $\theta_1 - \theta - d(1/q - 1/r) \ne 0$. Предположим, что*

$$I_1 = \int_T \left|\frac{w(z)}{w_0(z)}\right|^{pq/(p-q)} k^{p/(p-q)}(z)\, d\mu(z) < \infty,$$

$$I_{j+1} = \int_T \frac{|w(z)|^{qr/(p-q)}}{|w_0(z)|^{pr/(p-q)}} |w_j(z)|^r k^{r/(p-q)}(z)\, d\mu(z) < \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

и, кроме того, $I_2 = \ldots = I_{n+1}$. Тогда для всех $x(\cdot) \ne 0$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T,\mu)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T,\mu)$, $j = 1, \dots, n$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \le K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(T,\mu)} \max_{1 \le j \le n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)}, \tag{2.3}$$

где

$$K = I_1^{-\gamma/p} I_2^{-(1-\gamma)/r} (I_1 + nI_2)^{1/q}. \tag{2.4}$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются две леммы. Первая из них по сути является достаточным условием экстремума из теоремы Каруша — Куна — Таккера (см., например, [10, с. 39] (в силу простоты ее доказательства, состоящего из одной выкладки, оно приведено).

Пусть $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, — функции, определенные на некотором множестве A. Рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x) \to \max, \quad f_j(x) \le 0, \quad j = 1, \ldots, k, \quad x \in A, \tag{2.5}$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k).$$

Лемма 1. *Пусть существуют* $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, k$, *и допустимый в задаче* (2.5) *элемент* $\widehat{x} \in A$, *для которых*

$$\text{(a)} \quad \min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_k),$$

$$\text{(b)} \quad \widehat{\lambda}_j f_j(\widehat{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Тогда $\widehat{x}$ *— экстремальный элемент в задаче* (2.5).

Доказательство. Для любого допустимого в задаче (2.5) элемента $x \in A$ имеем

$$-f_0(x) \ge \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) \ge \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = -f_0(\widehat{x}). \qquad \square$$

Лемма 2 — частный случай леммы 3 из работы [7].

Лемма 2. *Для всех* $a, b \ge 0$ *таких, что* $a + b > 0$, *и всех* $1 \le q < p, r < \infty$ *существует единственное решение* $\widehat{u} > 0$ *уравнения*

$$q + pau^{p-q} + rbu^{r-q} = 0.$$

При этом для всех $u \ge 0$

$$-\widehat{u}^q + a\widehat{u}^p + b\widehat{u}^r \le -u^q + au^p + bu^r.$$

Доказательство теоремы 1. Положим

$$\widehat{x}(t) = |w_0(t)|^{-p/(p-q)} \Big(\frac{q|w(t)|^q}{p\lambda_0} \Big)^{1/(p-q)} k^{1/(p-q)}(\xi t),$$

где параметры λ_0, $\xi > 0$ подберем так, чтобы выполнялись равенства

$$\int\limits_T |w_0(t)|^p \widehat{x}^p(t)\, d\mu(t) = \delta^p, \quad \int\limits_T |w_j(t)|^r \widehat{x}^r(t)\, d\mu(t) = 1, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Сделав замену $z = \xi t$ и учитывая однородность функций $w(\cdot)$, $w_0(\cdot)$, $w_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, n$, а также меры $\mu(\cdot)$, получаем

$$\int\limits_T |w_0(t)|^p \widehat{x}^p(t)\, d\mu(t) = \Big(\frac{q}{p\lambda_0} \Big)^{p/(p-q)} I_1 \xi^{(\theta_0 - \theta)qp/(p-q) - d}.$$

Аналогично находим

$$\int\limits_T |w_j(t)|^r \widehat{x}^r(t)\, d\mu(t) = \Big(\frac{q}{p\lambda_0} \Big)^{r/(p-q)} I_{j+1} \xi^{(\theta_0 - \theta)qr/(p-q) + r(\theta_0 - \theta_1) - d}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, равенства (2.6) имеют вид

$$\Big(\frac{q}{p\lambda_0}\Big)^{p/(p-q)} I_1 \xi^{(\theta_0-\theta)qp/(p-q)-d} = \delta^p,$$
$$\Big(\frac{q}{p\lambda_0}\Big)^{r/(p-q)} I_{j+1} \xi^{(\theta_0-\theta)qr/(p-q)+r(\theta_0-\theta_1)-d} = 1, \quad j=1,\dots,n.$$

Нетрудно убедиться, что при

$$\xi = \big(\delta I_1^{-1/p} I_2^{1/r}\big)^{1/(\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p))}, \quad \lambda_0 = \frac{q}{p} I_1^{1-q/p} \xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)} \delta^{q-p}$$

эти равенства выполняются.

Рассмотрим экстремальную задачу, эквивалентную задаче (1.2)

$$\begin{gathered}\int_T |w(t)|^q |x(t)|^q \, d\mu(t) \to \max, \quad \int_T |w_0(t)|^p |x(t)|^p \, d\mu(t) \le \delta^p, \\ \int_T |w_j(t)|^r |x(t)|^r \, d\mu(t) \le 1, \quad j=1,\dots,n.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\overline{\lambda}) = \int_T L(t,x(t),\overline{\lambda}) \, d\mu(t), \quad \overline{\lambda} = (\lambda_0,\lambda_1,\dots\lambda_n),$$

где

$$L(t,x(t),\overline{\lambda}) = -|w(t)|^q |x(t)|^q + \lambda_0 |w_0(t)|^p |x(t)|^p + |x(t)|^r \sum_{j=1}^n \lambda_j |w_j(t)|^r.$$

Из определения функции $\widehat{x}(\cdot)$ получаем

$$p\lambda_0 |w_0(t)|^p \widehat{x}^{p-q}(t) = q|w(t)|^q k(\xi t) \tag{2.8}$$

и

$$r\sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \widehat{x}^{r-q}(t) = r\sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r |w_0(t)|^{-p(r-q)/(p-q)} \Big(\frac{q|w(t)|^q}{p\lambda_0}\Big)^{(r-q)/(p-q)} k^{(r-q)/(p-q)}(\xi t).$$

Из (2.1) и однородности функций $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$, $w_j(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, вытекает, что

$$\begin{aligned} k^{(r-q)/(p-q)}(\xi t) &= \Big|\frac{w(\xi t)}{w_0(\xi t)}\Big|^{q(p-r)/(p-q)} \Big(\sum_{j=1}^n \Big|\frac{w_j(\xi t)}{w_0(\xi t)}\Big|^r\Big)^{-1} (1-k(\xi t)) \\ &= \xi^{(\theta-\theta_0)q(p-r)/(p-q)-(\theta_1-\theta_0)r} \Big|\frac{w(t)}{w_0(t)}\Big|^{q(p-r)/(p-q)} \Big(\sum_{j=1}^n \Big|\frac{w_j(t)}{w_0(t)}\Big|^r\Big)^{-1} (1-k(\xi t)).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$r\sum_{j=1}^n |w_j(t)|^r \widehat{x}^{r-q}(t) = r\Big(\frac{q}{p\lambda_0}\Big)^{(r-q)/(p-q)} \xi^{(\theta-\theta_0)q(p-r)/(p-q)-(\theta_1-\theta_0)r} |w(t)|^q (1-k(\xi t)).$$

Положим

$$\lambda = \frac{q}{r}\Big(\frac{q}{p\lambda_0}\Big)^{-(r-q)/(p-q)} \xi^{(\theta_0-\theta)q(p-r)/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r}.$$

Тогда

$$r\lambda\sum_{j=1}^{n}|w_j(t)|^r\widehat{x}^{r-q}(t)=q|w(t)|^q(1-k(\xi t)). \tag{2.9}$$

Складывая (2.8) и (2.9), получаем

$$p\lambda_0|w_0(t)|^p\widehat{x}^{p-q}(t)+r\lambda\sum_{j=1}^{n}|w_j(t)|^r\widehat{x}^{r-q}(t)=q|w(t)|^q. \tag{2.10}$$

Из леммы 2 вытекает, что для всех допустимых в (2.7) функций $x(\cdot)$ и почти всех $t\in T$ при $\overline{\lambda}=(\lambda_0,\lambda,\dots,\lambda)$ имеет место неравенство

$$L(t,\widehat{x}(t),\overline{\lambda})\le L(t,x(t),\overline{\lambda}).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot),\overline{\lambda})\le\mathcal{L}(x(\cdot),\overline{\lambda}).$$

Учитывая выполнение равенств (2.6), из леммы 1 получаем, что $\widehat{x}(\cdot)$ — экстремальная функция в задаче (2.7). Принимая во внимание равенства (2.10) и (2.6), находим

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\le\delta\\ \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}\le1,\ j=1,\dots,n}}\|w(\cdot)x(\cdot)\|^q_{L_q(T,\mu)}=\int\limits_T|w(t)|^q|\widehat{x}(t)|^q\,d\mu(t)\\
&=q^{-1}\int\limits_T\Big(p\lambda_0|w_0(t)|^p\widehat{x}^p(t)+r\lambda\sum_{j=1}^{n}|w_j(t)|^r\widehat{x}^r(t)\Big)\,d\mu(t)=\frac{p\lambda_0\delta^p+nr\lambda}{q}\\
&=I_1^{1-q/p}\xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)}\delta^q+n\Big(\frac{p\lambda_0}{q}\Big)^{(r-q)/(p-q)}\xi^{(\theta_0-\theta)q(p-r)/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r}\\
&=I_1^{1-q/p}\xi^{(\theta_0-\theta)q-d(1-q/p)}\delta^q+nI_1^{r/p-q/p}\xi^{(\theta_0-\theta)q-d(r/p-q/p)+(\theta_1-\theta_0)r}\delta^{q-r}=\delta^{q\gamma}K^q.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Пусть $x(\cdot)\ne0$, $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(T,\mu)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(T,\mu)$, $j=1,\dots,n$. Положим

$$A=\max_{1\le j\le n}\|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)},\quad \delta=A^{-1}\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}.$$

Тогда из (2.11) вытекает, что

$$A^{-q}\|w(\cdot)x(\cdot)\|^q_{L_q(T,\mu)}\le\delta^{q\gamma}K^q.$$

Отсюда следует неравенство (2.3). Если предположить, что существует постоянная $K_1<K$, для которой тоже выполняется неравенство (2.3), то тогда

$$\sup_{\substack{\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\le\delta\\ \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}\le1,\ j=1,\dots,n}}\|w(\cdot)x(\cdot)\|^q_{L_q(T,\mu)}\le K_1^q\delta^{q\gamma}<K^q\delta^{q\gamma},$$

что противоречит (2.11).

Теорема доказана.

При $n=1$ утверждение теоремы 1 было доказано в [7].

3. Однородные весовые функции на конусе в $\mathbb{R}^d$

Пусть T — конус в $\mathbb{R}^d$, $d\mu(t) = dt$, $|w(\cdot)|$, $|w_0(\cdot)|$ — однородные функции порядков θ, θ_0, а $|w_j(\cdot)|$, $j = 1, \ldots, n$, — однородные функции порядка θ_1. Будем по-прежнему предполагать, что $w(t), w_0(t) \neq 0$ и $\sum_{j=1}^n |w_j(t)| \neq 0$ для почти всех $t \in T$. Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned}
t_1 &= \rho \cos\omega_1, \\
t_2 &= \rho \sin\omega_1 \cos\omega_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_{d-1} &= \rho \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{d-2} \cos\omega_{d-1}, \\
t_d &= \rho \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{d-2} \sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Положим $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{d-1})$. Для любой функции $f(\cdot)$, заданной на $\mathbb{R}^d$, введем следующее обозначение:

$$\widetilde{f}(\omega) = |f(\cos\omega_1, \ldots, \sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{d-2} \sin\omega_{d-1})|.$$

Заметим, что если $|f(\cdot)|$ — однородная функция порядка κ, то $\widetilde{f}(\omega) = \rho^{-\kappa}|f(t)|$. Обозначим через Ω область изменения ω, когда $t \in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ.

Предположим, что $\gamma \in (0,1)$, где γ определено формулой (2.2). Положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Нетрудно убедиться, что $q^* > q \geq 1$. Кроме того,

$$q^* = \frac{pqr(\theta_1 - \theta_0 + d(1/r - 1/p))}{(\theta_1 - \theta_0)r(p-q) - (\theta - \theta_0)q(p-r)}.$$

Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2}\omega_1 \sin^{d-3}\omega_2 \ldots \sin\omega_{d-2}.$$

Теорема 2. *Пусть $1 \leq q < p, r < \infty$ и $\gamma \in (0,1)$. Предположим, что*

$$I = \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{w}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{w}_0^{q^*\gamma}(\omega)\left(\sum_{k=1}^n \widetilde{w}_k^r(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r}} J(\omega)\, d\omega < \infty$$

и $I'_1 = \ldots = I'_n$, где

$$I'_j = \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{w}^{q^*}(\omega)\widetilde{w}_j^r(\omega)}{\widetilde{w}_0^{q^*\gamma}(\omega)\left(\sum_{k=1}^n \widetilde{w}_k^r(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}} J(\omega)\, d\omega, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда для всех $x(\cdot) \neq 0$ таких, что $w_0(\cdot)x(\cdot) \in L_p(T)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot) \in L_r(T)$, $j = 1, \ldots, n$, имеет место точное неравенство

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq \widetilde{K}\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T)}^{\gamma} \max_{1 \leq j \leq n} \|w_j(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T)}^{1-\gamma},$$

где

$$\widetilde{K} = \gamma^{-\gamma/p}\Big(\frac{1-\gamma}{n}\Big)^{-(1-\gamma)/r}\Big(\frac{B\,(q^*\gamma/p, q^*(1-\gamma)/r)\, I}{|\theta_1 - \theta_0 + d(1/p - 1/r)|(\gamma r + (1-\gamma)p)}\Big)^{1/q^*}, \tag{3.1}$$

а $B(\cdot,\cdot)$ — B-функция Эйлера.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим величину I_1 из теоремы 1 с помощью перехода к сферическим координатам. Имеем

$$I_1 = \int\limits_T \Big|\frac{w(z)}{w_0(z)}\Big|^{pq/(p-q)} k^{p/(p-q)}(z)\,dz$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\frac{\widetilde{w}(\omega)}{\widetilde{w}_0(\omega)}\Big)^{qp/(p-q)} J(\omega)\,d\omega \int\limits_0^{+\infty} \rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d-1} k^{p/(p-q)}(\rho,\omega)\,d\rho.$$

Переходя к сферическим координатам, для функции $k(\cdot)$ получим равенство

$$\frac{k^{1/(p-q)}(\rho,\omega)}{(1-k(\rho,\omega))^{1/(r-q)}} = \rho^{\frac{(\theta-\theta_0)q(p-r)-(\theta_1-\theta_0)r(p-q)}{(p-q)(r-q)}} \frac{\widetilde{w}^{\frac{q(p-r)}{(p-q)(r-q)}}(\omega)\widetilde{w}_0^{p/(p-q)}(\omega)}{\Big(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\Big)^{1/(r-q)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\rho^{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)} = \frac{(1-k(\rho,\omega))^{p-q}}{k^{r-q}(\rho,\omega)} \frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\Big(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\Big)^{p-q}}.$$

Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Тогда

$$d\rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d} = \left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta} d\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta}}{k^{(r-q)\zeta}}$$

$$= -\zeta\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk,$$

где

$$\zeta = \frac{(\theta-\theta_0)qp+d(p-q)}{(p-q)((\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r))} = \frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)}.$$

Если ρ меняется от 0 до $+\infty$, то k будет меняться от 0 до 1 при $(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r) < 0$ и от 1 до 0 при $(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r) > 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d-1} k^{p/(p-q)}(\rho,\omega)\,d\rho = \frac{p-q}{(\theta-\theta_0)qp+d(p-q)} \int\limits_0^{+\infty} k^{p/(p-q)}(\rho,\omega)\,d\rho^{(\theta-\theta_0)qp/(p-q)+d}$$

$$= \frac{1}{|(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)|}\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta}$$

$$\times \int\limits_0^1 k^{p/(p-q)} \frac{(1-k)^{(p-q)\zeta-1}}{k^{(r-q)\zeta+1}}(r-q+(p-r)k)\,dk$$

$$= \frac{1}{|(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)|}\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n \widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta}(K_1+K_2),$$

где

$$K_1 = (r-q)\int\limits_0^1 k^{\widehat{p}}(1-k)^{\widehat{q}-1}\,dk = (r-q)B(\widehat{p}+1,\widehat{q}),$$

$$K_2=(p-r)\int\limits_0^1 k^{\widehat{p}+1}(1-k)^{\widehat{q}-1}\,dk=(p-r)B(\widehat{p}+2,\widehat{q})=(p-r)\frac{\widehat{p}+1}{\widehat{p}+\widehat{q}+1}B(\widehat{p}+1,\widehat{q}),$$

$$\widehat{p}=\frac{(\theta_1-\theta)qr-d(r-q)}{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}=q^*\frac{\gamma}{p},$$
$$\widehat{q}=\frac{(\theta-\theta_0)qp+d(p-q)}{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}=q^*\frac{1-\gamma}{r}.$$

Таким образом,

$$K_1+K_2=p\frac{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}{(\theta_1-\theta_0)pr+d(p-r)}B(\widehat{p}+1,\widehat{q})=\frac{pq}{q^*}B(\widehat{p}+1,\widehat{q})$$
$$=\frac{q\gamma}{q^*}\Big(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\Big)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q}).$$

Отсюда

$$I_1=\frac{\gamma}{pr|\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)|}\Big(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\Big)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})I.$$

Теперь найдем I_2. Имеем

$$I_2=\int\limits_T\frac{|w(z)|^{qr/(p-q)}}{|w_0(z)|^{pr/(p-q)}}|w_1(z)|^r\,k^{r/(p-q)}(z)\,dz$$

$$=\int\limits_\Omega\frac{\widetilde{w}^{qr/(p-q)}(\omega)}{\widetilde{w}_0^{pr/(p-q)}(\omega)}\,\widetilde{w}_1^r(\omega)J(\omega)\,d\omega\int\limits_0^{+\infty}\rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r+d-1}\,k^{r/(p-q)}(\rho,\omega)\,d\rho.$$

Зафиксируем $\omega\in\Omega$. Тогда

$$d\rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r+d}=\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n\widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta_1}d\,\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1}}{k^{(r-q)\zeta_1}}$$

$$=-\zeta_1\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n\widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta_1}\frac{(1-k)^{(p-q)\zeta_1-1}}{k^{(r-q)\zeta_1+1}}\,(r-q+(p-r)k)\,dk,$$

где

$$\zeta_1=\frac{(\theta-\theta_0)qr+((\theta_1-\theta_0)r+d)(p-q)}{(p-q)((\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r))}=\frac{q^*(1-\gamma)}{r(p-q)}+\frac{1}{p-q}.$$

Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r+d-1}k^{r/(p-q)}(\rho,\omega)\,d\rho$$

$$=\frac{p-q}{(\theta-\theta_0)qr+((\theta_1-\theta_0)r+d)(p-q)}\int\limits_0^{+\infty}k^{r/(p-q)}(\rho,\omega)\,d\rho^{(\theta-\theta_0)qr/(p-q)+(\theta_1-\theta_0)r+d}$$

$$=\frac{1}{|(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)|}\left(\frac{\widetilde{w}^{q(p-r)}(\omega)\widetilde{w}_0^{p(r-q)}(\omega)}{\big(\sum_{j=1}^n\widetilde{w}_j^r(\omega)\big)^{p-q}}\right)^{\zeta_1}(L_1+L_2);$$

здесь

$$L_1=(r-q)\int\limits_0^1 k^{\widehat{p}-1}(1-k)^{\widehat{q}}\,dk=(r-q)B(\widehat{p},\widehat{q}+1),$$

$$L_2 = (p-r)\int\limits_0^1 k^{\widehat{p}}(1-k)^{\widehat{q}}\,dk = (p-r)B(\widehat{p}+1,\widehat{q}+1) = (p-r)\frac{\widehat{p}}{\widehat{p}+\widehat{q}+1}B(\widehat{p},\widehat{q}+1).$$

Таким образом,

$$L_1 + L_2 = r\frac{(\theta_1-\theta_0)r(p-q)-(\theta-\theta_0)q(p-r)}{(\theta_1-\theta_0)pr+d(p-r)}B(\widehat{p},\widehat{q}+1) = \frac{qr}{q^*}B(\widehat{p},\widehat{q}+1)$$

$$= \frac{q(1-\gamma)}{q^*}\Big(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\Big)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q}).$$

Следовательно,

$$I_2 = \frac{1-\gamma}{pr|\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)|}\Big(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\Big)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})I_1'.$$

Из того, что $I_1'+\ldots+I_n' = I$, вытекает, что $I_j' = I/n$, $j=1,\ldots,n$. Тем самым

$$I_2 = \frac{1-\gamma}{pr|\theta_1-\theta_0+d(1/r-1/p)|}\Big(\frac{\gamma}{p}+\frac{1-\gamma}{r}\Big)^{-1}B(\widehat{p},\widehat{q})\frac{I}{n}.$$

Остается подставить выражения для I_1 и I_2 в формулу (2.4).

Теорема 2 доказана.

При $n=1$ утверждение теоремы 2 было доказано в [5].

Приведем пример весов, для которых выполнены условия теоремы 2. Пусть $T=\mathbb{R}_+^d$,

$$w(t) = (t_1^2+\ldots+t_d^2)^{\theta/2}, \quad w_0(t) = (t_1^2+\ldots+t_d^2)^{\theta_0/2}, \quad w_j(t) = t_j^{\theta_1},\ j=1,\ldots,d. \tag{3.2}$$

Будем считать, что $\gamma\in(0,1)$. Это эквивалентно тому, что $\theta_1+d(1/r-1/q)>\theta>\theta_0+d(1/p-1/q)$ или $\theta_1+d(1/r-1/q)<\theta<\theta_0+d(1/p-1/q)$.

Нетрудно убедиться, что $\widetilde{w}(\cdot)=\widetilde{w}_0(\cdot)=1$, а $\widetilde{w}_j(\omega)=\widetilde{t}_j^{\,\theta_1}(\omega)$, $j=1,\ldots,d$, где

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}_1(\omega) &= \cos\omega_1,\\
\widetilde{t}_2(\omega) &= \sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\widetilde{t}_{d-1}(\omega) &= \sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\
\widetilde{t}_d(\omega) &= \sin\omega_1\sin\omega_2\ldots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^d \widetilde{t}_k^2(\omega)=1$.

Для величины I из теоремы 2 имеем

$$I = \int\limits_{\Pi_+^{d-1}} \frac{J(\omega)\,d\omega}{\big(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega)\big)^{q^*(1-\gamma)/r}}, \quad \Pi_+^{d-1} = [0,\pi/2]^{d-1}. \tag{3.3}$$

Если $r\theta_1\le 2$, то

$$\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega) \ge \sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega) = 1. \tag{3.4}$$

Если же $r\theta_1>2$, то по неравенству Гельдера

$$1 = \sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,2}(\omega) \le \Big(\sum_{k=1}^d \widetilde{t}_k^{\,r\theta_1}(\omega)\Big)^{2/(r\theta_1)} d^{1-2/(r\theta_1)}.$$

Тем самым
$$\sum_{k=1}^{d}\widetilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega)\geq d^{1-r\theta_1/2}. \tag{3.5}$$
Из (3.4) и (3.5) вытекает, что $I<\infty$.

Для I'_j имеем
$$I'_j=\int\limits_{\Pi_+^{d-1}}\frac{\widetilde{t}_j^{r\theta_1}J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^{d}\widetilde{t}_k^{r\theta_1}(\omega)\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}},\quad j=1,\ldots,d.$$
Рассмотрим интегралы
$$M_j=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d\cap\mathbb{B}^d}\frac{\left(\sum_{k=1}^{d}t_k^2\right)^{\theta_1q^*(1-\gamma)/2}t_j^{r\theta_1}}{\left(\sum_{k=1}^{d}t_k^{r\theta_1}\right)^{q^*(1-\gamma)/r+1}}\,dt,\quad j=1,\ldots,d,$$
где $\mathbb{B}^d$ — единичный шар в $\mathbb{R}^d$. Если сделать замену переменных в интеграле M_j, поменяв местами переменные t_j и t_k, то интеграл M_j перейдет в интеграл M_k. Следовательно, $M_1=\ldots=M_d$. Переходя к сферическим координатам, получим, что $M_j=I'_j/d$, $j=1,\ldots,d$. Таким образом, $I'_1=\ldots=I'_d$.

Для рассматриваемого случая из теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Пусть $1\leq q<p,r<\infty$ и выполнены неравенства $\theta_1+d(1/r-1/q)>\theta>\theta_0+d(1/p-1/q)$ или $\theta_1+d(1/r-1/q)<\theta<\theta_0+d(1/p-1/q)$. Тогда для весов* (3.2) *и всех $x(\cdot)$, для которых $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}_+^d)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(\mathbb{R}_+^d)$, $j=1,\ldots,d$, имеет место точное неравенство*
$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)}\leq\widetilde{K}\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}\max_{1\leq j\leq d}\|w_j(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(\mathbb{R}_+^d)},$$
где величина $\widetilde{K}$ определена равенством (3.1)*, в котором значение I определено* (3.3).

Приведем еще один результат для весов (3.2).

Следствие 2. *Пусть $1\leq q<p,r<\infty$. Веса* (3.2) *таковы, что $\theta=d(1-1/q)$, $\theta_0=d-(\lambda+d)/p$, $\theta_1=d+(\mu-d)/r$, где $\lambda,\mu>0$. Положим*
$$\alpha=\frac{\mu}{p\mu+r\lambda},\quad\beta=\frac{\lambda}{p\mu+r\lambda}.$$
Тогда для всех $x(\cdot)$, для которых $w_0(\cdot)x(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}_+^d)$ и $w_j(\cdot)x(\cdot)\in L_r(\mathbb{R}_+^d)$, $j=1,\ldots,d$, имеет место точное неравенство
$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}_+^d)}\leq C\|w_0(\cdot)x(\cdot)\|^{p\alpha}_{L_p(\mathbb{R}_+^d)}\max_{1\leq j\leq d}\|w_j(\cdot)x(\cdot)\|^{r\beta}_{L_r(\mathbb{R}_+^d)},$$
где
$$C=\frac{d^\beta}{(p\alpha)^\alpha(r\beta)^\beta}\Big(\frac{I}{\lambda+\mu}B\Big(\frac{\alpha}{1/q-\alpha-\beta},\frac{\beta}{1/q-\alpha-\beta}\Big)\Big)^{1/q-\alpha-\beta},$$
а
$$I=\int\limits_{\Pi_+^{d-1}}\frac{J(\omega)\,d\omega}{\left(\sum_{k=1}^{d}\widetilde{t}_k^{r(d-1)+\mu}(\omega)\right)^{\beta/(1/q-\alpha-\beta)}}.$$

При $d=1$ и $q=1$ утверждение следствия 2 было получено в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carlson F.** Une inégalité // Ark. Mat. Astr. Fysik. 1934. Vol. 25B. P. 1–5.
2. **Левин В.И.** Точные константы в неравенствах типа Карлсона // Докл. АН СССР. 1948. Т. 59. С. 635–638.
3. **Андрианов Ф.И.** Многомерные аналоги неравенства Карлсона и его обобщения // Изв. вузов. Математика. 1967. № 1. С. 3–7.
4. **Арестов В.В.** Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // Тр. Математического ин-та АН СССР. 1975. Т. 138. С. 29–42.
5. **Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E.** Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights // Math. Ineq. Appl. 1998. Vol. 1, no. 1. P. 53–67. doi: 10.7153/mia-01-04
6. **Luo M.-J., Raina R.K.** A new extension of Carlson's inequality // Math. Ineq. Appl. 2016. Vol. 19, no. 2. P. 417–424. doi: 10.7153/mia-19-33
7. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities // J. Complexity. 2016. Vol. 32, no. 1. P. 53–73. doi: 10.1016/j.jco.2015.07.004
8. **Osipenko K.Yu.** Inequalities for derivatives with the Fourier transform // Appl. Comp. Harm. Anal. 2021. Vol. 53. P. 132–150. doi: 10.1016/j.acha.2021.02.001
9. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties [e-resource]. 2023. 32 p. URL: https://arxiv.org/pdf/2303.10355.pdf. doi: 10.48550/arXiv.2303.10355
10. **Осипенко К. Ю.** Выпуклый анализ. М.: УРСС, 2022. 144 с.

Поступила 15.06.2023
После доработки 20.09.2023
Принята к публикации 25.09.2023

Осипенко Константин Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет, кафедра общих проблем управления
г. Москва
e-mail: office@mech.math.msu.su;
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
г. Москва
e-mail: director@iitp.ru

REFERENCES

1. Carlson F. Une inégalité. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1934, vol. 25B, pp. 1–5.
2. Levin V. I. Exact constants in Carlson type inequalities. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1948, vol. 59, pp. 635–638 (in Russian).
3. Andrianov F. I. Multidimensional analogs of Carlson inequalities and its generalizations. *Izvestiya VUZ. Mat.*, 1967, no. 1, pp. 3–7 (in Russian).
4. Arestov V. V. Approximation of linear operators and related extremal problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 31–44.
5. Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights. *Math. Ineq. Appl.*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 53–67. doi: 10.7153/mia-01-04
6. Luo M.-J., Raina R.K. A new extension of Carlson's inequality. *Math. Ineq. Appl.*, 2016, vol. 19, no. 2, pp. 417–424. doi: 10.7153/mia-19-33
7. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities. *J. Complexity*, 2016, vol. 32, no. 1, pp. 53–73. doi: 10.1016/j.jco.2015.07.004
8. Osipenko K.Yu. Inequalities for derivatives with the Fourier transform. *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 2021, vol. 53, pp. 132–150. doi: 10.1016/j.acha.2021.02.001

9. Osipenko K.Yu. *Optimal recovery and generalized Carlson inequality for weights with symmetry properties.* 2023. 32 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/2303.10355.pdf.
doi: 10.48550/arXiv.2303.10355

10. Osipenko K.Yu. *Vypuklyi analiz.* [Convex analysis], Moscow, URSS, 2022, 144 p.
ISBN: 978-5-9710-9724-2.

Received June 15, 2023
Revised September 20, 2023
Accepted September 25, 2023

Konstantin Yur'evich Osipenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Department of general problems of control, Moscow, 119991, Russia, e-mail: mmmf@mech.math.msu.su; Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Moscow, 127051 Russia, e-mail: director@iitp.ru.

Cite this article as: K. Yu. Osipenko. Sharp Carlson type inequalities with many weights. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 229–240.