ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА ОТРЕЗКЕ С НАИМЕНЬШИМ ЗНАЧЕНИЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ НОРМЫ r-Й ПРОИЗВОДНОЙ

С. И. Новиков

Для конечных наборов данных из единичного шара пространства l_2^N найдено точное решение задачи интерполяции с наименьшим значением L_2-нормы производной порядка r $(r \geq 2)$ на конечном отрезке $[a,b]$ функциями $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющими абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную. Интерполирование производится в узлах произвольной сетки $\Delta_N:\ a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$. Значение наименьшей L_2-нормы на классе интерполируемых значений выражено через максимальное собственное число некоторой квадратной матрицы и её определитель. Работа уточняет классические результаты в теории сплайнов, первоначально полученные Дж.Холидеем и затем продолженные Дж.Албергом, Э.Нильсоном и Дж.Уолшем, а также В.Н.Малоземовым и А.Б.Певным, относящиеся к свойству минимальной нормы для сплайнов.

Ключевые слова: интерполяция, натуральные сплайны, собственное значение матрицы.

S. I. Novikov. Optimal interpolation on an interval with the smallest mean-square norm of the rth derivative.

An exact solution is found to the problem of interpolation on a finite interval $[a,b]$ with the smallest L_2-norm of the rth-order derivative $(r \geq 2)$ by functions $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ with absolutely continuous $(r-1)$th-order derivatives for finite collections of data from the unit ball of the space l_2^N. Interpolation is performed at nodes of an arbitrary grid $\Delta_N\colon a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$. The smallest value of the L_2-norm on the class of interpolated data is expressed in terms of the largest eigenvalue of a certain square matrix and its determinant. The paper improves the classical results of spline theory related to the minimum norm property, which were originally obtained by J. Holladay and then developed by J. Ahlberg, E. Nilson, and J. Walsh, as well as by V. N. Malozemov and A. B. Pevnyi.

Keywords: interpolation, natural splines, matrix eigenvalue.

MSC: 41A05, 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-217-228

Введение

Пусть N — произвольное натуральное число, $1 \leq p \leq \infty$ и

$$\mathfrak{M}_{N,p} = \Big\{z\colon z = \{z_j\}_{j=1}^N,\ \Big(\sum_{j=1}^N |z_j|^p\Big)^{1/p} \leq 1\Big\}$$

— класс вещественных интерполируемых данных, который является единичным шаром с центром в начале координат в пространстве l_p^N. При $p = \infty$ сумма в степени $1/p$ заменяется величиной $\max\{|z_j|:\ j = 1,2,\ldots,N\}$.

Через $AC[a,b]$ обозначается множество абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций.

Пусть

$$\Delta_N:\ a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b \quad (a > -\infty,\ b < +\infty)$$

— произвольная фиксированная сетка из N точек на отрезке $[a,b]$.

Обозначим $W_p^r = \big\{f\colon f^{(r-1)} \in AC[a,b],\ f^{(r)} \in L_p[a,b]\big\}$, L_p-норму $(1 \leq p < \infty)$ определим стандартным образом: $\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$, при $p = \infty$ правая часть заменяется на $\operatorname{esssup}\{|f(x)|:\ x \in [a,b]\}$.

З а д а ч а 1. Для фиксированного вектора $z = \{z_k\}_{k=1}^N \in l_p^N$ найти величину

$$K_{N,r,p}(z) = \inf_{\substack{f \in W_p^r \\ f(x_k)=z_k,\, k=\overline{1,N}}} \|f^{(r)}\|_p.$$

З а д а ч а 2. Найти величину

$$\mathfrak{B}_{r,p}(\Delta_N) = \sup_{z \in \mathfrak{M}_{N,p}} K_{N,r,p}(z).$$

Задачу 1 для $p = 2$ впервые изучал Дж. Холледей [1] при $r = 2$. При любом $r \in \mathbb{N}$ экстремаль в задаче 1 была выписана в одной из первых монографий по теории сплайнов — книге Дж. Алберга, Э. Нильсона и Дж. Уолша [2, гл. 5]. Там было установлено, что при $N > r,\ r \geq 2$, единственной функцией, являющейся экстремалью в задаче 1, будет *интерполяционный натуральный сплайн* $S_{2r-1}(x)$ степени $2r-1$ дефекта 1 с узлами "склейки" в точках $\{x_k\}_{k=1}^N$ сетки Δ_N. О таком сплайне в этом случае говорят, что он обладает свойством минимальной нормы. Известно (см., например, [3, гл. 3]), что сплайн $S_{2r-1}(x)$ удовлетворяет граничным условиям специального вида

$$S_{2r-1}^{(\nu)}(a) = 0, \quad S_{2r-1}^{(\nu)}(b) = 0 \quad (\nu = r, r+1, \ldots, 2r-2),$$

которые иногда называют натуральными граничными условиями. Важно подчеркнуть, что граничные условия в задаче 1 изначально не задаются, а являются свойствами оптимального интерполянта.

Другую информацию о результатах, полученных при решении задачи 1 в случае $p \neq 2$, можно найти в работе В. М. Тихомирова и Б. Боянова [4] и приведенной там библиографии. Также отметим, что явные выражения величин $K_{N,r,p}(z)$ в общем случае до сих пор неизвестны.

Задача 2 близка к проблемам экстремальной интерполяции (см., например, [5–7]), восходящим к исследованиям Ж. Фавара, Ю. Н. Субботина и К. де Бора, однако имеется ряд отличий. Основное отличие состоит в том, что на множество интерполируемых значений в постановке задачи 2 не задаются ограничения на их конечные или разделенные разности, а требуется только, чтобы сами эти значения были ограничены в норме пространства l_p. В связи с задачей 2 отметим также работу автора [8], посвященную экстремальному интерполированию периодических данных на равномерной сетке.

Настоящее исследование посвящено точному нахождению величины $\mathfrak{B}_r(\Delta_{N,2})$ при интерполировании на произвольной сетке Δ_N. Поскольку его результаты относятся только к случаю $p = 2$, везде далее в обозначениях $\mathfrak{M}_{N,2}, K_{N,r,2}(z)$ и $\mathfrak{B}_{r,2}(\Delta_N)$ индекс 2 будем опускать.

Применяемые в данной работе методы не позволяют исследовать аналогичную задачу при $p \neq 2$, а также для бесконечного числа условий интерполяции.

1. Натуральные сплайны нечетной степени

Интерполяционный натуральный сплайн $S_{2r-1}(x)$ степени $2r-1$ дефекта 1 с узлами в точках интерполяции Δ_N, который при $N > r,\ r \geq 2$ является решением задачи 1, записывается следующим образом:

$$S_{2r-1}(x) = q_{r-1}(x) + \sum_{k=1}^N d_k |x - x_k|^{2r-1},$$

где q_{r-1} — алгебраический полином степени не выше $r-1$, а $\{d_k\}_{k=1}^N$ — вещественные константы (см., например, [3, гл.3]). Это представление эквивалентно стандартному представлению сплайна через функции-"срезки" $(x - x_k)_+^{2r-1}$.

Для нахождения параметров сплайна $S_{2r-1}(x)$ — констант $\{d_k\}_{k=1}^N$ и коэффициентов полинома q_{r-1} (всего $N+r$ неизвестных), помимо интерполяционных условий

$$S_{2r-1}(x_k) = z_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

требуется выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^{N} d_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} d_k x_k = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{N} d_k x_k^{r-1} = 0.$$

В результате возникает система $N+r$ линейных алгебраических уравнений.

Далее всюду предполагаем, что $r \geq 2,\ N > r$.

Существование и единственность интерполяционного натурального сплайна $S_{2r-1}(x)$ степени $2r-1$ дефекта 1 с узлами в точках интерполяции (т.е. существование и единственность экстремального интерполянта в задаче 1) эквивалентны тому, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & |x_1 - x_2|^{2r-1} & \cdots & |x_1 - x_N|^{2r-1} & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{r-1} \\ |x_2 - x_1|^{2r-1} & 0 & \cdots & |x_2 - x_N|^{2r-1} & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{r-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |x_N - x_1|^{2r-1} & |x_N - x_2|^{2r-1} & \cdots & 0 & 1 & x_N & \cdots & x_N^{r-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \cdots & x_N^{r-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

указанной выше системы линейных уравнений является неособенной, т. е. $\det A \neq 0$. Заметим, что матрица A является симметричной.

Свойства натуральных сплайнов хорошо известны, начиная с упомянутой выше работы [1] ($r = 2$, кубические сплайны), где впервые было доказано свойство минимальной нормы. Однако, термин “натуральный сплайн” впервые появился, видимо, в работе Шенберга [9]. Натуральные сплайны с точки зрения абстрактного подхода Аттья — Лорана были рассмотрены в [10]. Теория натуральных сплайнов подробно изложена в упомянутой выше книге В. Н. Малоземова и А. Б. Певного [3], где им посвящена отдельная глава. Там, в частности, приведены доказательства существования и единственности интерполяционного натурального сплайна нечетной степени и свойства минимальной нормы.

Для того, чтобы найти величину $\mathfrak{B}_r(\Delta_N)$, нам потребуются свойства фундаментальных натуральных сплайнов, определяемых следующим образом.

В матрице A поочередно заменяем k-ю строку ($k = 1, 2, \ldots, N$) строкой

$$|x - x_1|^{2r-1} \quad |x - x_2|^{2r-1} \quad \ldots \quad |x - x_N|^{2r-1} \quad 1 \quad x \quad \ldots \ x^{2r-1},$$

содержащей переменную x. Полученные матрицы обозначаем через $A_k(x)$ и полагаем

$$Q_k(x) = (\det A)^{-1} \det A_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Лемма 1. *Функции $\{Q_k(x)\}_{k=1}^N$ являются фундаментальными натуральными сплайнами, т. е. $Q_k(x_j) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера $(k, j = 1, 2, \ldots, N)$.*

Доказательство. Каждая из функций $Q_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ является натуральным сплайном в силу ее построения. Пусть $j \neq k$. В этом случае матрица $A_k(x_j)$ имеет две одинаковые строки, и потому ее определитель равен нулю. Если же $j = k$, то матрица $A_k(x_k)$ совпадает с матрицей A. □

Лемма 2. *Интерполяционный натуральный сплайн $S_{2r-1}(x)$ однозначно представляется в виде*

$$S_{2r-1}(x)=\sum_{k=1}^{N} z_k Q_k(x),$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{N}$ — множество интерполируемых значений.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко получается применением леммы 1. □

Таким образом, с одной стороны,

$$S_{2r-1}^{(r)}(x)=\frac{(2r-1)!}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{N} d_k(x-x_k)^{r-1}\operatorname{sign}(x-x_k), \tag{1.1}$$

а с другой стороны, в силу леммы 2 —

$$S_{2r-1}^{(r)}(x)=(\det A)^{-1}\sum_{k=1}^{N} z_k\,\big(\det A_k(x)\big)^{(r)}. \tag{1.2}$$

Теперь в (1.2) пользуемся известным правилом дифференцирования определителей и тем обстоятельством, что у $\det A_k(x)$ только одна (k-я) строка зависит от переменной x. После разложения каждого из получившихся определителей по элементам строки, содержащей x, получаем

$$\big(\det A_k(x)\big)^{(r)}=\frac{(2r-1)!}{(r-1)!}\sum_{\nu=1}^{N}\alpha_{\nu k}\,(x-x_\nu)^{r-1}\operatorname{sign}(x-x_\nu)\quad (k=1,2,\dots,N).$$

Коэффициенты $\alpha_{\nu k}$ $(\nu,k=1,2,\dots,N)$ в этом представлении выражаются через определители матриц, составленных из блоков

$$\alpha_{\nu k}=(-1)^{\nu+k}\,\det\left(\begin{array}{c|c} B & C\\ \hline V & O\end{array}\right),$$

где B — квадратный блок размером $(N-1)\times(N-1)$, образованный строками

$$|x_1-x_j|^{2r-1}\dots|x_{\nu-1}-x_j|^{2r-1}\;|x_{\nu+1}-x_j|^{2r-1}\dots|x_N-x_j|^{2r-1}$$

$$(j=1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,N);$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{r-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{r-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_{k-1} & \cdots & x_{k-1}^{r-1}\\ 1 & x_{k+1} & \cdots & x_{k+1}^{r-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_N & \cdots & x_N^{r-1}\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{\nu-1} & x_{\nu+1} & \cdots & x_N\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \cdots & x_{\nu-1}^{r-1} & x_{\nu+1}^{r-1} & \cdots & x_N^{r-1}\end{pmatrix},$$

O — блок размером $N\times r$, который целиком состоит из нулей. Блок C — прямоугольный, размером $(N-1)\times r$, блок V — прямоугольный, размером $r\times(N-1)$. Замечаем, что главная диагональ блока B состоит из нулей.

2. Основной результат и его доказательство

Прежде всего определяем величины, в терминах которых ниже будет сформулирован основной результат.

Пусть

$$q_{kk} = \frac{(b - x_k)^{2r-1} + (x_k - a)^{2r-1}}{2r - 1} \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

а при $j \neq k$ $(j, k = 1, 2, \dots, N)$

$$q_{kj} = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}} (x_j - x_k)^{2r-1}$$

$$\times \left\{ \frac{4\ (2r - 2)!!}{(2r - 1)!!} + \sum_{\nu=0}^{r-1} \left[\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu + 1}\ C_{r-1}^{\nu} \frac{(2b - x_k - x_j)^{2\nu+1} - (2a - x_k - x_j)^{2\nu+1}}{(x_j - x_k)^{2\nu+1}} \right] \right\},$$

где $C_{r-1}^{\nu} = (r - 1)!/(\nu!(r - 1 - \nu)!)$.

Пусть, кроме того,

$$a_{\nu\nu} = \sum_{k=1}^{N} q_{kk}\alpha_{k\nu}^2 + 2\big[\, \alpha_{1\nu}(q_{12}\alpha_{2\nu} + \dots + q_{1N}\alpha_{N\nu}) + \alpha_{2\nu}(q_{23}\alpha_{3\nu} + \dots + q_{2N}\alpha_{N\nu})$$

$$+ \dots + \alpha_{N-1,\nu} q_{N-1,N}\alpha_{N\nu} \big] \quad (\nu = 1, 2, \dots, N),$$

$$a_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{N} q_{kk}\alpha_{k\mu}\alpha_{k\nu} + \alpha_{1\mu}(q_{12}\alpha_{2\nu} + \dots + q_{1N}\alpha_{N\nu}) + \alpha_{2\mu}(q_{23}\alpha_{3\nu} + \dots + q_{2N}\alpha_{N\nu})$$

$$+ \dots + \alpha_{N-1,\mu} q_{N-1,N}\alpha_{N\nu} \quad (\mu \neq \nu,\ \mu, \nu = 1, 2, \dots, N).$$

Объединяя числа a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, N)$ в квадратную симметричную матрицу $Q = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}$ размером $N \times N$, обозначим через $\lambda_{\max}$ ее максимальное собственное значение.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $N > r,\ r \geq 2$. Тогда*

$$\mathfrak{B}_r(\Delta_N) = \frac{(2r - 1)!}{(r - 1)!} \frac{1}{|\det A|} \sqrt{\lambda_{\max}}.$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны следующие леммы.

Лемма 3. *Для любого натурального числа m справедливо равенство*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (x - \alpha)^m (x - \beta)^m \, dx$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \left\{ \frac{(-1)^{m-\nu}}{2\nu + 1}\ C_m^{\nu}\ \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^{2(m-\nu)} \left[\left(\tau_2 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{2\nu+1} - \left(\tau_1 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{2\nu+1} \right] \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интеграле делаем замену переменной $x = t + (\alpha + \beta)/2$ и затем используем разложение по биному Ньютона. □

Лемма 4. *Пусть $r \geq 2$, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$,*

$$\Psi_\nu(x) = (x - x_\nu)^{r-1} \mathrm{sign}(x - x_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \dots, N).$$

Тогда при всех $j > k$ ($j, k = 1, 2, \ldots, N$) имеют место равенства

$$\int_a^b \Psi_k(x)\Psi_j(x)\,dx = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}}\,(x_j - x_k)^{2r-1}$$

$$\times\left[\frac{4(2r-2)!!}{(2r-1)!!} + \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu}\frac{(2b-x_1-x_j)^{2\nu+1}-(2a-x_k-x_j)^{2\nu+1}}{(x_j-x_k)^{2\nu+1}}\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $j > k$, исходный интеграл разбивается на три интеграла:

$$\int_a^b \Psi_k(x)\Psi_j(x)\,dx = I_1 - I_2 + I_3, \tag{2.1}$$

$$I_1 = \int_a^{x_k}(x-x_k)^{r-1}(x-x_j)^{r-1}\,dx, \quad I_2 = \int_{x_k}^{x_j}(x-x_k)^{r-1}(x-x_j)^{r-1}\,dx,$$

$$I_3 = \int_{x_j}^{b}(x-x_k)^{r-1}(x-x_j)^{r-1}\,dx.$$

Каждый из этих трех интегралов вычисляем с помощью леммы 3. В результате для интеграла I_1 получаем

$$I_1 = \frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-1-\nu}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu}(x_k-x_j)^{2(r-1-\nu)}\big[(x_k-x_j)^{2\nu+1}-(2a-x_k-x_j)^{2\nu+1}\big]. \tag{2.2}$$

Аналогично находим

$$I_2 = \frac{2(-1)^{r-1}}{2^{2r-1}}\left(\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu}\right)(x_j-x_k)^{2r-1}.$$

Хорошо известно (см., например, [11, с. 612]), что

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu} = \frac{(2r-2)!!}{(2r-1)!!}, \tag{2.3}$$

где $(2r-2)!! = 2\cdot 4\cdots(2r-2)$, $(2r-1)!! = 1\cdot 3\cdots(2r-1)$.

Таким образом,

$$I_2 = \frac{2(-1)^{r-1}}{2^{2r-1}}\,\frac{(2r-2)!!}{(2r-1)!!}\,(x_j-x_k)^{2r-1}. \tag{2.4}$$

Равенство (2.3) также используем в ходе вычисления интеграла I_3:

$$I_3 = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-1-\nu}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu}\Big(\frac{x_j-x_k}{2}\Big)^{2(r-1-\nu)}\bigg[\Big(b-\frac{x_k+x_j}{2}\Big)^{2\nu+1}-\Big(x_j-\frac{x_k+x_j}{2}\Big)^{2\nu+1}\bigg]$$

$$= \frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-1-\nu}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu}(x_j-x_k)^{2(r-1-\nu)}(2b-x_k-x_j)^{2\nu+1}$$

$$-\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r-1}}\left(\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}\,C_{r-1}^{\nu}\right)(x_j-x_k)^{2r-1}$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r-1}} \Big\{ \sum_{\nu=0}^{r-1} \Big[\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} C_{r-1}^\nu (x_j - x_k)^{2(r-1-\nu)} (2b - x_k - x_j)^{2\nu+1} \Big] - (x_j - x_k)^{2r-1} \frac{(2r-2)!!}{(2r-1)!!} \Big\}. \quad (2.5)$$

Подставив (2.2), (2.4) и (2.5) в (2.1) и выполнив элементарные преобразования, завершаем доказательство леммы 4. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть, как и в лемме 4,

$$\Psi_\nu(x) = (x - x_\nu)^{r-1} \operatorname{sign}(x - x_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Тогда (1.2) перепишем в виде

$$S_{2r-1}^{(r)}(x) = (\det A)^{-1} \left(\sum_{s=1}^N z_s \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu s} \Psi_\nu(x) \right) \frac{(2r-1)!}{(r-1)!} = \frac{(2r-1)!}{(r-1)! \ \det A} \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu(x) \sum_{s=1}^N z_s \alpha_{\nu s}.$$

Отсюда в силу (1.1) и единственности интерполяционного натурального сплайна, получаем

$$d_\nu = \frac{1}{\det A} \sum_{s=1}^N z_s \alpha_{\nu s} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Из представления (1.1) для квадрата L_2-нормы функции $S_{2r-1}^{(r)}(x)$ имеем

$$\|S_{2r-1}^{(r)}\|_2^2 = \Big(\frac{(2r-1)!}{(r-1)!} \Big)^2 \left(\sum_{k=1}^N d_k^2 \int_a^b |\Psi_k(x)|^2 \, dx + 2 \sum_{\substack{j>k \\ j,k=1}}^N d_k d_j \int_a^b \Psi_k(x) \Psi_j(x) \, dx \right). \quad (2.6)$$

Интегралы в (2.6) вычисляются в явном виде. Действительно, нетрудно убедиться в том, что

$$q_{kk} = \int_a^b |\Psi_k(x)|^2 \, dx = \frac{(b - x_k)^{2r-1} + (x_k - a)^{2r-1}}{2r-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

а при $j > k$ согласно лемме 4 имеем

$$q_{kj} = \int_a^b \Psi_k(x) \Psi_j(x) dx = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}} \ (x_j - x_k)^{2r-1}$$

$$\times \Big\{ \frac{4 \ (2r-2)!!}{(2r-1)!!} + \sum_{\nu=0}^{r-1} \Big[\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu+1} \ C_{r-1}^\nu \frac{(2b - x_k - x_j)^{2\nu+1} - (2a - x_k - x_j)^{2\nu+1}}{(x_j - x_k)^{2\nu+1}} \Big] \Big\}.$$

В результате получаем

$$\|S_{2r-1}^{(r)}\|_2^2 = \Big(\frac{(2r-1)!}{(r-1)!} \Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^N d_k^2 \ q_{kk} + 2 \sum_{\substack{j>k \\ j,k=1}}^N d_k d_j \ q_{kj} \Big)$$

$$= \Big(\frac{(2r-1)!}{(r-1)! \ \det A} \Big)^2 \Big[\sum_{k=1}^N q_{kk} \Big(\sum_{s=1}^N z_s \alpha_{ks} \Big)^2 + 2 \sum_{\substack{j>k \\ j,k=1}}^N q_{kj} \Big(\sum_{s=1}^N z_s \alpha_{ks} \Big) \Big(\sum_{s=1}^N z_s \alpha_{js} \Big) \Big]$$

$$= \Big(\frac{(2r-1)!}{(r-1)! \ \det A} \Big)^2 (F_1 + 2F_2),$$

где

$$F_1=\sum_{k=1}^{N} q_{kk}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{ks}\Big)^2,\quad F_2=\sum_{\substack{j>k\\ j,k=1}}^{N} q_{kj}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{ks}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{js}\Big).$$

Функции F_1 и F_2 представляют собой квадратичные формы от интерполируемых значений $\{z_k\}_{k=1}^N$. В выражении для F_1 возводим сумму в квадрат и меняем порядок суммирования. В результате получаем

$$F_1=\sum_{k=1}^{N} q_{kk}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s^2\alpha_{ks}^2+\sum_{\nu\neq s} z_\nu z_s\alpha_{k\nu}\alpha_{ks}\Big)=\sum_{s=1}^{N} z_s^2\sum_{k=1}^{N}\alpha_{ks}^2 q_{kk}+\sum_{\nu\neq s} z_\nu z_s\sum_{k=1}^{N}\alpha_{k\nu}\alpha_{ks}q_{kk}.$$

В выражении для F_2 поэлементно расписываем внешнюю сумму:

$$F_2=\sum_{\substack{j>k\\ j,k=1}}^{N} q_{kj}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{ks}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{js}\Big)$$

$$=\Big[q_{12}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{1s}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{2s}\Big)+\dots+q_{1N}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{1s}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{Ns}\Big)\Big]$$

$$+\Big[q_{23}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{2s}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{3s}\Big)+\dots+q_{2N}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{2s}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{Ns}\Big)\Big]$$

$$+\dots+q_{N-1,N}\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{N-1,s}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{N} z_s\alpha_{Ns}\Big)\doteq\sum_{\mu,\nu=1}^{N} c_{\mu\nu}z_\mu z_\nu.$$

Коэффициенты $\{c_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=1}^N$ имеют следующие выражения:

$$c_{\mu\nu}=\alpha_{1\mu}(q_{12}\alpha_{2\nu}+\dots+q_{1N}\alpha_{N\nu})+\alpha_{2\mu}(q_{23}\alpha_{3\nu}+\dots+q_{2N}\alpha_{N\nu})+\dots+\alpha_{N-1,\mu}q_{N-1,N}\alpha_{N\nu}$$

$$(\mu,\nu=1,2,\dots,N).$$

Теперь переписываем квадратичную форму F_1+2F_2 в стандартном виде

$$F_1+2F_2=\sum_{\nu} a_{\nu\nu}z_\nu^2+\sum_{\nu\neq\mu} a_{\mu\nu}z_\mu z_\nu,$$

коэффициенты в котором выражаются следующим образом:

$$a_{\nu\nu}=\sum_{k=1}^{N} q_{kk}\alpha_{k\nu}^2+2\big[\alpha_{1\nu}(q_{12}\alpha_{2\nu}+\dots+q_{1N}\alpha_{N\nu})$$

$$+\alpha_{2\nu}(q_{23}\alpha_{3\nu}+\dots+q_{2N}\alpha_{N\nu})+\dots+\alpha_{N-1,\nu}q_{N-1,N}\alpha_{N\nu}\big]\quad(\nu=1,2,\dots,N);$$

$$a_{\mu\nu}=\left(\sum_{k=1}^{N} q_{kk}\alpha_{k\mu}\alpha_{k\nu}\right)+\alpha_{1\mu}(q_{12}\alpha_{2\nu}+\dots+q_{1N}\alpha_{N\nu})+\alpha_{2\mu}(q_{23}\alpha_{3\nu}+\dots+q_{2N}\alpha_{N\nu})$$

$$+\dots+\alpha_{N-1,\mu}q_{N-1,N}\alpha_{N\nu}\quad(\mu\neq\nu,\ \mu,\nu=1,2,\dots,N).$$

В результате приходим к задаче максимизации квадратичной формы $F=F_1+2F_2$ от переменных $\{z_k\}_{k=1}^N$ на ограниченном замкнутом множестве $\mathfrak{M}_N$. Покажем, что максимум достигается на его границе. Для этого воспользуемся следующим известным результатом.

Теорема A [12, p. 74]. *Пусть X — локально выпуклое вещественное пространство и $H \subset X$ — компактное выпуклое подмножество. Если вогнутая функция $f: H \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на H, то она достигает минимума на множестве H в некоторой его крайней точке.*

В нашем случае $X = l_2^N$, $H = \mathfrak{M}_N$ — компактное выпуклое подмножество в l_2^N, $f(z) = -K_{N,r}(z)$.

Нетрудно видеть, что $K_{N,r}(z)$ является выпуклой функцией. Действительно, в силу выпуклости множества $\mathfrak{M}_N$ для любых $z', z'' \in \mathfrak{M}_N$ и произвольного числа $\alpha \in [0,1)$ вектор $z = \alpha z' + (1-\alpha)z''$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}_N$, и пусть интерполяционные натуральные сплайны u_1, u_2 решают задачу 1 для интерполируемых данных z' и z'' соответственно. Тогда

$$K_{N,r}(\alpha z' + (1-\alpha)z'') \le \big\|\alpha u_1^{(r)} + (1-\alpha)u_2^{(r)}\big\|_2 \le \alpha\big\|u_1^{(r)}\|_2 + (1-\alpha)\big\|u_2^{(r)}\|_2$$
$$= \alpha K_{N,r}(z') + (1-\alpha)K_{N,r}(z').$$

Следовательно, функция $f(z) = -K_{N,r}(z)$ является вогнутой.

Покажем, что функция $K_{N,r}(z)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_N$. Пусть, как и выше, u_1, u_2 — экстремальные в смысле задачи 1 интерполянты для векторов z' и z'' из множества $\mathfrak{M}_N$, таких что $\|z' - z''\| \le \delta$. Функции u_1 и u_2 являются интерполяционными натуральными сплайнами. Применяя неравенство треугольника и воспользовавшись представлением (2.6) и линейной зависимостью коэффициентов сплайна от интерполируемых данных, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\big|K_{N,r}(z') - K_{N,r}(z'')\big| = \big|\big\|u_1^{(r)}\big\|_2 - \big\|u_2^{(r)}\big\|_2\big| \le \big\|u_1^{(r)} - u_2^{(r)}\big\|_2 = \big\|(u_1 - u_2)^{(r)}\big\|_2$$
$$\le C_r\Big[\sum_{k=1}^{N}(d_k' - d_k'')^2\, q_{kk} + 2\sum_{\substack{j>k\\ j,k=1}}^{N}(d_k' - d_k'')\,(d_j' - d_j'')|q_{jk}|\Big]^{1/2} \le \widetilde{C}\Big(\sum_{j=1}^{N}|d_j' - d_j''|^2\Big)^{1/2} < C\varepsilon.$$

Здесь $C_r, \widetilde{C}, C$ — положительные константы, не зависящие от интерполируемых данных. Таким образом, функция $K_{N,r}(z)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{M}_N$ и, в частности, полунепрерывна на нем снизу. Следовательно, функция $f(z) = -K_{N,r}(z)$ достигает минимума на множестве $\mathfrak{M}_N$ в некоторой его крайней точке, а потому функция $K_{N,r}(z)$ достигает максимума в той же крайней точке. Остается заметить, что совокупность крайних точек множества $\mathfrak{M}_N$ является его границей.

Таким образом, величина $(\mathfrak{B}_r(\Delta_N))^2$ с точностью до постоянного множителя $\Big(\dfrac{(2r-1)!}{(r-1)!}\,\dfrac{1}{\det A}\Big)^2$ совпадает со значением максимума квадратичной формы $F_1 + 2F_2$ на единичной сфере пространства l_2^N. Известно (см., например, [13, с. 476–477]), что решением такой задачи является максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы $Q = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ этой квадратичной формы, т. е. наибольший корень ее характеристического уравнения

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где I — единичная матрица. Поскольку матрица Q симметричная, число $\lambda_{\max}$ является вещественным, а так как $F_1 + 2F_2 \ge 0$, то $\lambda_{\max} > 0$. Для завершения доказательства теоремы 1 остается извлечь квадратный корень из полученного выражения для величины $(\mathfrak{B}_r(\Delta_N))^2$.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Для любой конкретной сетки Δ_N величину наибольшего собственного числа $\lambda_{\max}$ можно найти с помощью численных методов, а также оценить сверху и снизу (см., например, [14–16]).

З а м е ч а н и е 2. Экстремальный набор интерполируемых данных, который реализует точную верхнюю грань в задаче 2, можно найти (см., например, [13, с. 477]), решив относительно $z=\{z_j\}_{j=1}^N$ систему линейных уравнений $(Q-\lambda_{\max}I)z^T=0$, где z^T — вектор-столбец, образованный элементами $z_1,z_2,\dots,z_N$. Вообще говоря, это решение не единственно и выписать его явно не представляется возможным.

3. Некоторые частные случаи

Пусть $r=2$, т. е. интерполируем натуральными кубическими сплайнами. Непосредственными вычислениями получим значения величины $\mathfrak{B}_r(\Delta_N)$ для $N=3$ и $N=4$.

При $N=3$ имеем три точки интерполяции, одна из них — начальная точка промежутка, одна — конечная, и одна точка лежит внутри промежутка. В результате получаем

$$\mathfrak{B}_2(\Delta_3)=\frac{\sqrt6}{(b-x_2)(x_2-a)}\sqrt{\frac{(x_2-a)^2+(b-a)(b-x_2)}{b-a}};$$

при этом

$$\det A=4(b-x_2)^2(b-a)(x_2-a)^2>0.$$

При $N=4$ одна точка интерполяции является начальной точкой промежутка, одна — конечной, и две точки лежат внутри промежутка. С точностью до коэффициентов, не зависящих от z_1,z_2,z_3,z_4, матрица максимизируемой квадратичной формы $Q=(a_{ij})_{i,j=1}^4$, $a_{ij}=a_{ji}$, образована следующими элементами:

$$a_{11}=(b-x_3)^2\ (b-x_2)\ (x_3-x_2)^2,\quad a_{22}=(b-x_3)^2\ (b-a)\ (x_3-a)^2,$$

$$a_{33}=(b-x_2)^2\ (b-a)\ (x_2-a)^2,\quad a_{44}=(x_3-x_2)^2\ (x_3-a)\ (x_2-a)^2,$$

$$a_{12}=-\frac12(b-x_3)^2(x_3-x_2)(3ax_2-ax_3-2ab-x_2^2-x_2x_3+2x_3b),$$

$$a_{13}=-\frac12(b-x_3)(b-x_2)(x_3-x_2)(x_2-a)(x_2+x_3-2b),$$

$$a_{14}=-\frac12(b-x_3)(x_3-x_2)^3(x_2-a),$$

$$a_{23}=\frac12(x_3-x_2)^3(b-a)(x_2-a)(x_3^2+x_2^2+2ab-2ax_2-2bx_3),$$

$$a_{24}=\frac12(x_3-x_2)(x_3-a)(x_2-a)(b-x_3)(x_3+x_2-2a),$$

$$a_{34}=\frac12(x_2-a)^2(x_3-x_2)(x_3^2+x_2b+x_3x_2+2ab-2ax_2-3x_3b).$$

Нетрудно видеть, что

$$\det A=4(b-x_3)^2(x_3-x_2)(x_2-a)^2\ \big(4(b-x_2)(x_3-a)-(x_3-x_2)^2\big)$$

и $\det A$ положителен, поскольку $b-x_2>x_3-x_2,\ x_3-a>x_3-x_2$.

С помощью весьма трудоемких вычислений выписывается характеристическое уравнение, которое в этом случае является уравнением четвертой степени относительно λ. Оказывается, что у этого уравнения $\lambda=0$ — корень кратности 2, поэтому достаточно решить квадратное уравнение, а наибольшим из двух его корней является

$$\lambda_{\max}=\frac12\big(-B+\sqrt{B^2-4C}\big); \tag{3.1}$$

здесь

$$B = -(b-x_3)^2\ \big[(b-x_2)(x_3-x_2)^2+(b-a)(x_3-a)^2\big]-(x_2-a)^2\big[(b-x_2)^2(b-a)+(x_3-x_2)^2(x_3-a)\big],$$

$$C = \frac{1}{4}(b-x_3)^2(x_3-x_2)^2(x_2-a)^2\big[4(b-x_2)(x_3-a)-(x_3-x_2)^2\big]$$
$$\times\big[(x_2-a)^2+(x_3-a)^2+(b-a)^2+(x_3-x_2)^2+(b-x_2)^2+(b-x_3)^2\big].$$

Таким образом, приходим к следующему результату:

$$\mathfrak{B}_2(\Delta_4) = \frac{\sqrt{6}}{(b-x_3)(x_2-a)(x_3-x_2)}\sqrt{\frac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{4(b-x_2)(x_3-a)-(x_3-x_2)^2}}.$$

Если интерполирование происходит на равномерной сетке с шагом $h=\pi/N$, то при $N=3$ и $N=4$ имеем соответственно

$$\mathfrak{B}_2(\Delta_3) = C_1 N^{3/2}, \quad \mathfrak{B}_2(\Delta_4) = C_2 N^{3/2},$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные константы, не зависящие от N, значения которых можно найти непосредственными вычислениями.

Возможно, при $N\to\infty$ выполняется порядковое соотношение $\mathfrak{B}_2(\Delta_N)\sim N^{3/2}$, однако автору неизвестно, так ли это на самом деле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Holladay J.** A smoothest curve approximation // Math. Tables Aids Comput. 1957. Vol. 11. P. 233–243.
2. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
3. **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 120 с.
4. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближения // Serdika. Българско матем. списание. 1979. Т. 5. С. 83–96.
5. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. **Субботин Ю.Н., Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225
7. **Субботин Ю.Н., Шевалдин В.Т.** Экстремальная функциональная интерполяция в пространстве L_p на произвольной сетке числовой оси // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 4. С. 123–144. doi: 10.4213/sm9628
8. **Новиков С.И.** Периодическая интерполяция с минимальным значением нормы m-й производной // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 165–172.
9. **Schoenberg I.J.** On the best approximation of linear operators // Indagationes Mathem. 1964. Vol. 26, no 2. P. 155–163.
10. **Jerome J.W., Schumaker L.L.** A note on obtaining natural spline functions by the abstract approach of Atteia and Laurent // SIAM J. Numer. Anal. 1968. Vol. 5. P. 657–663.
11. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
12. **Holmes R.** Geometric functional analysis and its applications. N.Y. ect.: Springer Verlag, 1975. 246 p.
13. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
14. **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Изд-во “Лань”, 2009. 736 с.
15. **Пароди М.** Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. М.: Из-во иностр. литер., 1960. 170 с.
16. **Tarazaga P.** Eigenvalue estimates for symmetric matrices // Linear Algebra and its Appl. 1990. Vol. 135, no. 1. P. 171–179. doi: 10.1016/0024-3795(90)90120-2 .

Поступила 09.06.2023
После доработки 30.06.2023
Принята к публикации 3.07.2023

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Holladay J. A smoothest curve approximation. *Math. Tables Aids Comput.*, 1957, vol. 11, pp. 233–243.
2. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *The theory of splines and their applications.* NY, London: Acad. Press, 1967. Translated to Russian under the title *Teoriya splainov i ee prilozheniya*, Moscow: Mir Publ., 1972, 316 p.
3. Malozyomov V.N., Pevny A.B. *Polinomial'nye splainy* [Polynomial splines]. Leningrad, 1986, 120 p.
4. Tikhomirov V.M., Boyanov B.D. Some convex problems of approximation theory. *Serdica Bulgariacae mathematicae publicationes*, 1979, vol. 5, pp. 83–96 (in Russian).
5. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with the smallest n-th derivative. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1967, vol. 88, pp. 30–60 (in Russian).
6. Subbotin Yu.N., Novikov S.I., Shevaldin V.T. Extremal function interpolation and splines. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225
7. Subbotin Yu.N., Shevaldin V.T. Extremal functional L_p interpolation on an arbitrary mesh on the real axis. *Sb. Math.*, 2022, vol. 213, no. 4, pp. 556–577. doi: 10.1070/SM9628
8. Novikov S.I. Periodic interpolation with minimal norm of m-th derivative. *Sib. Zhurn. Vychis. Math.*, 2006, vol. 9, no. 2, pp. 165–172 (in Russian).
9. Schoenberg I.J. On the best approximation of linear operators. *Indagationes Mathem.* 1964. Vol. 26, no 2. P. 155–163.
10. Jerome J.W., Schumaker L.L. A note on obtaining natural spline functions by the abstract approach of Atteia and Laurent. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1968, vol. 5, pp. 657–663.
11. Prudnikov A.P., Brychkov A.Yu., Marichev O.L. *Integrals and series. Vol. 1: Elementary functions.* Boca Raton: CRC Press, 1998, 798 p. Original Russian text published in Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii. Moscow: Nauka Publ., 1981, 800 p.
12. Holmes R. *Geometric functional analysis and its applications.* NY ect.: Springer Verlag, 1975, 246 p.
13. Fichtenholz G.M. Fikhtenholtz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1970, 608 p.
14. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Vychislitel'nye metody lineinoi algebry* [Numerical methods in linear algebra]. St. Petersburg: "Lan'" Publ., 2009, 736 p.
15. Parodi M. *A localisation des valeurs caracteristiques des matrices et ses applications.* Paris: Gauthier — Villars, 1959. Translated to Russian under the title *Lokalizatsiya kharakteristicheskikh chisel matrits i ee primeneniya*, Moscow: Iz-vo Inostr. Liter. Publ., 1960, 170 p.
16. Tarazaga P. Eigenvalue estimates for symmetric matrices. *Linear Algebra and its Appl.*, 1990, vol. 135, no. 1, pp. 171–179. doi: 10.1016/0024-3795(90)90120-2

Received June 9, 2023
Revised June 30 2023
Accepted July 3, 2023

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. I. Novikov. Optimal interpolation on an interval with the smallest mean-square norm of the rth derivative. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 217–228 .