ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.542

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И ФАКТОРИЗУЕМЫЕ КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ[1]

В. И. Мурашко

Граф Хоукса $\Gamma_H(G)$ группы G — это ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$ и который имеет ребро (p,q), если $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Силовским графом $\Gamma_s(G)$ группы G называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$, и (p,q) является ребром $\Gamma_s(G)$, если $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$ для некоторой силовской p-подгруппы P группы G. N-критический граф $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G — ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$, такой, что (p,q) — ребро $\Gamma_{Nc}(G)$ всякий раз, когда G содержит (p,q)-подгруппу Шмидта, т. е. $\{p,q\}$-подгруппу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой. В статье изучаются графы Хоукса, силовские и N-критические графы произведений тотально перестановочных, взаимно перестановочных и $\mathfrak{N}$-связных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа; граф Хоукса; силовский граф; N-критический граф; произведение тотально перестановочных подгрупп; произведение взаимно перестановочных подгрупп; $\mathfrak{N}$-связные подгруппы.

V. I. Murashka. Arithmetic graphs and factorized finite groups.

The Hawkes graph $\Gamma_H(G)$ of a group G is the directed graph with vertex set $\pi(G)$ that has an edge (p,q) whenever $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. The Sylow graph $\Gamma_s(G)$ of a group G is the directed graph with vertex set $\pi(G)$ that has an edge (p,q) whenever $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$ for some Sylow p-subgroup P of G. The N-critical graph $\Gamma_{Nc}(G)$ of a group G is the directed graph with vertex set $\pi(G)$ that has an edge (p,q) whenever G contains a Schmidt (p,q)-subgroup, i.e., a Schmidt $\{p,q\}$-subgroup with a normal Sylow p-subgroup. The paper studies the Hawkes, Sylow, and N-critical graphs of products of totally permutable, mutually permutable, and $\mathfrak{N}$-connected subgroups.

Keywords: finite group, Hawkes graph, Sylow graph, N-critical graph, product of totally permutable subgroups, product of mutually permutable subgroups, $\mathfrak{N}$-connected subgroups.

MSC: 20D40

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-181-192

Посвящается 70-летию А.А. Махнева

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными, G всегда обозначает группу, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$. Если граф не имеет изолированных вершин, то мы будем определять его только по его ребрам.

Имеется много работ, начиная с 1878 г., в которых каждой группе ставится в соответствие определенный граф и изучается связь геометрии графа со свойствами группы (например, см. [1–10] и др.). Среди таких графов есть интересное семейство арифметических графов, т. е. графов, вершины которых являются простыми делителями порядка группы.

В 1968 г. Хоукс [4] ввел ориентированный граф $\Gamma_H(G)$ группы G, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$ и который имеет ребро (p,q), когда $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Этот граф обладает многими интересными свойствами [4; 9; 11]. Например (см. [4], если в нем нет петли (p,p), то p-длина G не превосходит 1.

Напомним [5; 12], что силовский граф $\Gamma_s(G)$ группы G — это ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$, а (p,q) — ребро графа $\Gamma_s(G)$ всякий раз, когда $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$

[1]Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-237).

для некоторой силовской p-подгруппы P группы G. Приложения и свойства этого графа можно найти в работах [5; 9; 12; 13]. В частности, (см. [13]), каждая компонента связности $\Gamma_s(G)$ соответствует нормальной холловской подгруппе группы G. Некоторые открытые проблемы, связанные с силовским графом, можно найти в работе [8].

Отметим, что (p,q)-группа Шмидта — это группа Шмидта (т. е. ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны) G с $\pi(G) = \{p, q\}$ и нормальной силовской p-подгруппой. N-критическим [9] графом $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G называется ориентированный граф, множество вершин которого совпадает с $\pi(G)$, такой, что (p,q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если G содержит (p,q)-подгруппу Шмидта. Свойства этого графа и его приложения можно найти в работах [9; 14].

Из вышесказанного следует, что арифметическме графы несут важную информацию о строении группы. Естественной является задача вычисления (арифметического) графа группы по известным графам ее системы подгрупп. Данная работа посвящена решению указанной задачи для графов Хоукса, силовского и N-критического, когда в качестве системы подгрупп выступают подгруппы, факторизующие группу, с дополнительными условиями: тотальной перестановочности факторов, взаимной перестановочности факторов и $\mathfrak{N}$-связности факторов.

Напомним, что $\mathfrak{N}$ обозначает класс всех нильпотентных групп. Согласно [15] подгруппы H и K называются $\mathfrak{N}$-связными, если $\langle x, y\rangle \in \mathfrak{N}$ для каждого $x \in H$ и $y \in K$. Произведения $\mathfrak{N}$-связных подгрупп изучались в работах [15–17] и др. Нами получена

Теорема 1. *Пусть группа G является произведением попарно перестановочных и $\mathfrak{N}$-связных подгрупп $G_1, \dots, G_n$. Тогда*

$$\Gamma_s(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_s(G_i), \Gamma_H(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_H(G_i), \Gamma_{Nc}(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_{Nc}(G_i).$$

Отметим, что $G = AB$ называется произведением тотально перестановочных подгрупп A и B, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B. Асаад и Шаалан (см. [18, гл. 4]) доказали, что произведение двух тотально перестановочных сверхразрешимых подгрупп также является сверхразрешимым. Этот результат положил начало изучению произведений тотально перестановочных формационных подгрупп (см., например, [18, гл. 4]). Нами доказана

Теорема 2. *Пусть группа G является произведением попарно тотально перестановочных подгрупп $G_1, \dots, G_n$ и $\Gamma(G) = \{(p,q) \mid p, q \in \pi(G), q \in \pi(p-1)\}$. Тогда*

$$\Gamma_s(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_s(G_i) \cup \Gamma(G), \Gamma_H(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_H(G_i) \cup \Gamma(G) \text{ и } \Gamma_{Nc}(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_{Nc}(G_i) \cup \Gamma(G).$$

П р и м е р 1. Симметрическая группа S_3 степени 3 является произведением тотально перестановочных циклических групп Z_3 и Z_2 порядков 3 и 2 соответственно. Заметим, что $(3,2)$ — единственное ребро силовского графа, графа Хоукса и N-критического графа S_3, а силовские графы, графы Хоукса и N-критические графы групп Z_3 и Z_2 не имеют ребер. Таким образом, $\Gamma(S_3) \not\subseteq \Gamma(Z_3) \cup \Gamma(Z_2)$ для $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$.

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 1 и 2 следуют из более общего результата (см. теорему 5).

Напомним [18, определение 4.1.1], что группа G называется произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B, если $G = AB$, A перестановочна с каждой подгруппой группы B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Произведения взаимно перестановочных подгрупп широко изучаются в настоящее время [18, гл. 4]. Нами доказана

Теорема 3. *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B, $\Gamma(A,B) = \{(p,q) \mid p \in \pi(A), q \in \pi(B) \cap \pi(p-1)$ или $p \in \pi(B), q \in \pi(A) \cap \pi(p-1)\}$. Тогда*

$$\Gamma_{Nc}(A) \cup \Gamma_{Nc}(B) \subseteq \Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(A) \cup \Gamma_{Nc}(B) \cup \Gamma(A,B) \text{ и}$$

$$\Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \subseteq \Gamma_H(G) \subseteq \Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \cup \Gamma(A,B) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G)\}.$$

П р и м е р 2. Заметим, что симметрическая группа S_4 степени 4 является произведением взаимно перестановочных своей силовской 2-подгруппы P и знакопеременной группы A_4 степени 4. Заметим также, что $E(\Gamma_H(P)) = \emptyset, E(\Gamma_H(A_4)) = \{(2,3)\}, E(\Gamma(P, A_4)) = \{(3,2)\}$ и $E(\Gamma_H(S_4)) = \{(2,2),(2,3),(3,2)\}$. Следовательно, $\Gamma_H(S_4) \not\subseteq \Gamma_H(P) \cup \Gamma_H(A_4) \cup \Gamma(P, A_4)$.

Напомним [19], что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией с условием Шеметкова, если каждая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа является группой Шмидта или группой простого порядка. С различными свойствами и применением таких формаций можно ознакомиться в [20, гл. 6.4].

Следствие 1. *Наследственная формация $\mathfrak{F}$ с условием Шеметкова замкнута относительно произведений взаимно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп тогда и только тогда, когда она содержит все сверхразрешимые $\pi(\mathfrak{F})$-группы Шмидта.*

Следствие 2 [21, теорема 2]. *Пусть p — простое число, а π — p-специальное множество простых чисел (т. е. $q \notin \pi$ всякий раз, когда p делит $q(q-1)$). Если группа G — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B, являющихся нормальными расширениями p-групп π-группами, то и группа G обладает этим свойством.*

Нами получен следующий аналог теоремы 3 для произведений n разрешимых групп.

Теорема 4. *Пусть группа G является произведением попарно взаимно перестановочных разрешимых подгрупп $G_1, \dots, G_n$ и $\Gamma(G_i, G_j)$ определяется так же, как и в теореме (3) . Тогда*

$$\Gamma_H(G) \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} \Gamma_H(G_i) \cup \bigcup_{1\le i,j\le n, i\ne j} \Gamma(G_i, G_j) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G)\} \text{ и}$$

$$\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} \Gamma_{Nc}(G_i) \cup \bigcup_{1\le i,j\le n, i\ne j} \Gamma(G_i, G_j).$$

Следующий результат для $n = 2$ был доказан в [22, следствие 7].

Следствие 3. *Пусть группа G является произведением попарно взаимно перестановочных подгрупп $G_1, \dots, G_n$. Если каждая подгруппа Шмидта в $G_1, \dots, G_n$ сверхразрешима, то и любая подгруппа Шмидта в G сверхразрешима.*

1. Предварительные результаты

Используются следующие обозначения: $\pi(n)$ — множество простых делителей числа n; $\pi(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G)$; S_n и A_n — симметрическая и знакопеременная группы степени n соответственно; Z_n — циклическая группа порядка n; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; $\mathrm{O}_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G для множества простых чисел π. Если $\pi = \{p\}$, то $\mathrm{O}_\pi(G)$ обозначается $\mathrm{O}_p(G)$. Если $\pi = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, то $\mathrm{O}_\pi(G)$ обозначается $\mathrm{O}_{p'}(G)$; $\mathrm{O}_{p',p}(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. Ее можно определить как $\mathrm{O}_{p',p}(G)/\mathrm{O}_{p'}(G) = \mathrm{O}_p(G/\mathrm{O}_{p'}(G))$.

Напомним, что (ориентированный) граф Γ — это пара множеств $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$, где $V(\Gamma)$ — множество вершин Γ и $E(\Gamma)$ — множество ребер Γ, т.е. множество упорядоченных пар элементов из $V(\Gamma)$. Ребро (v,v) называется петлей. Два графа Γ_1 и Γ_2 называются равными (обозначается $\Gamma_1 = \Gamma_2$), если $V(\Gamma_1) = V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma_1) = E(\Gamma_2)$. Граф Γ_1 называется подграфом Γ_2 (обозначается $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$), если $V(\Gamma_1) \subseteq V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma_1) \subseteq E(\Gamma_2)$. Граф Γ называется объединением графов Γ_1 и Γ_2 (обозначается $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$), если $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2)$.

Пусть $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$ и $\mathfrak{X}$ — класс групп. По [9, определение 3.1]

$$\Gamma(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{X}} \Gamma(G).$$

Лемма 1 [9, определение 2.6, теорема 2.7]. *Пусть G — группа. Тогда*

1. *Если $\Gamma \in \{\Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$, то $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(G)$ для любой $H \leq G$.*
2. *Если $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$, то $\Gamma(G/N) \subseteq \Gamma(G)$ для любой $N \trianglelefteq G$.*
3. *Если $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$, то $\Gamma(G/N_1) \cup \Gamma(G/N_2) = \Gamma(G)$ для любых $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ таких, что $N_1 \cap N_2 = 1$.*
4. *Если $\Gamma \in \{\Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$, то $\Gamma(N_1) \cup \Gamma(N_2) = \Gamma(G)$ для любых $N_1, N_2 \trianglelefteq G$.*
5. *Если $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$, то $\Gamma(G_1 \times \cdots \times G_n) = \Gamma(G_1) \cup \cdots \cup \Gamma(G_n)$ для любых групп $G_1, \ldots, G_n$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Заметим, что главный фактор H/K группы G называется *$\mathfrak{X}$-центральным* (см. [23, с. 127–128]) в G, если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ группы H/K с $G/C_G(H/K)$, соответствующее действию группы G сопряжением на H/K, принадлежит $\mathfrak{X}$. *$\mathfrak{X}$-гиперцентр* $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ группы G — это наибольшая нормальная подгруппа группы G такая, что каждый главный фактор группы G ниже ее является $\mathfrak{X}$-центральным (эта подгруппа существует по [23, лемма 14.1]). Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, то $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}}(G)$ — гиперцентр $\mathrm{Z}_\infty(G)$ группы G.

2. Произведения групп с $\mathfrak{F}$-гиперцентральным условием для коммутаторов

Напомним [17, предложение 1 (8)], что если $G = G_1 \ldots G_n$ — произведение попарно перестановочных и $\mathfrak{N}$-связных подгрупп, то $[G_i, \prod_{j=1, j\neq i}^n G_j] \leq \mathrm{Z}_\infty(G)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Согласно [18, лемма 4.2.12], если $G = G_1 \ldots G_n$ — произведение тотально перестановочных подгрупп, то $[G_i, \prod_{j=1, j\neq i}^n G_j] \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{U}}(G)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, где $\mathfrak{U}$ обозначает класс всех сверхразрешимых групп. Эти наблюдения приводят нас к следующему определению.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что G является произведением подгрупп G_1, $G_2 \ldots, G_n$ с $\mathfrak{F}$-гиперцентральным условием для коммутаторов, если $G = G_1 \ldots G_n$, G_iG_j является подгруппой G для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $[G_i, \prod_{j=1, j\neq i}^n G_j] \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Основное свойство произведений с $\mathfrak{F}$-гиперцентральным условием для коммутаторов состоит в следующем.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. Если группа G является произведением подгрупп $G_1, \ldots, G_n$ с $\mathfrak{F}$-гиперцентральным условием для коммутаторов, то*

$$G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \simeq G_1/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_1) \times \cdots \times G_n/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) $\overline{H}_i = G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \cap (\prod_{j=1, j\neq i}^n G_j)\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \simeq 1$ для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Так как G удовлетворяет условию $\mathfrak{F}$-гиперцентральности для коммутаторов, мы видим, что каждый элемент $\overline{H}_i$ коммутирует с каждым элементом

$$G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \;\text{ и }\; \Big(\prod_{j=1, j\neq i}^n G_j\Big)\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G).$$

Следовательно, он коммутирует с каждым элементом $G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Поэтому $\overline{H}_i \leq \mathrm{Z}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G))$. Из $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathrm{Z}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \simeq 1$. Таким образом, $\overline{H}_i \simeq 1$.

(b) $G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \trianglelefteq G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Так как G удовлетворяет условию $\mathfrak{F}$-гиперцентральности для коммутаторов, мы видим, что каждый элемент $G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ коммутирует с каждым элементом $(\prod_{j=1, j\neq i}^n G_j)\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Теперь из $G = G_1 \ldots G_n$ следует, что $G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \trianglelefteq G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.

(c) $G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \simeq G_1/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_1) \times \cdots \times G_n/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_n)$.

Из (a) и (b) следует, что

$$G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = G_1\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \times \cdots \times G_n\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G).$$

Заметим, что каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор $G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ является $\mathfrak{F}$-центральным главным фактором и $G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Из $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \simeq 1$ следует, что

$$\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \simeq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i/(G_i \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G))) \simeq 1.$$

Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, мы видим, что $G_i \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i)$ по [24, лемма 2.4 (iii)]. Теперь из $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i/(G_i \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G))) \simeq 1$ получаем, что $G_i \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i)$. Таким образом,

$$G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \simeq G_1/(G_1 \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \times \cdots \times G_n/(G_n \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_n)) \simeq G_1/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_1) \times \cdots \times G_n/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_n). \quad \square$$

Обозначим через $\Gamma(\mathfrak{F})_{|G}$ индуцированный подграф графа $\Gamma(\mathfrak{F})$ на $\pi(G)$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_{Nc}, \Gamma_H\}$ и G — группа. Тогда*

$$\Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \Gamma(G) \subseteq \Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}.$$

Доказательство. Из п. 2 леммы 1 следует, что $\Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \Gamma(G)$. Предположим, что существует группа G с $\Gamma(G) \not\subseteq \Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}$. Заметим, что $V(\Gamma(G)) = V(\Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G})$. Следовательно, существует $(p,q) \in E(\Gamma(G)) \setminus E(\Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G})$.

Пусть $\Gamma = \Gamma_{Nc}$. Тогда существует (p,q)-подгруппа Шмидта H группы G такая, что $H \notin \mathfrak{F}$. Из $\Gamma_{Nc}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \Gamma_{Nc}(G)$ следует, что $H\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \simeq H/H \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ нильпотентна. Поскольку формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, $H \cap \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \leq \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(H)$ по [24, лемма 2.4 (iii)]. Из $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $H\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Поэтому $H \in \mathfrak{F}$; противоречие. Таким образом, $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})_{|G}$.

Пусть $\Gamma = \Gamma_s$. Тогда существует элемент x группы G, который индуцирует автоморфизмы порядка q^α на силовской p-подгруппе P группы G. Не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что x является q-элементом группы G. Заметим, что $x\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ действует тривиально на силовской p-подгруппе $P\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ группы $G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $P\langle x\rangle\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ — нильпотентная группа. По аналогии с предыдущим абзацем $P\langle x\rangle\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Отсюда $(p,q) \in \Gamma_s(\mathfrak{F})$; противоречие.

Пусть $\Gamma = \Gamma_H$. Из [9, предложение 2.3 (1)] следует, что существует главный фактор H/K группы G ниже $\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ с $p \in \pi(H/K)$ и $q \in \pi(G/C_G(H/K))$. Из $(H/K) \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ следует, что $(p,q) \in \Gamma_H(\mathfrak{F})$; противоречие.

Таким образом, $\Gamma_H(G) \subseteq \Gamma_H(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma_H(\mathfrak{F})_{|G}$. $\square$

Основным результатом этого раздела является

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация с $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_{Nc}, \Gamma_H\}$. Если группа G является произведением подгрупп $G_1, \ldots, G_n$ с $\mathfrak{F}$-гиперцентральным условием для коммутаторов, то*

$$\Gamma(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma(G_i) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}.$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G) \simeq G_1/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_1) \times \cdots \times G_n/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_n)$. Тогда $\Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma(G_i/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i))$ по п. 5 леммы 1. Заметим, что $\Gamma(\mathfrak{F})_{|G_i} \subseteq \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}$. Поэтому по лемме 3

$$\Gamma(G) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G} = \Gamma(G/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G} = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma(G_i/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n}(\Gamma(G_i/\mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G_i)) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G_i}) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G} = \bigcup_{i=1}^{n}(\Gamma(G_i) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G_i}) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G} = \bigcup_{i=1}^{n}\Gamma(G_i) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}.$$

Итак, $\Gamma(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\Gamma(G_i) \cup \Gamma(\mathfrak{F})_{|G}$.

Теорема доказана.

Лемма 4. *Если группа G имеет силовскую башню (дисперсивна), то $\Gamma_s(G) = \Gamma_{Nc}(G) = \Gamma_H(G)$.*

Доказательство. Согласно [9, предложение 2.4] $\Gamma_s(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_H(G)$ для любой группы G. Следовательно, нам нужно только доказать, что $\Gamma_s(G) = \Gamma_H(G)$ для группы G, обладающей силовской башней. Предположим противное, пусть группа G имеет силовскую башню и является контрпримером минимального порядка. Поскольку $V(\Gamma_H(G)) = V(\Gamma_s(G)) = \pi(G)$, мы видим, что существует $(p,q) \in E(\Gamma_H(G)) \setminus E(\Gamma_s(G))$. Так как G имеет силовскую башню, очевидно, что $\mathrm{O}_{p',p}(G)$ содержит все силовские p-подгруппы группы G. Поэтому $p \neq q$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Напомним, что класс групп, имеющих силовскую башню, замкнут относительно взятия эпиморфных образов. Следовательно, G/N имеет силовскую башню. Из $|G/N| < |G|$ и нашего предположения следует, что $\Gamma_s(G/N) = \Gamma_H(G/N)$, в частности $(p,q) \notin E(\Gamma_H(G))$. Если G имеет две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то $\Gamma_s(G) = \Gamma_s(G/N_1) \cup \Gamma_s(G/N_2) = \Gamma_H(G/N_1) \cup \Gamma_H(G/N_2) = \Gamma_H(G)$ по лемме 1; противоречие. Таким образом, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Поскольку G разрешима, N является r-группой для некоторого простого числа r. Если $r \neq p$, то $\mathrm{O}_{p',p}(G/N) = \mathrm{O}_{p',p}(G)/N$. Отсюда $(p,q) \in E(\Gamma_H(G/N))$; противоречие. Теперь $r = p$. Поскольку G имеет силовскую башню и единственную минимальную нормальную подгруппу N, мы видим, что силовская p-подгруппа P группы G нормальна в G. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G. Тогда $Q \leq N_G(P)$. Из $(p,q) \notin E(\Gamma_s(G))$ следует, что $Q \leq C_G(P)$. Тогда $Q \leq C_G(H/K)$, где H/K — главный p-фактор группы G. Напомним, что $\mathrm{O}_{p',p}(G)$ есть пересечение централизаторов всех главных p-факторов группы G. Итак, $Q \leq \mathrm{O}_{p',p}(G)$. Таким образом, $(p,q) \notin E(\Gamma_H(G))$; заключительное противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 4 следует, что $\Gamma_s(\mathfrak{N}) = \Gamma_{Nc}(\mathfrak{N}) = \Gamma_H(\mathfrak{N})$. Заметим, что $V(\Gamma_H(\mathfrak{N})) = \mathbb{P}$ и $E(\Gamma_H(\mathfrak{N})) = \varnothing$. Пусть $\Gamma \in \{\Gamma_s, \Gamma_{Nc}, \Gamma_H\}$. Тогда из доказательства теоремы 5 следует, что

$$\Gamma(G) = \Gamma(G) \cup \Gamma(\mathfrak{N})_{|G} = \bigcup_{i=1}^{n}\Gamma(G_i) \cup \Gamma(\mathfrak{N})_{|G} = \bigcup_{i=1}^{n}\Gamma(G_i).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 4 следует, что $\Gamma_s(\mathfrak{U}) = \Gamma_{Nc}(\mathfrak{U}) = \Gamma_H(\mathfrak{U})$. Заметим, что $V(\Gamma_H(\mathfrak{U})) = \mathbb{P}$. Хорошо известно, что группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G/\mathrm{O}_{p',p}(G)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Следовательно, $E(\Gamma_H(\mathfrak{U})) \subseteq \{(p,q) \mid q \in \pi(p-1)\}$. С другой стороны, если $q \in \pi(p-1)$, то циклическая группа Z_p порядка p обладает степенным автоморфизмом порядка q. Тогда $H = Z_p \rtimes Z_q$ сверхразрешима и $q \in \pi(H/\mathrm{O}_{p',p}(H))$. Таким образом, $E(\Gamma_H(\mathfrak{U})) = \{(p,q) \mid q \in \pi(p-1)\}$. Итак, теорема 2 непосредственно следует из теоремы 5.

Теорема доказана.

3. Доказательство теорем 3 и 4

В доказательстве теоремы 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть P — силовская p-подгруппа (p,q)-подгруппы Шмидта S группы G. Если A — подгруппа в G с $P \le A$ и $G = AC_G(P)$, то A содержит (p,q)-подгруппу Шмидта.*

Доказательство. Пусть Q — силовская q-подгруппа в S, тогда $Q = \langle x\rangle$ — циклическая группа. Поскольку $G = AC_G(P) = C_G(P)A$, существуют $y \in A$ и $z \in C_G(P)$ с $x = zy$. Тогда $P = P^x = P^y$. Это означает, что $P \trianglelefteq P\langle y\rangle \le A$. Предположим, что A не содержит (p,q)-группы Шмидта. Теперь $P\mathrm{O}_q(\langle y\rangle)$ является p-замкнутой $\{p,q\}$-группой без (p,q)-подгрупп Шмидта. Поэтому $P\mathrm{O}_q(\langle y\rangle)$ нильпотентна. Следовательно, $\langle y_1\rangle = \mathrm{O}_q(\langle y\rangle) \le C_G(P)$. Пусть $y_2 = \mathrm{O}_{q'}(\langle y\rangle)$. Итак, $y = y_1y_2$. Хорошо известно, что $C_G(P) \trianglelefteq N_G(P)$. Заметим, что $x, y \in N_G(P)$. Значит, $\langle x\rangle C_G(P)/C_G(P)$ — нетривиальная q-группа. С другой стороны, $\langle x\rangle C_G(P)/C_G(P) = \langle zy_1y_2\rangle C_G(P)/C_G(P) = \langle y_2\rangle C_G(P)/C_G(P)$ является q'-группой; противоречие. □

Доказательство теоремы 3. I. Докажем, что $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(A)\cup\Gamma_{Nc}(B)\cup\Gamma(A,B)$. Заметим, что $\Gamma_{Nc}(A)\cup\Gamma_{Nc}(B) \subseteq \Gamma_{Nc}(G)$ по лемме 1.

Предположим, что утверждение $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(A)\cup\Gamma_{Nc}(B)\cup\Gamma(A,B)$ неверно. Выберем группу G минимального порядка такую, что G является произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B и $\Gamma_{Nc}(G) \not\subseteq \Gamma_{Nc}(A)\cup\Gamma_{Nc}(B)\cup\Gamma(A,B)$. Это означает, что существует $(p,q) \notin E(\Gamma_{Nc}(A)\cup\Gamma_{Nc}(B)\cup\Gamma(A,B))$ такое, что $(p,q) \in E(\Gamma_{Nc}(G))$. Следовательно, G имеет (p,q)-подгруппу Шмидта S.

Поскольку $A_GB_G \ne 1$ по [18, теорема 4.3.11], не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что A_G содержит минимальную нормальную подгруппу N группы G.

Тогда $G/N = (A/N)(BN/N)$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A/N и BN/N по [18, лемма 4.1.10]. Следовательно,

$$\Gamma_{Nc}(G/N) \subseteq \Gamma_{Nc}(A/N)\cup\Gamma_{Nc}(BN/N)\cup\Gamma(A/N, BN/N).$$

Заметим, что $BN/N \simeq B/(B\cap N)$. Значит, $\Gamma_{Nc}(A/N) \subseteq \Gamma_{Nc}(A)$ и $\Gamma_{Nc}(BN/N) = \Gamma_{Nc}(B/(B\cap N)) \subseteq \Gamma_{Nc}(B)$ по лемме 1. По определению $\Gamma(A,B)$ мы видим, что $\Gamma(A/N, BN/N) = \Gamma(A/N, B/(B\cap N)) \subseteq \Gamma(A,B)$. Теперь $\Gamma_{Nc}(G/N) \subseteq \Gamma_{Nc}(A)\cup\Gamma_{Nc}(B)\cup\Gamma(A,B)$. Итак, $(p,q) \notin E(\Gamma_{Nc}(G/N))$. Следовательно, SN/N не является группой Шмидта. Значит, $S\cap N$ содержит силовскую p-подгруппу P_0 группы S. Обозначим силовскую q-подгруппу группы S через Q_0.

Предположим, что $N \le A\cap B$. Существуют силовские q-подгруппы Q, Q_1 и Q_2 групп G, A и B соответственно такие, что $Q = Q_1Q_2$. Заметим, что существует $x \in G$ с $Q_0 \le Q^x$. Теперь $S \le NQ^x = (NQ_1)^x(NQ_2)^x$. Пусть $T = NQ^x$, $H = (NQ_1)^x$ и $K = (NQ_2)^x$. Из $\Gamma_{Nc}(H) = \Gamma_{Nc}(NQ_1) \subseteq \Gamma_{Nc}(A)$ и $\Gamma_{Nc}(K) = \Gamma_{Nc}(NQ_2) \subseteq \Gamma_{Nc}(B)$ следует, что $(p,q) \notin E(\Gamma_{Nc}(H)\cup\Gamma_{Nc}(K))$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы N с $P_0 \le P$. По лемме Фраттини $H = NN_H(P)$. Итак, существует q-подгруппа Q_3 группы $N_H(P)$ с $H = NQ_3$. Заметим, что PQ_3 является p-замкнутой $\{p,q\}$-группой без (p,q)-подгрупп Шмидта. Это означает, что PQ_3 нильпотентна. Следовательно, $Q_3 \le C_H(P)$. Поэтому $H = NC_H(P)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $K = NC_K(P)$. Итак, $T = NC_T(P)$. Теперь N содержит (p,q)-группу Шмидта по лемме 5; противоречие.

Предположим теперь, что $N \not\le A\cap B$. Это означает, что $N\cap B = 1$ по [18, лемма 4.3. (4)]. Предположим, что $B \le C_G(N)$. Тогда A имеет (p,q)-группу Шмидта по лемме 5; противоречие. Таким образом, $B \not\le C_G(N)$. Значит, N — циклическая группа и $A \le C_G(N)$ по [18, лемма 4.3.3 (5)]. Поскольку $G = AB = C_G(N)(NB)$, мы видим, что NB содержит (p,q)-группу Шмидта по лемме 5. Поэтому $q \in \pi(NB/C_{NB}(N)) \subseteq \pi(B)$. Так как N — циклическая p-группа, то $NB/C_{NB}(N) \simeq G/C_G(N)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Следовательно, $(p,q) \in E(\Gamma(A,B))$; заключительное противоречие.

II. Докажем, что $\Gamma_H(G) \subseteq \Gamma_H(A)\cup\Gamma_H(B)\cup\Gamma(A,B)\cup\{(p,p) \mid p \in \pi(G)\}$. Заметим, что $\Gamma_H(A)\cup\Gamma_H(B) \subseteq \Gamma_H(G)$ по лемме 1.

Предположим, что утверждение $\Gamma_H(G) \subseteq \Gamma_H(A)\cup\Gamma_H(B)\cup\Gamma(A,B)\cup\{(p,p) \mid p \in \pi(G)\}$ ложно. Выберем группу минимального порядка G такую, что G является произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B и $\Gamma_H(G) \not\subseteq \Gamma_{Nc}(A) \cup \Gamma_{Nc}(B) \cup \Gamma(A,B) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G)\}$. Это означает, что существует $(p,q) \notin E(\Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \cup \Gamma(A,B) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G)\})$ такие, что $(p,q) \in E(\Gamma_H(G))$. В частности, $p \neq q$.

Не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что A содержит минимальную нормальную подгруппу N группы G по [18, теорема 4.3.11]. Тогда $G/N = (A/N)(BN/N)$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A/N и BN/N по [18, лемма 4.1.10]. Следовательно, $\Gamma_H(G/N) \subseteq \Gamma_H(A/N) \cup \Gamma_H(BN/N) \cup \Gamma(A/N, BN/N) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G/N)\}$. Заметим, что $\Gamma_H(A/N) \subseteq \Gamma_H(A)$, $\Gamma_H(BN/N) \subseteq \Gamma_H(B)$ по лемме 1 и $\Gamma(A/N, BN/N) \subseteq \Gamma(A,B)$. Значит, $\Gamma_H(G/N) \subseteq \Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \cup \Gamma(A,B) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G)\}$. Итак, $(p,q) \notin E(\Gamma_H(G/N))$. Из п. 3 леммы 1 и нашего предположения следует, что N должна быть единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Если $\Phi(G) \not\simeq 1$, то аналогичные рассуждения показывают, что $(p,q) \notin E(\Gamma_H(G/\Phi(G)))$. Отметим, что $\Gamma_H(G/\Phi(G)) = \Gamma_H(G)$ по [9, теорема 2.7]; противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$. Таким образом, G — примитивная группа с $C_G(N) \leq N$.

Если N является p'-группой, то

$$\mathrm{O}_{p',p}(G/N) = \mathrm{O}_{p',p}(G)/N \quad \text{и} \quad G/\mathrm{O}_{p',p}(G) \simeq (G/N)/\mathrm{O}_{p',p}(G/N).$$

Отсюда $(p,q) \in E(\Gamma_H(G/N))$; противоречие. Теперь $p \in \pi(N)$. Поэтому $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$. Предположим, что $N \leq A \cap B$. Следовательно, $\mathrm{O}_{p'}(A) = \mathrm{O}_{p'}(B) = 1$. Тогда $(\pi(A) \setminus \{p\}) \subseteq \pi(A/\mathrm{O}_{p',p}(A))$ и $(\pi(B) \setminus \{p\}) \subseteq \pi(B/\mathrm{O}_{p',p}(B))$. Это означает, что $(p,q) \in E(\Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B))$; противоречие. Ввиду этого $N \not\leq A \cap B$. Следовательно, $N \cap B = 1$ по [18, лемма 4.3.3 (4)].

Теперь либо $A \leq C_G(N)$, либо $B \leq C_G(N)$ по [18, лемма 4.3.3 (5)]. Если $B \leq C_G(N)$, то из $C_G(N) \leq N \leq A$ следует, что $A = G$, и $(p,q) \in E(\Gamma_H(A))$; противоречие. Таким образом, $B \not\leq C_G(N)$. В этом случае N — циклическая группа и $A \leq C_G(N)$ по [18, лемма 4.3.3 (5)]. Следовательно, $N \leq A \leq C_G(N) \leq N$. Таким образом, $N = C_G(N) = A$ — циклическая группа порядка p. В этом случае G/N — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$. Из того, что $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$, следует, что $\mathrm{O}_{p',p}(G) = N$. Следовательно, $\pi(G/\mathrm{O}_{p',p}(G)) \subseteq \pi(p-1)$. Значит, $q \in \pi(p-1)$. Таким образом, $(p,q) \in E(\Gamma(A,B))$; окончательное противоречие.

Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация с условием Шеметкова. Тогда $\mathfrak{F} = (G \mid \Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))$ по [9, предложение 3.2, теоремы 4.2 и 4.4]. Предположим, что $\mathfrak{F}$ замкнута относительно произведений взаимно перестановочных подгрупп. Пусть G — сверхразрешимая $\pi(\mathfrak{F})$-группа Шмидта. Тогда $G/\Phi(G)$ — взаимно перестановочное произведение групп Z_p и Z_q порядков p и q для некоторых $p, q \in \pi(\mathfrak{F})$ с $q \in \pi(p-1)$. Следовательно, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как класс разрешимых $\mathfrak{F}$-групп насыщен [20, следствие 6.4.5], $G \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ содержит любую сверхразрешимую $\pi(\mathfrak{F})$-группу Шмидта.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ содержит любую сверхразрешимую $\pi(\mathfrak{F})$-группу Шмидта. Следовательно, $(p,q) \in E(\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))$ для любых $p, q \in \pi(\mathfrak{F})$ с $q \in \pi(p-1)$. Значит, если $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп A и B, то $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})$ по теореме 3. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно произведений взаимно перестановочных подгрупп. □

Доказательство следствия 2. Пусть π — p-специальное множество простых чисел, а $\mathfrak{F}$ — класс нормальных расширений p-групп с помощью π-групп. Тогда $2, p \notin \pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является формацией всех p-замкнутых $\pi(\mathfrak{F})$-групп. Предположим, что существует неразрешимая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа G. Из леммы 1 и [9, предложение 6.1] следует, что G содержит $(q,2)$-подгруппу Шмидта S для некоторого простого числа q. Отсюда $S \in \mathfrak{F}$; противоречие с определением $\mathfrak{F}$. Напомним, что минимальная не p-замкнутая разрешимая группа является (q,p)-группой Шмидта для некоторого простого числа q. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — формация с условием Шеметкова. Заметим, что $\mathfrak{F}$ содержит каждую сверхразрешимую $\pi(\mathfrak{F})$-группу. Таким образом, $\mathfrak{F}$ замкнута относительно произведений взаимно перестановочных подгрупп по следствию 1. □

В доказательстве теоремы 4 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть G — разрешимая группа и $n \geq 3$. Если $G = G_1 \ldots G_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп $G_1, \ldots, G_n$, то*

$$\Gamma_{Nc}(G) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma_{Nc}(G_iG_j).$$

Доказательство. Предположим, что $n = 3$, тогда $G = (G_1G_2)(G_1G_3) = (G_1G_2)(G_2G_3) = (G_1G_3)(G_2G_3)$. Следовательно, $\Gamma_{Nc}(G) = \Gamma_{Nc}(G_1G_2) \cup \Gamma_{Nc}(G_1G_3) \cup \Gamma_{Nc}(G_2G_3)$ по [9, теорема 7.1 (1)]. Предположим, что мы доказали лемму 6 для всех n с $3 \leq n \leq k$, докажем ее и для $n = k+1$. Пусть $H_l = \prod_{j=1, j \neq l}^{n}$. Тогда по нашему предположению

$$\Gamma_{Nc}(H_l) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n, i,j \neq l} \Gamma_{Nc}(G_iG_j).$$

Из $G = H_1H_2 = H_1H_3 = H_2H_3$ и [9, теорема 7.1 (1)] следует, что

$$\Gamma_{Nc}(G) = \Gamma_{Nc}(H_1) \cup \Gamma_{Nc}(H_2) \cup \Gamma_{Nc}(H_3) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq k+1} \Gamma_{Nc}(G_iG_j).$$

Теперь лемма 6 следует из принципа математической индукции. □

Доказательство теоремы 4. Пусть группа G является произведением попарно взаимно перестановочных разрешимых подгрупп $G_1, \ldots, G_n$. Из [18, теорема 4.1.14] следует, что G разрешима. Тогда

$$\Gamma_{Nc}(G) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma_{Nc}(G_iG_j).$$

Согласно теореме 3 $\Gamma_{Nc}(G_iG_j) \subseteq \Gamma_{Nc}(G_i) \cup \Gamma_{Nc}(G_j) \cup \Gamma(G_i, G_j)$. Таким образом,

$$\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_{Nc}(G_i) \ \cup \bigcup_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} \Gamma(G_i, G_j).$$

Из того, что$\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_H(G)$ для каждой группы G, и [25, лемма 3] следует, что если $(p, q) \in E(\Gamma_H(G)) \setminus E(\Gamma_{Nc}(G))$ для разрешимой группы G, то $p = q$. Таким образом,

$$\Gamma_H(G) \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_H(G_i) \ \cup \bigcup_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} \Gamma(G_i, G_j) \cup \{(p,p) \mid p \in \pi(G)\}.$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 3. Ясно, что класс $\mathfrak{F}$ всех групп, подгруппы Шмидта которых сверхразрешимы, является наследственной формацией с условием Шеметкова и $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}) = \Gamma_{Nc}(\mathfrak{U}) = \{(p,q) \mid q \in \pi(p-1)\}$. Заметим, что $\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})$ не имеет циклов. Следовательно, каждая $\mathfrak{F}$-группа имеет силовскую башню по [9, теорема 6.2 (b)]. В частности, группы $G_1, \ldots, G_n$ разрешимы. Тогда $G = G_1 \ldots G_n$ является произведением взаимно перестановочных разрешимых $\mathfrak{F}$-подгрупп $G_1, \ldots, G_n$. Следовательно, $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(\mathfrak{F})$ по теореме 4. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ по [9, теорема 4.4]. □

4. Заключительные замечания и открытые вопросы

Из п. 4 леммы 1 следует, что если группа $G = AB$ является произведением своих нормальных подгрупп A и B, то $\Gamma(G) = \Gamma(A) \cup \Gamma(B)$, где $\Gamma \in \{\Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$. Заметим, что S_4 является произведением своих нормальных подгрупп S_4 и A_4 и $\Gamma_s(S_4) \cup \Gamma_s(A_4) \neq \Gamma_s(S_4)$. Тем не менее следующий вопрос кажется интересным.

Вопрос 1. Пусть группа $G = AB$ является произведением своих нормальных подгрупп A и B. Верно ли, что $\Gamma_s(G) \subseteq \Gamma_s(A) \cup \Gamma_s(B)$?

Через $\overline{\Gamma}$ будем обозначать неориентированный граф на том же множестве вершин, что и граф Γ, в котором две вершины соединены ребром, если они связаны в Γ. В доказательствах [5; 12] силовский граф считался ориентированным, а в [5] он определялся как неориентированный. Поэтому граф $\overline{\Gamma}_s$ также представляет интерес. Более того, имеет место

Предложение 1. *Если разрешимая группа $G = AB$ является произведением своих нормальных подгрупп A и B, то $\overline{\Gamma}_s(G) = \overline{\Gamma}_s(A) \cup \overline{\Gamma}_s(B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [14, теорема 4.2 (2)] следует, что $\overline{\Gamma}_s(H) = \overline{\Gamma}_{Nc}(H)$ для любой разрешимой группы H. Итак, $\overline{\Gamma}_s(G) = \overline{\Gamma}_s(A) \cup \overline{\Gamma}_s(B)$ следует из п. 4 леммы 1. □

Отметим [14, доказательство теоремы 4.2], что существуют группы H с $\overline{\Gamma}_s(H) \neq \overline{\Gamma}_{Nc}(H)$.

В о п р о с 2. Пусть группа $G = AB$ является произведением своих нормальных подгрупп A и B. Верно ли, что $\overline{\Gamma}_s(G) = \overline{\Gamma}_s(A) \cup \overline{\Gamma}_s(B)$?

В теореме 3 описаны только N-критический граф и граф Хоукса произведений взаимно перестановочных подгрупп. Что можно сказать о силовском графе произведений взаимно перестановочных подгрупп?

В о п р о с 3. Пусть группа $G = AB$ является произведением взаимно перестановочных подгрупп A и B. Верно ли, что $\Gamma_s(G) \subseteq \Gamma_s(A) \cup \Gamma_s(B) \cup \Gamma(A, B)$?

Доказательство теоремы 3 основано на свойствах взаимно перестановочных произведений двух подгрупп. Аналоги этих свойств для продуктов более двух подгрупп в настоящее время неизвестны. Поэтому мы используем некоторые свойства N-критического графа разрешимой группы (см. лемму 6) для доказательства теоремы 4. Отсюда вытекают следующие два вопроса.

В о п р о с 4. Верно ли заключение теоремы 4 для произведения попарно взаимно перестановочных подгрупп $G_1, \dots, G_n$?

В о п р о с 5. Пусть группа $G = G_1 \dots G_n$ является произведением попарно перестановочных подгрупп $G_1, \dots, G_n$ для $n \geq 3$. Верно ли, что

$$\Gamma_{Nc}(G) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma_{Nc}(G_i G_j)?$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abe S., Iiyori N.** A generalization of prime graphs of finite groups // Hokkaido Math. J. 2000. Vol. 29. P. 391–407. doi: 10.14492/hokmj/1350912979
2. **Cayley A.** Desiderata and suggestions: No. 2. The theory of groups: graphical representation // Amer. J. Math. 1878. Vol. 1, no. 2. P. 174–176. doi: 10.2307/2369306
3. **Erwin D., Russo F.G.** The influence of the complete nonexterior square graph on some infinite groups // Lith. Math. J. 2016. Vol. 56, no. 4. P. 492–502. doi: 10.1007/s10986-016-9331-2
4. **Hawkes T.** On the class of Sylow tower groups // Math. Z. 1968. Vol. 105, no. 5. P. 393–398. doi: 10.1007/BF01110301
5. **Kazarin L.S., Martínez-Pastor A, Pérez-Ramos M.D.** On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers // Israel J. Math. 2011. Vol. 186, no. 1. P. 251–271. doi: 10.1007/s11856-011-0138-x
6. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп. Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
7. **Lucchini A., Maróti A.** On the clique number of the generating graph of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137. P. 3207–3217. doi: 10.1090/S0002-9939-09-09992-4
8. **Russo F.G.** Problems of connectivity between the Sylow Graph, the prime graph and the non-commuting graph of a group // Adv. Pure Math. 2012. Vol. 2. P. 391–396. doi: 10.4236/apm.2012.26058
9. **Vasilyev F., Murashka V.I.** Arithmetic graphs and classes of finite groups // Siberian Math. J. 2019. Vol. 60, no. 1. P. 41–55. doi: 10.1134/S0037446619010051
10. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0

11. **Васильев А.Ф., Мурашко В.И., Фурс А.К.** О графе Хоукса конечных групп // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 5. С. 1010–1026. doi: 10.33048/smzh.2022.63.504
12. **D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G.** Lattice formations and Sylow normalizers: A conjecture // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena. 2007. Vol. 55. P. 107–112.
13. **Murashka V.I.** On the connected components of the prime and Sylow graphs of a finite group // Arch. Math. 2022. Vol. 118, no. 3. P. 225–229. doi: 10.1007/s00013-021-01694-x
14. **Murashka V.I.** N-critical graph of finite groups // Asian-European J. Math. 2021. Vol. 15, no. 9. Article no. 2250163. doi: 10.1142/S1793557122501637
15. **Carocca A.** A note on the product of F-subgroups in a finite group // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1996. Vol. 39, no. 1. P. 37–42. doi: 10.1017/S0013091500022756
16. **Francalanci G.** Nilpotence relations in products of groups // J. Group Theory. 2021. Vol. 24, no. 3. P. 467–480. doi: 10.1515/jgth-2020-0135
17. **Hauck P., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M.D.** Products of $\mathcal{N}$-connected groups // Illinois J. Math. 2003. Vol. 47, no. 4. P. 1033–1045. doi: 10.1215/ijm/1258138089
18. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.** Products of Finite Groups. Berlin; NY: Walter De Gruyter, 2010. Ser. De Gruyter Expos. Math., vol. 53. doi.org/10.1515/9783110220612
19. **Васильев А.Ф.** К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. С. 3–11.
20. **Ballester-Bolinches A. Ezquerro L.M.** Classes of finite groups. Netherlands: Springer, 2006. Ser. Math. Appl., vol. 584. 359 p.
21. **Beidleman J.C., Heineken H.** Mutually permutable subgroups and group classes // Arch. Math. 2005. Vol. 85, no. 1. P. 18–30. doi: 10.1007/s00013-005-1200-2
22. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Симоненко Д.Н.** О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2017. Т. 61, № 6. С. 9–17.
23. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.
24. **Aivazidis S., Safonova I.N., Skiba A.N.** Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenkman's theorem // J. Group Theory. 2021. Vol. 24, no. 4. P. 807–818. doi: 10.1515/jgth-2020-0149
25. **Мурашко В.И.** Группы с заданными системами подгрупп Шмидта // Сиб. мат. журн. Т. 60, № 2. С. 429–440. doi: 10.33048/smzh.2019.60.214

Поступила 9.06.2023
После доработки 8.08.2023
Принята к публикации 28.08.2023

Мурашко Вячеслав Игоревич
канд. физ.-мат. наук
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
г. Гомель, Беларусь
e-mail: mvimath@yandex.ru

REFERENCES

1. Abe S., Iiyori N. A generalization of prime graphs of finite groups. *Hokkaido Math. J.*, 2000, vol. 29, pp. 391–407. doi: 10.14492/hokmj/1350912979
2. Cayley A. Desiderata and suggestions. 2. the theory of groups: graphical representation. *Amer. J. Math.*, 1878, vol. 1, no. 2, pp. 174–176. doi: 10.2307/2369306
3. Erwin D., Russo F.G. The influence of the complete nonexterior square graph on some infinite groups. *Lith. Math. J.*, 2016, vol. 56, no. 4, pp. 492–502. doi: 10.1007/s10986-016-9331-2
4. Hawkes T. On the class of Sylow tower groups. *Math. Z.*, 1968, vol. 105, no. 5, pp. 393–398. doi: 10.1007/BF01110301
5. Kazarin L.S., Martínez-Pastor A, Pérez-Ramos M.D. On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers. *Israel J. Math.*, 2011, vol. 186, no. 1, pp. 251–271. doi: 10.1007/s11856-011-0138-x
6. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363

7. Lucchini A., Maróti A. On the clique number of the generating graph of a finite group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 137, pp. 3207–3217. doi: 10.1090/S0002-9939-09-09992-4
8. Russo F.G. Problems of connectivity between the Sylow graph, the prime graph and the non-commuting graph of a group. *Adv. Pure Math.*, 2012, vol. 2, pp. 391–396. doi: 10.4236/apm.2012.26058
9. Vasilyev A.F., Murashka V.I. Arithmetic graphs and classes of finite groups. *Sib. Math. J.*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 41–55. doi: 10.1134/S0037446619010051
10. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0
11. Vasil'ev A.F., Murashka V.I., Furs A.K. On the Hawkes graphs of finite groups. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 5, pp. 849–861. doi: 10.1134/S0037446622050044
12. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Lattice Formations and Sylow Normalizers: A Conjecture. *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena.*, 2007, vol. 55, pp. 107–112.
13. Murashka V.I. On the connected components of the prime and Sylow graphs of a finite group. *Arch. Math.*, 2022, vol. 118, no. 3, pp. 225–229. doi: 10.1007/s00013-021-01694-x
14. Murashka V.I. N-critical graph of finite groups. *Asian-European J. Math.*, 2021, vol. 15, no. 9, 2250163. doi: 10.1142/S1793557122501637
15. Carocca A. A note on the product of F-subgroups in a finite group. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1996, vol. 39, no, 1, pp. 37–42. doi: 10.1017/S0013091500022756
16. Francalanci G. Nilpotence relations in products of groups. *J. Group Theory*, 2021, vol. 24, no. 3, pp. 467–480. doi: 10.1515/jgth-2020-0135
17. Hauck P., Martínez-Pastor A., Pérez-Ramos M.D. Products of $\mathcal{N}$-connected groups. *Illinois J. Math.*, 2003, vol. 47, no. 4, pp. 1033–1045. doi: 10.1215/ijm/1258138089
18. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of finite groups.* Ser. De Gruyter Expos. Math., vol. 53, Berlin; NY: Walter De Gruyter, 2010. doi: 10.1515/9783110220612
19. Vasil'ev A.F. On the problem of the enumeration of local formations with a given property. *Questions in Algebra*, 1987, no. 3, pp. 3–11 (in Russian).
20. Ballester-Bolinches A. Ezquerro L.M. *Classes of finite groups.* Ser. Math. Appl., vol. 584, Netherlands: Springer, 2006, 359 p.
21. Beidleman J.C., Heineken H. Mutually permutable subgroups and group classes. *Arch. Math.*, 2005, vol. 85, no. 1, pp. 18–30. doi: 10.1007/s00013-005-1200-2
22. Vasil'ev A.F., Vasil'eva T.I., Simonenko D.N. On MP-closed saturated formations of finite groups. *Russian Math.*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 6–12. doi: 10.3103/S1066369X17060020
23. Shemetkov L.A., Skiba A.N. *Formations of algebraic systems.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 256 p. (in Russian)
24. Aivazidis S., Safonova I.N., Skiba A.N. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenkman's theorem. *J. Group Theory*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 807–818. doi: 10.1515/jgth-2020-0149
25. Murashka V.I. Groups with prescribed systems of Schmidt subgroups. *Sib. Math. J.*, vol. 60, no. 2, pp. 334–342. doi: 10.1134/S0037446619020149

Received June 9, 2023
Revised August 8, 2023
Accepted August 28, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФ-237).

Viachaslau Igaravich Murashka, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Belarus, e-mail: mvimath@yandex.ru .

Cite this article as: V. I. Murashka. Arithmetic graphs and factorized finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 181–192.