ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.542

О СУБМОДУЛЯРНОСТИ И K$\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНОСТИ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ[1]

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — конечная группа. Подгруппа H группы G называется K$\mathfrak{F}$-субнормальной (субмодулярной) в G, если существует цепочка подгрупп $H = H_0 \leq\ H_1 \leq\ \ldots \leq\ H_{n-1} \leq\ H_n = G$ такая, что для каждого i либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \leq H_i$ (H_i модулярна в H_{i+1} соответственно). Доказано, что примарная подгруппа субмодулярна тогда и только тогда, когда она K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в группе. Здесь $\mathfrak{U}_1$ — формация всех сверхразрешимых групп, порядки элементов которых свободны от квадратов. Более того, для разрешимой наследственной формации $\mathfrak{F}$ установлено, что каждая разрешимая K$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G содержится в разрешимом радикале группы G. Получен ряд приложений данных результатов к исследованию групп, факторизуемых K$\mathfrak{F}$-субнормальными и субмодулярными подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, субнормальная подгруппа, субмодулярная подгруппа.

V. S. Monakhov, I. L. Sokhor. On submodularity and K$\mathfrak{F}$-subnormality in finite groups.

Let $\mathfrak{F}$ be a formation, and let G be a finite group. A subgroup H of G is K$\mathfrak{F}$-subnormal (submodular) in G if there is a subgroup chain $H = H_0 \leq\ H_1 \leq\ \ldots \leq\ H_{n-1} \leq\ H_n = G$ such that for every i either H_i is normal in H_{i+1} or $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \leq H_i$ (H_i is a modular subgroup of H_{i+1}, respectively). We prove that in a group, a primary subgroup is submodular if and only if it is K$\mathfrak{U}_1$-subnormal. Here $\mathfrak{U}_1$ is a formation of all supersolvable groups with square-free orders of elements. Moreover, for a solvable subgroup-closed formation $\mathfrak{F}$, every solvable K$\mathfrak{F}$-subnormal subgroup of a group G is contained in the solvable radical of G. We also obtain a series of applications of these results to the investigation of groups factorized by K$\mathfrak{F}$-subnormal and submodular subgroups.

Keywords: finite group, subnormal subgroup, submodular subgroup.

MSC: 20D10, 20D35, 20D40

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-169-180

К 70-летнему юбилею член-корреспондента РАН
Александра Алексеевича Махнева

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}$, $p\mathfrak{S}$, $\mathcal{A}$ и $\mathfrak{G}$ будем обозначать формации всех нильпотентных, сверхразрешимых, разрешимых, p-разрешимых групп, всех групп с абелевыми силовскими подгруппами и всех конечных групп соответственно. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Будем говорить, что $\mathfrak{F}$ разрешима (p-разрешима), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ ($\mathfrak{F} \subseteq p\mathfrak{S}$). Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$.

Структура группы во многом зависит от способа вложения ее подгрупп. В частности, определяющее значение в строении непростых групп играют субнормальные подгруппы. Как хорошо известно, понятие субнормальности является расширением понятия нормальности и, в отличие от последнего, обладает свойством транзитивности. В рамках теории формаций Кегель [1] предложил следующее расширение субнормальности.

[1]Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Ф23РНФ-237).

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H группы G называется К$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq \ H_1 \leq \ \ldots \leq H_i \leq H_{i+1} \leq \ldots \leq \ H_{n-1} \leq \ H_n = G \tag{1}$$

такая, что либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \leq H_i$ для каждого i.

Ясно, что субнормальная подгруппа H группы G будет К$\mathfrak{F}$-субнормальной в G для каждой формации $\mathfrak{F}$, а любая К$\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа будет субнормальной. Более узкое понятие предложил Хоукс [2].

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если существует цепочка подгрупп (1) такая, что $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \leq H_i$ для каждого i.

Результаты, связанные с данными понятиями, отражены в монографиях [3–6].

Понятно, что каждая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа К$\mathfrak{F}$-субнормальна. Обратное, вообще говоря, неверно. В любой простой неабелевой группе единичная подгруппа К$\mathfrak{F}$-субнормальна для любой формации $\mathfrak{F}$, но не $\mathfrak{F}$-субнормальна для каждой разрешимой формации $\mathfrak{F}$. Однако для любой разрешимой π-группы и наследственной формации $\mathfrak{F}$, $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$, понятия К$\mathfrak{F}$-субнормальности и $\mathfrak{F}$-субнормальности эквивалентны, см. лемму 3 далее.

Понятие модулярной подгруппы родом из теории решеток. Подгруппа H группы G называется модулярной в G, если подгруппа H является модулярным элементом решетки подгрупп группы G. В монографии [7] представлен детальный анализ поведения модулярных подгрупп в группе. Как и нормальность, модулярность не является транзитивным отношением. Расширением понятия модулярности является понятие субмодулярности, которое обладает свойством транзитивности.

Определение 3. Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G, если существует цепочка подгрупп (1) такая, что H_i модулярна в H_{i+1} для каждого i.

В настоящей работе исследуются группы с некоторыми К$\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, а также установлена связь между субмодулярностью и К$\mathfrak{F}$-субнормальностью. В частности, получены следующие результаты.

Теорема 1. *Примарная подгруппа Q группы G субмодулярна в G тогда и только тогда, когда подгруппа Q К$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в G.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-разрешимая наследственная формация. Если A — p-разрешимая К$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $A \leq G_{p\mathfrak{S}}$.*

Здесь $G_{p\mathfrak{S}}$ — p-разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная p-разрешимая подгруппа группы G; $\mathfrak{U}_1$ — класс всех сверхразрешимых групп, порядки элементов которых свободны от квадратов. Примарной называется группа, порядок которой есть степень некоторого простого числа.

Кроме того, получен ряд приложений данных результатов к исследованию строения групп, факторизуемых К$\mathfrak{F}$-субнормальными и субмодулярными подгруппами.

1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, а $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Через $\pi(G)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G. Подгруппу, порожденную подгруппами A и B группы G, будем обозначать через $\langle A, B\rangle$. Если X — подгруппа (собственная подгруппа, нормальная подгруппа, максимальная подгруппа) группы Y, то будем писать $X \leq Y$ ($X < Y$, $X \lhd Y$, $X \lessdot \ Y$ соответственно). Говорят, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}, \ p_1 < p_2 < \ldots < p_n, \ \alpha_i \in \mathbb{N}, \ \forall i,$$

и группа G имеет цепочку подгрупп $G = G_0 \geq G_1 \geq \ldots \geq G_{n-1} \geq G_n = 1$ такую, что для каждого i подгруппа G_i нормальна в G и фактор-группа G_{i-1}/G_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G. Класс всех групп с силовскими башнями сверхразрешимого типа обозначается через $\mathfrak{D}$. Понятно, что $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{S}$.

Если $X \leq Y$, то $X_Y = \cap_{y \in Y} X^y$ — ядро X в Y. Для формации $\mathfrak{F}$ и $X \leq Y$ включение $Y^{\mathfrak{F}} \leq X$ эквивалентно $Y/X_Y \in \mathfrak{F}$. Понятно, что $G^{\mathfrak{H}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ для формаций $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Неоднократно в дальнейшем будут использоваться следующие свойства K$\mathfrak{F}$-субнормальных и $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Лемма 1 [6, 6.1.6, 6.1.7, 6.1.9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, H и L — подгруппы группы G, N — нормальная в G подгруппа. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в L (H $\mathfrak{F}$-субнормальна в L) и L K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (L $\mathfrak{F}$-субнормальна в G), то H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G).*

(2) *Если $N \leq H$ и H/N K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N (H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N), то H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G).*

(3) *Если H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G), то HN/N K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N (HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N).*

(4) *Если H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G), то HN K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G).*

(5) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G (H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G), то $H \cap L$ K$\mathfrak{F}$-субнормальна в L ($H \cap L$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в L).*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Если собственная подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в группе G, то в группе G существует подгруппа M такая, что $H \leq M$, подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в M и либо M нормальна в G и G/M — простая группа, либо M — максимальная подгруппа группы G и $G/M_G \in \mathfrak{F}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 1 существует цепочка подгрупп (1) такая, что либо H_i нормальна в H_{i+1}, либо $H_{i+1}^{\mathfrak{F}} \leq H_i$ для каждого i. Пусть H_{n-1} нормальна в G. Тогда в группе G существует максимальная нормальная подгруппа M такая, что $H_{n-1} \leq M$. В силу леммы 1 (5) подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в M и G/M — простая группа. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} \leq H_{n-1} \leq M \lessdot G$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \leq M_G$ и $G/M_G \in \mathfrak{F}$. В силу леммы 1 (5) подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в M.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем для собственной K$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы H группы G через $H^\star$ условимся обозначать максимальную K$\mathfrak{F}$-субнормальную подгруппу группы G, которая содержит H. Согласно лемме 2 подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в $H^\star$, и либо $H^\star$ нормальна в G и $G/H^\star$ — простая группа, либо $H^\star$ — максимальная подгруппа группы G и $G/(H^\star)_G \in \mathfrak{F}$. Вместо $(H^\star)_G$ условимся далее писать $H^\star_G$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$. В разрешимой π-группе G подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение может быть получено из [5, лемма 3.1.9]. Приведем прямое и более компактное доказательство данного утверждения. Понятно, что если подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то подгруппа H K$\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть H — K$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. По индукции подгруппа H $\mathfrak{F}$-субнормальна в $H^\star$. Если $G/H^\star_G \in \mathfrak{F}$, то $H^\star$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Предположим, что $H^\star$ нормальна в G. Поскольку π-группа G разрешима, то $|G/H^\star| = p \in \pi$ и опять $G/H^\star \in \mathfrak{F}$. Следовательно, H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G по лемме 1 (1).

Лемма доказана.

В дальнейшем также потребуется следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— формация. Если* A *и* N *— подгруппы группы* G*,* $N \lhd G$*, то*

$$(AN/N)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}N/N.$$

Доказательство. Так как N — нормальная подгруппа группы G, то $H = AN \leq G$. В силу [6, 2.2.8 (1)] имеем

$$(AN/N)^{\mathfrak{F}} = (H/N)^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}N/N = A^{\mathfrak{F}}N/N,$$

поскольку $A^{\mathfrak{F}}N = H^{\mathfrak{F}}N$ согласно [6, 2.2.8 (2)].

Лемма доказана.

Группа называется примитивной, если она содержит максимальную подгруппу с единичным ядром. Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— насыщенная формация и* G *— разрешимая группа. Если* $G \notin \mathfrak{F}$ *и* $G/N \in \mathfrak{F}$ *для каждой неединичной нормальной подгруппы* N *группы* G*, то* G *— примитивная группа.*

Следующая лемма содержит необходимые в дальнейшем свойства примитивных групп.

Лемма 6 [6, 1.1.7, 1.1.10]. *Пусть* G *— разрешимая примитивная группа и* M *— максимальная подгруппа группы* G *с единичным ядром. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $\Phi(G) = 1$.

(2) *Группа* G *содержит единственную минимальную нормальную подгруппу* N *такую, что* $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ *для простого* p.

(3) $G = F(G) \rtimes M$ *и* $O_p(M) = 1$.

2. Субмодулярность и $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субнормальность

Следующая лемма содержит хорошо известные свойства субмодулярных подгрупп, которые будут неоднократно использоваться.

Лемма 7 [8, лемма 1]. *Пусть* G *— группа,* H *и* K *— подгруппы группы* G*,* $N \lhd G$*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* H *субмодулярна в* K *и* K *субмодулярна в* G*, то* H *субмодулярна в* G*.*

(2) *Если* H/N *субмодулярна в* G/N*, то* H *субмодулярна в* G*.*

(3) *Если* H *субнормальна в* G*, то* H *субмодулярна в* G*.*

Напомним, что подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G, если M удовлетворяет следующим условиям: M — собственная подгруппа группы G; M — модулярная подгруппа группы G; если $M < K < G$, то K немодулярна в G.

Лемма 8. *Каждая субмодулярная подгруппа* $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$*-субнормальна в группе* G*.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть H — субмодулярная подгруппа группы G. Тогда в группе G существует максимальная модулярная подгруппа M такая, что H модулярна в M. По индукции подгруппа H $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субнормальна в M. Если подгруппа M нормальна в G, то M $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субнормальна в G. Предположим, что M не нормальна в G. Тогда $G/M_G \in \mathfrak{U}_1$ в силу [7, лемма 5.1.2], и подгруппа M $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субнормальна в G. Поэтому H $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субнормальна в G по лемме 1 (1).

Лемма доказана.

П р и м е р. Группа Фробениуса $F_7 = C_7 \rtimes C_6 \in \mathfrak{U}_1$, поэтому в группе F_7 каждая подгруппа $\mathfrak{U}_1$-субнормальна, но максимальная подгруппа C_6 при этом не субмодулярна в F_7. Поэтому утверждение леммы 8 в общем случае необратимо.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если Q — субмодулярная примарная подгруппа группы G, то подгруппа Q K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в G по лемме 8.

Обратно, пусть Q — K$\mathfrak{U}_1$-субнормальная q-подгруппа группы G для некоторого простого $q \in \pi(G)$. По индукции подгруппа Q субмодулярна в $Q^\star$. Если подгруппа $Q^\star$ нормальна в G, то $Q^\star$ модулярна в G, а значит, подгруппа Q субмодулярна в группе G по лемме 7 (1).

Пусть $G/Q^\star_G \in \mathfrak{U}_1$. Предположим, что $Q^\star_G \neq 1$. В силу леммы 1 (3) подгруппа $QQ^\star_G/Q^\star_G$ K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в $G/Q^\star_G$ и по индукции $QQ^\star_G/Q^\star_G$ субмодулярна в $G/Q^\star_G$. Поэтому подгруппа $QQ^\star_G$ субмодулярна в группе G по лемме 7 (2). Согласно лемме 1 (5) подгруппа Q K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в $QQ^\star_G$. Поскольку $QQ^\star_G \leq Q^\star < G$, то по индукции подгруппа Q субмодулярна в $QQ^\star_G$. Следовательно, Q субмодулярна в G по лемме 7 (1).

Пусть теперь $Q^\star_G = 1$. В этом случае $G \in \mathfrak{U}_1$ и G — сверхразрешимая примитивная группа. По лемме 6 группа $G = F(G) \rtimes Q^\star$. Поскольку $G \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{D}$, то в группе G силовская r-подгруппа R нормальна для $r = \max \pi(G)$, а значит, $R \leq F(G)$. Но так как $F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $R = F(G)$. Поскольку минимальные нормальные подгруппы сверхразрешимой группы имеют простые порядки, то $|F(G)| = r > q$. В силу леммы 1 (3) имеем, что $QF(G)/F(G)$ K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в $G/F(G)$. Следовательно, $QF(G)/F(G)$ субмодулярна в $G/F(G)$ по индукции и $QF(G)$ субмодулярна в G. По лемме 1 (5) подгруппа Q K$\mathfrak{U}_1$-субнормальна в $QF(G)$. Если $QF(G) < G$, то подгруппа Q субмодулярна в $QF(G)$ по индукции, а значит, подгруппа Q субмодулярна в G. Пусть $G = F(G) \rtimes Q$. Тогда Q — циклическая подгруппа и $|G| = rq$, так как $G \in \mathfrak{U}_1$. Следовательно, Q субмодулярна в G.

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Без ограничения общности можно считать, что $A \neq 1$ и $G \notin p\mathfrak{S}$. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если N — неединичная нормальная подгруппа группы G, то AN/N — p-разрешимая K$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N и $AN/N \leq (G/N)_{p\mathfrak{S}}$ по индукции. Обозначим $H/N = (G/N)_{p\mathfrak{S}}$. Если $N \in p\mathfrak{S}$, то $H \in p\mathfrak{S}$ и $A \leq AN \leq H \leq G_{p\mathfrak{S}}$, т. е. утверждение верно. Поэтому далее будем считать, что $G_{p\mathfrak{S}} = 1$, а значит, группа G не содержит нетривиальных субнормальных p-разрешимых подгрупп.

По индукции $A \leq A^\star_{p\mathfrak{S}}$. Если $A^\star$ нормальна в G, то $A^\star_{p\mathfrak{S}}$ — неединичная p-разрешимая субнормальная подгруппа группы G; противоречие. Поэтому $A^\star$ — ненормальная максимальная подгруппа группы G и $G/A^\star_G \in \mathfrak{F} \subseteq p\mathfrak{S}$ в силу леммы 2. Так как $A^\star_{p\mathfrak{S}}$ и $A^\star_G$ — неединичные нормальные в $A^\star$ подгруппы и $A^\star_G$ нормальна в G, то $A^\star_{p\mathfrak{S}} \cap A^\star_G$ — субнормальная в G p-разрешимая подгруппа. Поэтому $A^\star_{p\mathfrak{S}} \cap A^\star_G = 1$ и $A \leq A^\star_{p\mathfrak{S}} \leq C_G(A^\star_G)$.

Обозначим $C = C_G(A^\star_G)$. Если $C < G$, то $A \leq C_{p\mathfrak{S}}$ по индукции, и $C_{p\mathfrak{S}}$ — неединичная субнормальная p-разрешимая подгруппа группы G; противоречие. Значит, $C = G$ и $A^\star_G = Z(G) \in p\mathfrak{S}$. Следовательно, $G \in p\mathfrak{S}$; противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — p-разрешимая наследственная формация. Если A — p-разрешимая* K$\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа группы G, то $\langle A, B\rangle$ p-разрешима для любой p-разрешимой подгруппы B группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 подгруппа $A \leq G_{p\mathfrak{S}}$. Поэтому $\langle A, B\rangle \leq G_{p\mathfrak{S}}B$. Поскольку $G_{p\mathfrak{S}} \in p\mathfrak{S}$ и $G_{p\mathfrak{S}}B/G_{p\mathfrak{S}} \cong B/B \cap G_{p\mathfrak{S}} \in p\mathfrak{S}$, то $\langle A, B\rangle$ p-разрешима. $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная формация и A — разрешимая* K$\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа группы G. Тогда $A \leq G_{\mathfrak{S}}$ и $\langle A, B\rangle$ разрешима для любой разрешимой подгруппы B группы G.*

В силу леммы 8 справедливо

Следствие 3. *Если A — разрешимая субмодулярная подгруппа группы G, то $A \leq G_{\mathfrak{S}}$ и $\langle A, B\rangle$ разрешима для любой разрешимой подгруппы B группы G.*

3. Группы, факторизуемые $\mathrm{K}\mathfrak{F}$-субнормальными и субмодулярными подгруппами

Группы с субмодулярными силовскими подгруппами исследовались в [8; 9]. Класс таких групп будем обозначать через $\mathfrak{Z}$. Класс $\mathfrak{C}$ всех групп, в которых каждая циклическая примарная подгруппа субмодулярна, введен и исследован в [10].

Будем также использовать следующие обозначения:

$\mathrm{wK}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа $\mathrm{K}\mathfrak{F}$-субнормальна;

$\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна;

$\mathrm{vK}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая циклическая примарная подгруппа $\mathrm{K}\mathfrak{F}$-субнормальна;

$\mathrm{v}\mathfrak{F}$ — класс всех групп, в которых каждая циклическая примарная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ некоторые свойства этих классов получены в [11]. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп, то данные классы достаточно полно описаны в [12–15].

Напомним, что экспонентой группы G называется наименьшее общее кратное порядков всех элементов группы G. Если $\mathfrak{X}$ — формация и $t \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{X}_t$ — класс всех групп из $\mathfrak{X}$, экспоненты которых не делятся на $(t+1)$-ные степени простых чисел. Понятно, что $\mathfrak{X}_t = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{G}_t$. Группы с $\mathfrak{U}_t$-субнормальными примарными подгруппами изучались в [16].

Лемма 9. *Для любого фиксированного $t \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения.*

(1) *Классы $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ и $\mathrm{v}\mathfrak{U}_t$ являются наследственными насыщенными формациями.*

(2) $(\mathrm{w}\mathfrak{U})_t \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}_t = \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$.

(3) $(\mathrm{v}\mathfrak{U})_t \subset \mathrm{v}\mathfrak{U}_t = \mathrm{vK}\mathfrak{U}_t \subset \mathrm{v}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$.

(4) $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t = \mathfrak{N}\mathcal{A}_t \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}_t = \mathfrak{N}\mathcal{A} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) См. [16, предложения 1, 2].

(2) В силу [16, лемма 4 (2)] справедливо $(\mathrm{w}\mathfrak{U})_t \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Согласно следствию 2 справедливо включение $\mathrm{wK}\mathfrak{U}_t \subset \mathfrak{S}$. Поскольку $\pi(\mathfrak{U}_t) = \mathbb{P}$, то $\mathrm{wK}\mathfrak{U}_t = \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ по лемме 3. Так как $\mathfrak{U}_t \subset \mathfrak{U}$, то $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}$, а значит, $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$ в силу [12, предложение 2.8].

(3) Данное утверждение доказывается аналогично утверждению (2) с учетом [14, теорема 2(2)].

(4) Пусть $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Тогда в группе G каждая силовская подгруппа $\mathfrak{U}_t$-субнормальна. Поскольку каждая p-подгруппа $\mathfrak{U}_1$-субнормальна в силовской p-подгруппе, ее содержащей, то в группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}_t$-субнормальна и $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}$ по утверждению (2), то $G/F(G) \in \mathcal{A}$ в силу [12, теорема 2.13 (3)]. В силу [16, теорема 1 ((1) $\Leftrightarrow$ (2))] имеем, что $G/\Phi(G) \in (\mathrm{w}\mathfrak{U}_t)_t$. Следовательно,

$$G/F(G) \cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) \in \mathcal{A} \cap (\mathrm{w}\mathfrak{U}_t)_t \subseteq \mathcal{A}_t.$$

Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}_t$ и $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t \subseteq \mathrm{v}\mathfrak{U}_t \cap \mathfrak{N}\mathcal{A}_t \subseteq \mathrm{v}\mathfrak{U}_t \cap \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Обратно, пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in (\mathfrak{N}\mathcal{A} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}_t) \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. В силу утверждения (3) группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Так как $\mathfrak{N}\mathcal{A} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$ и $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ — наследственные насыщенные формации, то G — примитивная группа и $G = F(G) \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа группы G с $M_G = 1$ в силу лемм 5 и 6. Поскольку $G \in \mathfrak{D}$, то $F(G) = R$ — силовская r-подгруппа группы G для $r = \max \pi(G)$ и $R \in \mathfrak{A}_1$. Так как $G \in \mathfrak{N}\mathcal{A}$, то $G^{\mathcal{A}} \leq F(G)$ и $M \cong G/F(G) \in \mathcal{A}$. Следовательно, $G \in \mathcal{A}$. В силу выбора группы G с учетом [16, теорема 1 ((1) $\Leftrightarrow$ (4))] группа G содержит $\{p, q\}$-подгруппу K такую, что $K/\Phi(K) \notin \mathfrak{U}_t$. Пусть H — $\{p, q\}$-холлова подгруппа группы G, содержащая K. Предположим, что H — собственная подгруппа группы G. Тогда $H \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ по индукции, а значит, $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Следовательно, $K/\Phi(K) \in \mathfrak{U}_t$ в силу [16, теорема 1 ((1) $\Leftrightarrow$ (4))]; противоречие. Поэтому $G = R \rtimes Q$, где Q — абелева силовская подгруппа группы G, которая неприводимо действует на R. Отсюда Q — циклическая подгруппа согласно [3, лемма 4.1]. Поскольку $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$, то Q $\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G, и $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$; противоречие. Таким образом, $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t = \mathfrak{N}\mathcal{A} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$.

Лемма доказана.

Из теоремы 1 и леммы 9 при $t = 1$ получаем

Следствие 4. (1) $\mathfrak{Z} = \mathrm{wK}\mathfrak{U}_1 = \mathrm{w}\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{D}$.

(2) $\mathfrak{C} = \mathrm{vK}\mathfrak{U}_1 = \mathrm{v}\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{D}$.

(3) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A}_1 = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Лемма 10. *Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$. Пусть A и B — $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Если подгруппы A и B имеют силовские башни сверхразрешимого типа, то группа G также имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 2 группа G разрешима. Поэтому подгруппы A и B $\mathfrak{U}_t$-субнормальны в G по лемме 3, а значит, подгруппы A и B $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. В силу [15, лемма 3.4, теорема 5.3] группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Предложение 1. *Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$. Пусть A — $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальная подгруппа группы G, B — нильпотентная нормальная подгруппа группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $A \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t$, то $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$.*

(2) *Если $A \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}_t$, то $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t = \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t$ по лемме 9 (2), то группа G содержит силовскую q-подгруппу Q, которая не $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G. Согласно [17, VI.4.6] подгруппа $Q = A_qB_q$, где A_q и B_q — силовские q-подгруппы из A и B соответственно. Поскольку подгруппа $A \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t$, то подгруппа A_q $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в A. Следовательно, подгруппа A_q $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в группе G по лемме 1 (1). Так как подгруппа B нильпотентна, то B_q — характеристическая в B подгруппа. Отсюда B_q нормальна в G, поскольку подгруппа B нормальна в группе G. Следовательно, подгруппа $Q = A_qB_q$ $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в группе G по лемме 1 (4); противоречие.

(2) Пусть G — группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условию и не принадлежащая $\mathrm{v}\mathfrak{U}_t$. Тогда группа G содержит циклическую q-подгруппу X, которая не $\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G. В силу лемм 9 (3) и 10 группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а значит, подгруппа X не $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G согласно лемме 3. По индукции $G/N \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N. Так как $\mathrm{v}\mathfrak{U}_t$ — наследственная насыщенная формация по лемме 9 (1), то $G = F(G) \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа группы G с единичным ядром в силу лемм 5 и 6. Поскольку $G \in \mathfrak{D}$, то силовская r-подгруппа R группы G нормальна в G для $r = \max \pi(G)$. Поэтому $F(G) = R$. Кроме того, $B \leq F(G)$ в силу выбора подгруппы B, и $G = RA$. Понятно, что $q \neq r$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $X \leq A$. Так как $A \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}_t$, то подгруппа X $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в A. Следовательно, X $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в группе G по лемме 1 (1); противоречие. Таким образом, предположение неверно, и группа $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$.

Предложение доказано.

Следствие 5. *Пусть A — $\mathrm{K}\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа группы G, B — нильпотентная нормальная подгруппа группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $A \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.*

(2) *Если $A \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп (1) такая, что $|H_{i+1} : H_i| \in \mathbb{P}$ для каждого i. Свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп подробно описаны в [12; 13].

Следствие 6. *Пусть A — $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа группы G, B — нильпотентная нормальная подгруппа группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.*

(2) *Если $A \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$.*

Доказательство. В силу следствия 3 и леммы 9 (2) группа G разрешима. Поэтому подгруппа A $\mathfrak{U}$-субнормальна в G согласно [13, лемма 1.12]. В силу следствия 5 оба утверждения справедливы. □

Из теоремы 1, пп. (1), (2) следствия 4 и предложения 1 при $t = 1$ получаем

Следствие 7. *Пусть A — субмодулярная подгруппа группы G, B — нильпотентная нормальная подгруппа группы G и $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $A \in \mathfrak{Z}$, то $G \in \mathfrak{Z}$.*

(2) *Если $A \in \mathfrak{C}$, то $G \in \mathfrak{C}$.*

Теорема 3. *Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$. Пусть A и B — $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Если $A, B \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t$, то группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ в каждом из случаев*

(1) $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$;

(2) $(|A/A^{\mathcal{A}_t}|, |B/B^{\mathcal{A}_t}|) = 1$.

Доказательство. (1) Пусть Q — силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого $q \in \pi(G)$. Так как $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$, то q не делит $|G : AF(G)|$ или $|G : BF(G)|$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $Q \leq AF(G)$. В силу леммы 1 (5) подгруппа A $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в $AF(G)$. Следовательно, $AF(G) \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ согласно предложению 1 (1) и подгруппа Q $\mathfrak{U}_t$-субнормальна в $AF(G)$, а значит, подгруппа Q $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в $AF(G)$. В силу леммы 1 (4) подгруппа $AF(G)$ $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G. Поэтому подгруппа Q $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G по лемме 1 (1). Таким образом, в группе G каждая силовская подгруппа $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна и $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ в силу леммы 9 (2).

(2) Пусть G — группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям теоремы и не принадлежащая $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. В силу лемм 9 (2) и 10 группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Пусть N — неединичная нормальная подгруппа группы G. Тогда AN/N и BN/N — $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальные в G/N подгруппы по лемме 1 (3) и

$$G = (AN/N)(BN/N), \quad AN/N \cong A/A \cap N \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t, \quad BN/N \cong B/B \cap N \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}_t,$$

поскольку $\mathrm{wK}\mathfrak{U}_t$ — формация по лемме 9 (1). Более того, в силу леммы 4

$$\big(\big|(AN/N)/(AN/N)^{\mathcal{A}_t}\big|, \big|(BN/N)/(BN/N)^{\mathcal{A}_t}\big|\big) = \big(\big|AN/A^{\mathcal{A}_t}N\big|, \big|BN/B^{\mathcal{A}_t}N\big|\big)$$
$$= \big(|A/A^{\mathcal{A}_t}|/|A \cap N : A^{\mathcal{A}_t} \cap N|, |B/B^{\mathcal{A}_t}|/|B \cap N : B^{\mathcal{A}_t} \cap N|\big) = 1.$$

Отсюда по индукции $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Следовательно, группа G примитивна по лемме 5 и $G = F(G) \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа группы G с единичным ядром в силу леммы 6. Поскольку группа $G \in \mathfrak{D}$, то в группе G силовская r-подгруппа R нормальна для

$r = \max \pi(G)$. Согласно предложению 1 (1) подгруппы AR и BR принадлежат $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Отсюда AR и BR — собственные подгруппы группы G. В силу леммы 9 (4) заключаем, что $(AR)^{\mathcal{A}_t}$ и $(BR)^{\mathcal{A}_t}$ нильпотентны. Поскольку $R = C_G(R)$, то $(AR)^{\mathcal{A}_t}$ и $(BR)^{\mathcal{A}_t}$ — r-подгруппы. Так как $AR/(AR)^{\mathcal{A}_t} \in \mathcal{A}_t$, то $A_{r'} \in \mathcal{A}_t$. Поскольку $R \in \mathfrak{A}_1$, то $A \in \mathcal{A}_t$ и $A^{\mathcal{A}_t} = 1$. Аналогично, $B^{\mathcal{A}_t} = 1$. Поэтому $(|A|, |B|) = (|A/A^{\mathcal{A}_t}|, |B/B^{\mathcal{A}_t}|) = 1$, и группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ в силу утверждения (1); противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 8. *Пусть A и B — K$\mathfrak{U}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Если $A, B \in \mathrm{wK}\mathfrak{U}$, то группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ в каждом из следующих случаев*:

(1) $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$;

(2) $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$.

Следствие 9. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Если $A, B \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ в каждом из следующих случаев*:

(1) $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$;

(2) $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$.

Для $t = 1$ с учетом теоремы 1 и следствия 4 (1) получаем

Следствие 10. *Пусть A и B — субмодулярные подгруппы группы $G = AB$. Если $A, B \in \mathfrak{Z}$, то группа $G \in \mathfrak{Z}$ в каждом из следующих случаев*:

(1) $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$;

(2) $(|A/A^{\mathcal{A}_1}|, |B/B^{\mathcal{A}_1}|) = 1$.

Теорема 4. *Зафиксируем произвольное $t \in \mathbb{N}$. Пусть A и B — K$\mathfrak{U}_t$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Если $A, B \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}_t$, то справедливы следующие утверждения*:

(1) *если* $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$, *то* $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$;

(2) *если* $G^{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}$, *то* $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть X — циклическая q-подгруппа группы G для некоторого простого $q \in \pi(G)$. Так как $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$, то q не делит $|G : AF(G)|$ или $|G : BF(G)|$. Следовательно, без ограничения общности будем считать, что $X \leq AF(G)$. По лемме 1 (5) подгруппа A K$\mathfrak{U}_t$-субнормальна в $AF(G)$. Поэтому $AF(G) \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$ в силу предложения 1 (2). Следовательно, подгруппа X $\mathfrak{U}_t$-субнормальна в $AF(G)$, а значит, подгруппа X K$\mathfrak{U}_t$-субнормальна в $AF(G)$. В силу леммы 1 (4) подгруппа $AF(G)$ K$\mathfrak{U}_t$-субнормальна в группе G. Поэтому подгруппа X K$\mathfrak{U}_t$-субнормальна в группе G по лемме 1 (1). Таким образом, в группе G каждая циклическая примарная подгруппа K$\mathfrak{U}_t$-субнормальна, и группа $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}_t$ в силу леммы 9 (3).

(2) Пусть G — группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условиям теоремы и не принадлежащая $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. В силу лемм 9 (2) и 10 группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Если N — неединичная нормальная подгруппа группы G, то

$$(G/N)^{\mathcal{A}} \cong G^{\mathcal{A}}N/N \cong G^{\mathcal{A}}/G^{\mathcal{A}} \cap N \in \mathfrak{N}.$$

По индукции $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Поэтому согласно леммам 5 и 6 группа $G = F(G) \rtimes M$, $F(G) = R$, R — силовская r-подгруппа группы G для $r = \max \pi(G)$. По условию $G^{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}$, поэтому $G^{\mathcal{A}} \leq R$ и $M \cong G/R \in \mathcal{A}$. Так как подгруппа R абелева, то $G \in \mathcal{A}$. Поскольку $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$, то в силу [16, теорема 1 ((1) $\Leftrightarrow$ (4))] группа G содержит $\{p, q\}$-подгруппу K такую, что $K/\Phi(K) \notin \mathfrak{U}_t$. Пусть H — $\{p, q\}$-холлова подгруппа группы G, содержащая K. Согласно [17, VI.4.6] существуют $\{p, q\}$-холловы подгруппы $A_{\{p,q\}}$ и $B_{\{p,q\}}$ в A и B соответственно такие, что $H = A_{\{p,q\}}B_{\{p,q\}}$.

Поскольку $A_{\{p,q\}} = A \cap H$, то подгруппа $A_{\{p,q\}}$ $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в H по лемме 1 (5). Аналогично, подгруппа $B_{\{p,q\}}$ $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в H. Кроме того, $A_{\{p,q\}}, B_{\{p,q\}} \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}_t$ и $H^{\mathcal{A}} = 1$. Предположим, что H — собственная подгруппа группы G. Тогда $H \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ по индукции и $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$. Следовательно, $K/\Phi(K) \in \mathfrak{U}_t$ в силу [16, теорема 1 ((1) $\Leftrightarrow$ (4))]; противоречие. Поэтому $G = R \rtimes Q$, где Q — абелева силовская подгруппа группы G, которая неприводимо действует на R. Следовательно, Q — циклическая подгруппа согласно [3, лемма 4.1]. В силу [17, VI.4.6] подгруппа $Q = A_qB_q$, где A_q и B_q — силовские q-подгруппы из A и B соответственно. Поскольку подгруппа Q циклическая, то $Q = A_q$ или $Q = B_q$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $Q = A_q$. Так как $A \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}_t$, подгруппа Q $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в A. Но подгруппа A $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в G. Следовательно, подгруппа Q $\mathrm{K}\mathfrak{U}_t$-субнормальна в группе G по лемме 1 (1), и группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t$ по лемме 9 (3).

Теорема доказана.

Следствие 11. *Пусть A и B — $\mathrm{K}\mathfrak{U}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. При $A, B \in \mathrm{vK}\mathfrak{U}$ справедливы следующие утверждения*:

(1) *если $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$, то $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$;*

(2) *если $G^{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}$, то $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.*

Следствие 12 [18, теорема 2]. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$. Если $A, B \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$, то группа $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$ в каждом из следующих случаев*:

(1) $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$;

(2) $G^{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}$.

Для $t = 1$ с учетом теоремы 1 и пп. (1), (2) следствия 4 получаем

Следствие 13. *Пусть A и B — субмодулярные подгруппы группы $G = AB$. При $A, B \in \mathfrak{C}$ справедливы следующие утверждения*:

(1) *если $(|G : AF(G)|, |G : BF(G)|) = 1$, то $G \in \mathfrak{C}$;*

(2) *если $G^{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}$, то $G \in \mathfrak{Z}$.*

Следствия 10 и 13 поглощают некоторые результаты работ [9; 19].

Следствие 14 [9, предложение 2.6]. *Если A и B — нильпотентные субмодулярные подгруппы группы $G = AB$, то $G \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{U}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 8 подгруппы A и B $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Поэтому группа $G \in \mathfrak{U}$ согласно [20, теорема 2], и G' нильпотентна. Поскольку в нильпотентной группе каждая подгруппа субнормальна, то подгруппы $A, B \in \mathfrak{C}$ в силу леммы 7 (3). Так как $G^{\mathcal{A}} \leq G'$, то группа $G \in \mathfrak{Z}$ по следствию 13 (2).

Следствие 15 [19, теорема 3.3]. *Пусть A и B — субмодулярные подгруппы группы $G = AB$ и $A, B \in \mathfrak{Z}$. Тогда группа $G \in \mathfrak{Z}$ в каждом из следующих случаев*:

(1) $(|G : A|, |G : B|) = 1$;

(2) $G^{\mathcal{A}_1} \in \mathfrak{N}$.

В заключение отметим, что обнаруженная взаимосвязь между субмодулярностью подгруппы в конечной группе и ее $\mathrm{K}\mathfrak{U}_1$-субномальностью позволяет при изучении влияния субмодулярных подгрупп на строение группы применять методы теории формационной субнормальности и $\mathbb{P}$-субнормальности. Приложения этих методов, продемонстрированные в разд. 3 для групп, факторизуемых субмодулярными подгруппами, можно развивать, например, для групп с субмодулярными n-максимальными подгруппами и для групп с субмодулярными минимальными не $\mathfrak{F}$-подгруппами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kegel O.H.** Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. Vol. 30. P. 225–228.
2. **Hawkes T.** On formation subgroups of a finite soluble group // J. Lond. Math. Soc. 1969. Vol. s1-44, no. 1. P. 243–250. doi: 10.1112/jlms/s1-44.1.243
3. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 271 с.
4. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
5. **Каморников С.Ф., Селькин М.В.** Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003. 254 с.
6. **Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.** Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006. 381 p.
7. **Schmidt R.** Subgroup lattices of groups. Berlin; NY: De Gruyter, 1994. 572 p.
8. **Zimmermann I.** Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557. doi: 10.1007/BF01221589
9. **Васильев В.А.** Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288. doi: 10.17377/smzh.2015.56.606
10. **Monakhov V.S., Sokhor I.L.** Finite groups with submodular primary subgroups // Arch. Math. 2023. Vol. 121. P. 1–10. doi: 10.1007/s00013-023-01872-z
11. **Мурашко В.И.** Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1353–1367.
12. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н.** О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
13. **Монахов В.С.** Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462. doi: 10.17377/smzh.2016.57.217
14. **Монахов В.С.** О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367. doi: 10.4213/mzm13063
15. **Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Тютянов В.Н.** О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528. doi: 10.4213/mzm10216
16. **Monakhov V.S., Sokhor I.L.** Finite groups with formational subnormal primary subgroups of bounded exponent // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 2. С. 785–796. doi: 10.33048/semi.2023.20.046
17. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; NY: Springer, 1967. 793 p.
18. **Монахов В.С.** Конечные факторизуемые группы с $\mathbb{P}$-субнормальными v-сверхразрешимыми и sh-сверхразрешимыми сомножителями // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. Р. 403–410. doi: 10.4213/mzm13255
19. **Васильев В.А.** О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп // Веснiк ВДУ. 2016. № 2 (91). С. 17–21.
20. **Васильев А.Ф.** Новые свойства конечных динильпотентных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 29–33.

Поступила 13.08.2023
После доработки 6.10.2023
Принята к публикации 9.10.2023

Монахов Виктор Степанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
г. Гомель, Беларусь
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Сохор Ирина Леонидовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
докторант
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
г. Гомель, Беларусь
e-mail: irina.sokhor@gmail.com

REFERENCES

1. Kegel O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten. *Arch. Math.*, 1978, vol. 30, p. 225–228.
2. Hawkes T. On formation subgroups of a finite soluble group. *J. Lond. Math. Soc.*, 1969, vol. s1-44, no. 1, pp. 243–250. doi: 10.1112/jlms/s1-44.1.243
3. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 272 p.
4. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin; NY: Walter de Gruyter, 1992, 891 p. doi: 10.1515/9783110870138
5. Kamornikov S.F., Selkin M.V. *Podgruppovye funktory i klassy konechnykh grupp* [Subgroup functors and classes of finite groups]. Minsk: Belarusskaya Nauka Publ., 2003, 254 p.
6. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. *Classes of finite groups.* Dordrecht: Springer, 2006, 381 p.
7. Schmidt R. *Subgroup lattices of groups.* Berlin; NY: De Gruyter, 1994. 572 p.
8. Zimmermann I. *Submodular subgroups in finite groups. Math. Z.*, 1989, vol. 202, pp. 545–557. doi: 10.1007/BF01221589
9. Vasil'ev V.A. Finite groups with submodular Sylow subgroups. *Sib. Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1019–1027. doi: 10.1134/S0037446615060063
10. Monakhov V.S., Sokhor I.L. Finite groups with submodular primary subgroups. Arch. Math. 2023. Vol. 121. P. 1–10. doi: 10.1007/s00013-023-01872-z
11. Murashka V.I. Classes of finite groups with generalized subnormal cyclic primary subgroups. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 6, pp. 1105–1115. doi: 10.1134/S0037446614060135
12. Vasil'ev A.F., Vasil'eva T.I., Tyutyanov V.N. On the finite groups of supersoluble type. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 6, pp. 1004–1012. doi: 10.1007/s11202-010-0099-z
13. Monakhov V.S. Finite groups with abnormal and $\mathfrak{U}$-subnormal subgroups. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 352–363. doi: 10.1134/S0037446616020178
14. Monakhov V.S. Three formations over $\mathfrak{U}$. *Math. Notes*, 2021, vol. 110, no. 3, pp. 339–346. doi: 10.1134/S0001434621090042
15. Vasil'ev A.F., Vasil'eva T.I., Tyutyanov V.N. On K-$\mathbb{P}$-Subnormal subgroups of finite groups. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 4, pp. 471–480. doi: 10.1134/S0001434614030195
16. Monakhov V.S., Sokhor I.L. Finite groups with formational subnormal primary subgroups of bounded exponent. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 785–796. doi: 10.33048/semi.2023.20.046
17. Huppert B. *Endliche Gruppen. I.* Berlin; Heidelberg; NY: Springer, 1967, 793 p.
18. Monakhov V.S. Finite factorizable groups with $\mathbb{P}$-subnormal v-supersolvable and sh-supersolvable factors. *Math. Notes*, 2022, vol. 111, no. 3, pp. 407–413. doi: 10.1134/S0001434622030087
19. Vasil'ev V.A. On the influence of submodular subgroups on the structure of finite groups. *Vestn. Vitebsk State Univ.*, 2016, no. 2 (91), pp. 17–21.
20. Vasil'ev A.F. New properties of finite dinilpotent groups. *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi*, Ser. Fiz.-Mat. Navuk, 2004, no. 2, pp. 29–33.

Received August 13, 2023
Revised October 6, 2023
Accepted October 9, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФ-237).

Victor Stepanovich Monakhov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com .

Irina Leonidovna Sokhor, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Belarus, e-mail: irina.sokhor@gmail.com .

Cite this article as: V. S. Monakhov, I. L. Sokhor. On submodularity and K$\mathfrak{F}$-subnormality in finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 169–180.