ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.518.2

О СВЯЗИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ И КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ФРАКТАЛЬНЫМ ГРАФИКОМ

Д. И. Масютин

Для непрерывной на отрезке вещественнозначной функции f вводится понятие модуля фрактальности $\nu(f,\varepsilon)$, сопоставляющего каждому $\varepsilon > 0$ минимальное число квадратов со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f. Для невозрастающей функции $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ рассматривается класс F^{μ} непрерывных на отрезке функций таких, что $\nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$. Описано соотношение классов F^{μ_1} и F^{μ_2} при различных μ_1 и μ_2. Установлена связь между классами F^{μ} и классами непрерывных функций ограниченной вариации $BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b]$ для произвольных выпуклых функций Φ. А именно, имеет место вложение

$$BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b] \subset F^{\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}}.$$

Строится контрпример, показывающий, что данное вложение не улучшаемо. Далее показано, что равенство классов F^{μ} и $BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b]$ имеет место только в случае

$$BV[a,b] \cap C[a,b] = F^{1/\varepsilon},$$

где $BV[a,b]$ — функции классической ограниченной вариации. Для остальных случаев построен контрпример, показывающий, что если $\mu(\varepsilon)$ растет быстрее $\dfrac{1}{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to +0$, то класс F^{μ} не вкладывается ни в какой из классов $BV_{\Phi}[a,b]$.

Ключевые слова: фрактальная размерность, ограниченная вариация.

D. I. Masyutin. On the connection between classes of functions of bounded variation and classes of functions with fractal graph.

For a real-valued function f continuous on a closed interval, the modulus of fractality $\nu(f,\varepsilon)$ is defined for every $\varepsilon > 0$ as the minimum number of squares with sides of length ε parallel to the coordinate axes that can cover the graph of f. For a nonincreasing function $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, we consider the class F^{μ} of functions continuous on a closed interval and such that $\nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))$. The relationship between the classes F^{μ_1} and F^{μ_2} is described for various μ_1 and μ_2. A connection is established between the classes F^{μ} and the classes of continuous functions of bounded variation $BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b]$ for arbitrary convex functions Φ. Namely, there is an inclusion

$$BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b] \subset F^{\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}}.$$

A counterexample is constructed showing that this inclusion cannot be improved. It is further shown that the equality of the classes F^{μ} and $BV_{\Phi}[a,b] \cap C[a,b]$ occurs only in the case

$$BV[a,b] \cap C[a,b] = F^{1/\varepsilon},$$

where $BV[a,b]$ are functions of classical bounded variation. For other cases, a counterexample is constructed showing that if $\mu(\varepsilon)$ grows faster than $\dfrac{1}{\varepsilon}$ as $\varepsilon \to +0$, then the class F^{μ} is not a subclass of any of the classes $BV_{\Phi}[a,b]$.

Keywords: fractal dimension, bounded variation.

MSC: 26A45, 26A99

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-155-168

Введение

Пусть дана непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Будем называть *модулем фрактальности* функции f функцию $\nu(f) : (0,+\infty) \to \mathbb{N}$, которая любому $\varepsilon > 0$ сопоставляет минимальное число квадратов со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f.

Пусть $\mu : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ — невозрастающая функция такая, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mu(\varepsilon) = +\infty.$$

Определим класс F^μ следующим образом:

$$F^\mu := \bigl\{ f \in C[a,b] \colon \nu(f,\varepsilon) = O(\mu(\varepsilon)) \bigr\}.$$

Через $\lceil x \rceil$ ($\lfloor x \rfloor$) будем обозначать целочисленное округление вверх (вниз) числа x.

Для того чтобы покрыть график произвольной непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции, необходимо не менее $\lceil (b-a)/\varepsilon \rceil$ квадратов со стороной ε. С другой стороны, для того чтобы покрыть график произвольной функции $f \in C[a,b]$, достаточно покрыть прямоугольник $[a,b] \times \Bigl[\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\Bigr]$; ясно, что для покрытия этого прямоугольника достаточно

$$\left\lceil \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil \left\lceil \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) - \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)}{\varepsilon} \right\rceil$$

квадратов со стороной ε. Таким образом, естественно рассматривать функции μ такие, что

$$\frac{C_1}{\varepsilon} \leqslant \mu(\varepsilon) \leqslant \frac{C_2}{\varepsilon^2}, \quad C_1, C_2 > 0;$$

тогда соответствующие классы F^μ будут удовлетворять условию

$$F^{1/\varepsilon} \subset F^\mu \subset F^{1/\varepsilon^2}.$$

Как известно, проблема взаимосвязи структурных и аппроксимативных свойств функций является одной из центральных в теории приближений. Поэтому изучение свойств классов F^μ представляет интерес в рамках актуальной тематики исследования задач о представлении и приближении негладких функций. Различные примеры функций, графики которых обладают фрактальной структурой, можно посмотреть в работе [1] и в имеющихся там ссылках. Отметим, что М. Л. Гриднев изучал вопросы поведения тригонометрических рядов Фурье функций из классов F^μ. В работе [2] построен пример функции из F^μ, тригонометрический ряд Фурье которой не является всюду сходящимся, если μ такие, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\mu(\varepsilon) = +\infty$. В [3] уточнен известный признак Дини — Липшица в терминах модуля фрактальности.

В настоящей работе рассматривается задача о соотношении классов F^μ и классов функций ограниченной Φ-вариации.

Следуя [4], непрерывную выпуклую вниз функцию $\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такую, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty,$$

будем называть *N-функцией.*

Рассмотрим разбиение τ отрезка $[a,b]$: $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$. Функцию f (см., например, [5, гл. 4, § 5]) будем называть функцией с ограниченной Φ-вариацией на отрезке $[a,b]$, если сумма

$$V_\Phi(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \Phi\bigl(|f(t_k) - f(t_{k-1})|\bigr)$$

ограничена по всем разбиениям τ отрезка $[a,b]$.

Класс таких функций будем обозначать $BV_\Phi[a,b]$. Величину

$$\sup\{V_\Phi(f,\tau)\colon \tau \text{ — разбиение отрезка } [a,b]\}$$

будем обозначать $V_\Phi f$. В частном случае $\Phi(u)=u^p$ $(p>1)$ $BV_\Phi[a,b]$ называется классом функций *ограниченной p-вариации* и обозначается $BV_p[a,b]$.

В статье [6] изучена связь класса F^{1/ε^α} $(\alpha\in[1,2])$ с классом $BV_p[a,b]$. В данной работе результаты, полученные в [6], обобщаются на классы F^μ и функции ограниченной Φ-вариации. В частности, в терминах функций μ и Φ получено неулучшаемое условие вложения класса $BV_\Phi[a,b]$ в класс F^μ.

1. Предварительные утверждения

Для любого $\varepsilon>0$ определим следующее множество квадратов:

$$S(\varepsilon)=\big\{\big[(m-1)\varepsilon,m\varepsilon\big]\times\big[(n-1)\varepsilon,n\varepsilon\big]\colon n,m\in\mathbb{Z}\big\}.$$

Рассмотрим величину $\overline{\nu}(f,\varepsilon)$ — минимальное количество квадратов из $S(\varepsilon)$, которое покрывает график функции f. Обозначим

$$\overline{F^\mu}:=\big\{f\in C[a,b]\colon \overline{\nu}(f,\varepsilon)=O(\mu(\varepsilon))\big\}.$$

Лемма 1. *Для любой функции $f\in C[a,b]$ и $\varepsilon>0$*

$$\nu(f,\varepsilon)\leqslant\overline{\nu}(f,\varepsilon)\leqslant 4\nu(f,\varepsilon). \tag{1.1}$$

В частности, $\overline{F^\mu}=F^\mu$.

Доказательство. Первое неравенство верно в силу того, что $S(\varepsilon)$ содержится в классе всех квадратов длины ε, параллельных осям координат.

Второе неравенство следует из того, что для любого квадрата длины ε найдутся 4 квадрата из $S(\varepsilon)$, покрывающих его, т. е. не более $4\nu(f,\varepsilon)$ квадратов из $S(\varepsilon)$ достаточно, чтобы покрыть график.

Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что если $\mu_1(\varepsilon)=O(\mu_2(\varepsilon))$ при $\varepsilon\to+0$, то $F^{\mu_1}\subset F^{\mu_2}$. Покажем, что если порядки стремления к $+\infty$ у функций μ_1 и μ_2 разные, то классы F^{μ_1} и F^{μ_2} не совпадают. Заодно построим важный для дальнейшего пример.

Теорема 1. *Пусть $\mu_1(\varepsilon)=o(\mu_2(\varepsilon))$ при $\varepsilon\to+0$. Функция μ_2 такая, что $\varepsilon\mu_2(\varepsilon)$ — невозрастающая функция, а $\varepsilon^2\mu_2(\varepsilon)$ — неубывающая функция. Тогда существует функция f, принадлежащая F^{μ_2}, но не принадлежащая F^{μ_1}.*

Доказательство. Так как $\dfrac{C}{\varepsilon}\leqslant\mu_1(\varepsilon)$ для некоторого $C>0$ и $\mu_1(\varepsilon)=o(\mu_2(\varepsilon))$, то для функции μ_2 верно равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\mu_2(\varepsilon)=+\infty. \tag{1.2}$$

Положим $f_0(x)=|2x|$ для $|x|\leqslant\dfrac12$ и продолжим эту функцию периодически с периодом 1. Далее для $m\geqslant1$ положим

$$f_m(x)=\frac{1}{m^2}\mu_2\Big(\frac1m\Big)f_0(mx).$$

Функция f_m непрерывная, периодическая с периодом $\frac{1}{m}$, кусочно-линейная, неотрицательная, с максимальным значением $\frac{1}{m^2}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m}\Bigr)$. Выберем подпоследовательность $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел рекурсивным способом, а именно, пусть m_1 удовлетворяет неравенству

$$\frac{\sqrt{\mu_1\Bigl(\frac{1}{m_1}\Bigr)\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_1}\Bigr)}}{m_1} \geqslant 1. \tag{1.3}$$

Такое число m_1 существует в силу равенства (1.2) и того, что $\frac{C}{\varepsilon} \leqslant \mu_1(\varepsilon)$ для некоторого $C > 0$. Тогда по уже выбранным $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ определим m_{k+1}, исходя из следующих условий.

- Обозначим $a_k = \sqrt{\frac{\mu_1\bigl(\frac{1}{m_k}\bigr)}{\mu_2\bigl(\frac{1}{m_k}\bigr)}}$. Будем выбирать m_{k+1} так, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 1$ и $a_{k+1} \leqslant \frac{a_k}{19}$.

  Тогда верно
$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \leqslant a_{k+1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{19^i} = \frac{19}{18}a_{k+1} \leqslant \frac{a_k}{18}. \tag{1.4}$$

- Снова в силу равенства (1.2) можно по m_k выбирать m_{k+1} таким образом, чтобы выполнялось неравенство
$$\frac{3^k a_k}{m_k}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_k}\Bigr) \leqslant \frac{a_{k+1}}{m_{k+1}}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_{k+1}}\Bigr). \tag{1.5}$$

Определим функцию на отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{m_k}(x).$$

Так как, начиная с некоторого k, верно, что $f_{m_k}(x) < 1$ для любого $x \in [0,1]$, то по признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $[0,1]$, и функция f непрерывна.

Покажем, что $f \in F^{\mu_2}$. Зафиксируем $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{m_N}$, где $N \geqslant 6$ такое, что $\frac{5a_N}{12m_N}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_N}\Bigr) \geqslant 3$. Тогда существует такое k, что $\frac{1}{m_{k+1}} < \varepsilon \leqslant \frac{1}{m_k}$. Будем покрывать график функции $a_i f_{m_i}$ для $i \leqslant k$ квадратами со стороной ε. Для покрытия каждого участка линейности достаточно $\Bigl\lceil \frac{a_i}{\varepsilon m_i^2}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_i}\Bigr)\Bigr\rceil$ квадратов. Таких участков линейности $2m_i$. Поэтому

$$\nu(a_i f_{m_i}, \varepsilon) \leqslant 2m_i\Bigl\lceil \frac{a_i}{\varepsilon m_i^2}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_i}\Bigr)\Bigr\rceil.$$

Нетрудно заметить, что из условий (1.3) и (1.5) верно неравенство $\frac{a_i}{\varepsilon m_i^2}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_i}\Bigr) \geqslant 1$. Следовательно,

$$\nu(a_i f_{m_i}, \varepsilon) \leqslant \frac{4a_i}{\varepsilon m_i}\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_i}\Bigr). \tag{1.6}$$

Заметим, что для покрытия графика функции $a_k f_{m_k}$ необходимо $\Bigl\lceil \frac{7a_k}{6}\,\mu_2\Bigl(\frac{1}{m_k}\Bigr)\Bigr\rceil$ квадратов со стороной $\frac{1}{m_k}$. Действительно, для покрытия каждого участка линейности необходимо

$$\left\lceil \frac{a_k\mu_2\bigl(\frac{1}{m_k}\bigr)}{m_k} - 2\right\rceil$$

квадратов. В силу выбора N

$$\left\lceil \frac{a_k\mu_2(\dfrac{1}{m_k})}{m_k} - 2\right\rceil \geqslant \frac{7a_k\mu_2(\dfrac{1}{m_k})}{12m_k} + 1 \geqslant \left\lceil \frac{7a_k\mu_2(\dfrac{1}{m_k})}{12m_k}\right\rceil.$$

Поэтому

$$\frac{7a_k}{6}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big) \leqslant \nu\Big(a_k f_{m_k}, \frac{1}{m_k}\Big). \tag{1.7}$$

Оценим величину $\nu\big(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i f_{m_i}, \varepsilon\big)$. Воспользуемся леммой 1 из [6], согласно которой для любых непрерывных функций f и g на отрезке $[0,1]$ выполняется неравенство

$$\nu(f+g,\varepsilon) \leqslant 3\nu(f,\varepsilon) + 3\nu(g,\varepsilon). \tag{1.8}$$

Отсюда по индукции вытекает

$$\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \varepsilon\Big) \leqslant 3^{k-2}\nu(a_1 f_{m_1},\varepsilon) + \sum_{i=2}^{k-1} 3^{k-i}\nu(a_i f_{m_i},\varepsilon). \tag{1.9}$$

Воспользовавшись этим неравенством, неравенством (1.6) и условием (1.5), получаем

$$\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \varepsilon\Big) \leqslant \frac{4a_{k-1}}{\varepsilon m_{k-1}}\mu_2\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big) + \frac{4a_{k-1}}{\varepsilon m_{k-1}}\mu_2\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big)\sum_{i=2}^{k-2} 3^{-i+2} + \frac{12a_{k-1}}{\varepsilon m_{k-1}}\mu_2\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big)$$
$$\leqslant \frac{22a_{k-1}}{\varepsilon m_{k-1}}\mu_2\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big).$$

Тогда, начиная с $k \geqslant 6$, верно

$$\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \varepsilon\Big) \leqslant \frac{22a_k}{3^k\varepsilon m_k}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big) \leqslant \frac{a_k}{18\varepsilon m_k}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big). \tag{1.10}$$

Воспользовавшись условием невозрастания функции $\varepsilon\mu_2(\varepsilon)$, получаем

$$\nu\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i f_{m_i}, \varepsilon\Big) \leqslant 3\nu(a_k f_{m_k},\varepsilon) + \frac{a_k}{6\varepsilon m_k}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big) \leqslant \frac{13}{\varepsilon m_k}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big) \leqslant 13\mu_2(\varepsilon).$$

Далее оценим величину $\nu\Big(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon\Big)$. В силу неубывания функции $\varepsilon^2\mu_2\big(\varepsilon\big)$ имеем

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}(x) \leqslant \frac{1}{m_{k+1}^2}\mu_2\Big(\frac{1}{m_{k+1}}\Big)\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \leqslant \frac{1}{m_{k+1}^2}\mu_2\Big(\frac{1}{m_{k+1}}\Big) \leqslant \varepsilon^2\mu_2(\varepsilon).$$

Тогда для того чтобы покрыть график функции $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}$ достаточно покрыть прямоугольник $[0,1] \times [0,\varepsilon^2\mu_2(\varepsilon)]$. Следовательно, $\nu\big(\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon\big) \leqslant \mu_2(\varepsilon)$. В итоге, воспользовавшись неравенством (1.8), получаем

$$\nu(f,\varepsilon) = \nu\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i f_{m_i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon\Big) \leqslant 39\mu_2(\varepsilon) + 3\mu_2(\varepsilon) = 42\mu_2(\varepsilon).$$

Следовательно, $f \in F^{\mu_2}$.

Осталось показать, что $f \notin F^{\mu_1}$. Возьмем последовательность $\varepsilon_k = \dfrac{1}{m_k}$, $k \geqslant N$. Зафиксируем ε_k. Оценим функцию $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_k f_{m_k}(x)$. Воспользовавшись свойством (1.4), получаем

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}(x) \leqslant \frac{1}{m_k^2}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big)\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \leqslant \frac{a_k}{18m_k^2}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big).$$

В силу этой оценки

$$\nu\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big) \leqslant \frac{a_k}{18}\mu_2(\varepsilon_k). \tag{1.11}$$

Снова воспользовавшись неравенством (1.8), получаем

$$\begin{aligned}\nu(a_k f_{m_k}, \varepsilon_k) &= \nu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{m_i} - \sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i} - \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big)\\ &\leqslant 3\nu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big) + 9\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big) + 9\nu\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Тогда из (1.7), (1.10) и (1.11) имеем

$$\begin{aligned}\nu(f, \varepsilon_k) = \nu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i, \varepsilon_k\Big) &\geqslant \frac{1}{3}\nu(a_k f_k, \varepsilon_k) - 3\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big) - 3\nu\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big)\\ &\geqslant \frac{7a_k}{18}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big) - \frac{3a_k}{18}\mu_2\Big(\frac{1}{m_k}\Big) - \frac{3a_k}{18}\mu_2(\varepsilon_k) = \frac{a_k}{18}\mu_2(\varepsilon_k).\end{aligned}$$

В силу определения a_k верно, что $\mu_1(\varepsilon_k) = o(a_k\mu_2(\varepsilon_k))$ для любого $k \geqslant N$. Следовательно, $f \notin F^{\mu_1}$.

Теорема доказана.

Пусть Φ — N-функция. Функцию Φ [4, гл. 1, § 1, теорема 1.1] можно представить в виде

$$\Phi(u) = \int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x,$$

где f — неубывающая непрерывная справа функция и $f(0) = 0$. *Дополнительной* к Φ называется функция

$$\overline{\Phi}(v) = \int_0^v f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Справедливо следующее [4, гл. 1, § 2, формула (2.6)] неравенство Янга: для любых $u, v \geqslant 0$

$$uv \leqslant \Phi(u) + \overline{\Phi}(v).$$

Лемма 2. *Пусть* $\{u_i\}_{i=1}^n$, $\{v_i\}_{i=1}^n$ *— наборы произвольных неотрицательных действительных чисел. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant 2\inf\Big\{\alpha : \sum_{i=1}^{n}\overline{\Phi}\Big(\frac{u_i}{\alpha}\Big) \leqslant 1\Big\}\cdot\inf\Big\{\alpha : \sum_{i=1}^{n}\Phi\Big(\frac{v_i}{\alpha}\Big) \leqslant 1\Big\}. \tag{1.13}$$

Это неравенство является вариантом обобщения неравенства Гельдера для сумм со случая $\Phi(u) = u^p$ на случай произвольной N-функции Φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу тавтологического неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{v_i}{\inf\left\{\alpha\colon \sum\limits_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{v_i}{\alpha}\right) \leqslant 1\right\}} \right) \leqslant 1$$

выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{v_i}{\inf\left\{\alpha\colon \sum\limits_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{v_i}{\alpha}\right) \leqslant 1\right\}} \leqslant \sup_{\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi(v_i)\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{1.14}$$

В силу неравенства Янга

$$\sup_{\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi(v_i)\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant \sup_{\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi(v_i)\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} \big(\Phi(v_i) + \overline{\Phi}(u_i)\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}(u_i) + 1.$$

Вместо u_i подставим в последнее неравенство

$$\frac{u_i}{\inf\left\{\alpha : \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\Phi}\left(\frac{u_i}{\alpha}\right) \leqslant 1\right\}}.$$

Тогда

$$\sup_{\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi(v_i)\leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant 2 \inf\left\{\alpha : \sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}\left(\frac{u_i}{\alpha}\right) \leqslant 1\right\}. \tag{1.15}$$

Соединяя (1.14) и (1.15), получаем требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Для N-функций имеют место следующие свойства [4, гл. 1, § 1].

1. $\Phi(0) = 0$ и Φ — возрастающая функция.
2. Для любого $0 < \alpha < 1$ $\Phi(\alpha x) \leqslant \alpha\Phi(x)$.
3. Для любых $a, b > 0$ $\Phi(a) + \Phi(b) \leqslant \Phi(a+b)$.

2. Связь классов $BV_\Phi[a,b]$ и F^μ

Теорема 2. *Пусть Φ — N-функция и $\dfrac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = O(\mu(\varepsilon))$ при $\varepsilon \to +0$. Тогда*

$$BV_\Phi[a,b] \cap C[a,b] \subset F^\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим непрерывную функцию $f \in BV_\Phi[a,b]$. Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1$. Обозначим

$$m = \left\lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rfloor, \quad I_i = [a + (i-1)\varepsilon,\, a + i\varepsilon], \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad I_{m+1} = [a + m\varepsilon, b].$$

Пусть d_i — минимальное количество квадратов со стороной ε, которыми можно покрыть график функции f на отрезке I_i (если $a + m\varepsilon = b$, то $d_{m+1} = 0$). Тогда

$$\nu(f, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} d_i.$$

Воспользуемся неравенством (1.13). Получим

$$\sum_{i=1}^{m+1} d_i = \sum_{i=1}^{m+1} d_i\varepsilon\frac{1}{\varepsilon} \leqslant 2\inf\Big\{\alpha\colon \sum_{i=1}^{m+1}\overline{\Phi}\Big(\frac{1}{\varepsilon\alpha}\Big)\leqslant 1\Big\}\cdot\inf\Big\{\alpha\colon \sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{\alpha}\Big)\leqslant 1\Big\}. \tag{2.1}$$

Оценим сверху второй инфимум в правой части (2.1). Для этого достаточно найти какое-то α, для которого будет выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{\alpha}\Big)\leqslant 1.$$

Возьмем $\alpha \geqslant \max\{V_\Phi f, 2\}$ и воспользуемся свойством 2 N-функции. Тогда

$$\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{\alpha}\Big) = \Phi\Big(\frac{2}{\alpha}\,\frac{d_i\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \frac{2}{\alpha}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{2}\Big). \tag{2.2}$$

Теперь оценим $\sum\limits_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\dfrac{d_i\varepsilon}{2}\Big)$. Пользуясь выпуклостью функции Φ, получаем

$$\sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{2}\Big) = \sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\frac{1}{2}(d_i-1)\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1}\Phi((d_i-1)\varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1}\Phi(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Имеет место следующая оценка: $(d_i-1)\varepsilon \leqslant \max\limits_{t\in I_i} f(t) - \min\limits_{t\in I_i} f(t)$. Действительно, если бы неравенство было в обратную сторону, то $d_i - 1$ квадрат покрывал бы график функции на отрезке I_i, что неверно в силу минимальности d_i. Продолжая цепочку неравенств (2.3), имеем

$$\sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\max_{t\in I_i} f(t) - \min_{t\in I_i} f(t)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{b-a}{\varepsilon}+1\Big)\Phi(\varepsilon)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\Big(V_\Phi f + (b-a+1)\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon}\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\overset{b}{\underset{a}{V_\Phi}} f + C_1\Big), \quad C_1 = (b-a+1)\sup_{0<\varepsilon<1}\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

В (2.2) вместо α возьмем $\alpha + C_1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m+1}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{\alpha+C_1}\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m+1}\frac{2}{\alpha+C_1}\Phi\Big(\frac{d_i\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \frac{2}{\alpha+C_1}\,\frac{\Big(\overset{b}{\underset{a}{V_\Phi}} f + C_1\Big)}{2} \leqslant 1.$$

Таким образом, мы показали, что второй инфимум в правой части (2.1) можно оценить величиной $A = \overset{b}{\underset{a}{V_\Phi}} f + C_1 + 1$.

Проверим, что $\dfrac{1}{\varepsilon\overline{\Phi}^{-1}\big(\frac{\varepsilon}{C_2}\big)}$ принадлежит множеству $\Big\{\alpha : \sum\limits_{i=1}^{m+1}\overline{\Phi}\big(\dfrac{1}{\varepsilon\alpha}\big)\leqslant 1\Big\}$, где $C_2 = b-a+1$. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{m+1}\overline{\Phi}\left(\frac{\varepsilon\overline{\Phi}^{-1}\big(\frac{\varepsilon}{C_2}\big)}{\varepsilon}\right) \leqslant (m+1)\frac{\varepsilon}{C_2} \leqslant \Big(\frac{b-a}{\varepsilon}+1\Big)\frac{\varepsilon}{C_2} \leqslant \frac{b-a+1}{C_2} = 1.$$

Значит, справедливо неравенство

$$\nu(f,\varepsilon) \leqslant 2A\inf\Big\{\alpha : \sum_{i=1}^{m+1}\overline{\Phi}\Big(\frac{1}{\varepsilon\alpha}\Big)\leqslant 1\Big\} \leqslant 2A\,\frac{1}{\varepsilon\overline{\Phi}^{-1}\big(\frac{\varepsilon}{C_2}\big)}.$$

Функция $\overline{\Phi}^{-1}$ выпукла вверх и $0 < \dfrac{1}{C_2} < 1$. Воспользуемся свойством, аналогичным свойству 2, для выпуклой вверх функции:

$$\overline{\Phi}^{-1}\Big(\frac{\varepsilon}{C_2}\Big) \geqslant \frac{\overline{\Phi}^{-1}(\varepsilon)}{C_2}.$$

И применим формулу $u < \Phi^{,-1}(u)\overline{\Phi}^{-1}(u)$ (см. [4, гл. 1, § 2, (2.10)]). Получаем

$$\nu(f,\varepsilon) \leqslant \frac{2AC_2}{\varepsilon\overline{\Phi}^{-1}(\varepsilon)} \leqslant \frac{2AC_2\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Покажем, что доказанное в теореме 2 вложение неулучшаемо.

Теорема 3. *Пусть* Φ — N*-функция. При этом* $\mu(\varepsilon) = o\Big(\dfrac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)$ *при* $\varepsilon \to +0$. *Тогда существует функция* f, *принадлежащая* $BV_\Phi[0,1] \cap C[0,1]$, *но не принадлежащая* F^μ.

Доказательство. Воспользуемся идеей конструкции из доказательства теоремы 1. Для $m \geqslant 1$ положим $f_m(x) = \Phi^{-1}\Big(\dfrac{1}{m}\Big)f_0(mx)$, где функция f_0 — из доказательства теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\mu(\varepsilon)\varepsilon^2}{\Phi^{-1}(\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Построим непрерывную функцию f на $[0,1]$ следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{m_k}(x),$$

где $a_k = \sqrt{\alpha\Big(\dfrac{1}{m_k}\Big)}$. Подпоследовательность $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ выберем из условий:

- Так же, как в теореме 1 можно выбирать a_k такими, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 1, \qquad \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \leqslant \frac{a_k}{18}. \tag{2.4}$$

- Можно задать m_k такими, чтобы, начиная с некоторого $k \geqslant N$, был верен следующий аналог неравенства (1.10):

$$\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \frac{1}{m_k}\Big) \leqslant \frac{a_k m_k^2}{18}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_k}\Big). \tag{2.5}$$

Действительно, так как Φ — N-функция, то верно равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{\Phi^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty$. Тогда можно выбирать m_{k+1} по m_k так, чтобы выполнялось

$$3^k a_k m_k \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_k}\Big) \leqslant a_{k+1} m_{k+1} \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_{k+1}}\Big).$$

При этом для $i < k$

$$\nu(a_i f_{m_i}, \varepsilon) \leqslant \frac{4a_i m_i}{\varepsilon}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_i}\Big).$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (1.9), получаем следующую оценку:

$$\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \frac{1}{m_k}\Big) \leqslant 4a_{k-1}m_{k-1}m_k\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big) + 4a_{k-1}m_{k-1}m_k\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big)\sum_{i=2}^{k-2} 3^{-i+2}$$
$$+ 12a_{k-1}m_{k-1}m_k\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big) \leqslant 22a_{k-1}m_{k-1}m_k\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_{k-1}}\Big) \leqslant \frac{22a_k m_k^2}{3^k}\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_k}\Big).$$

Тогда для $k \geqslant 6$ действительно верно (2.5).

Покажем, что $f \in BV_\Phi[0,1]$. Пусть $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$. Тогда

$$V_\Phi(f,\tau) = \sum_{j=1}^n \Phi\big(|f(t_j) - f(t_{j-1})|\big) \leqslant \sum_{j=1}^n \Phi\Big(\sum_{k=1}^\infty a_k|f_{m_k}(t_j) - f_{m_k}(t_{j-1})|\Big).$$

Воспользуемся неравенством Йенсена, получим

$$\begin{aligned} V_\Phi(f,\tau) &\leqslant \sum_{j=1}^n \Phi\Big(\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^N a_k|f_{m_k}(t_j) - f_{m_k}(t_{j-1})| + \Big(1 - \sum_{k=1}^N a_k\Big)\cdot 0\Big)\Big) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^N a_k\Phi\big(|f_{m_k}(t_j) - f_{m_k}(t_{j-1})|\big) + \Big(1 - \sum_{k=1}^N a_k\Big)\cdot\Phi(0)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^\infty a_k\sum_{j=1}^n \Phi\big(|f_{m_k}(t_j) - f_{m_k}(t_{j-1})|\big) = \sum_{k=1}^\infty a_k V_\Phi(f_{m_k},\tau). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Покажем, что для любого $m \geqslant 1$ вариация $V_\Phi f_m$ равна 2. А именно, покажем, что разбиение, на котором достигается супремум величины $V_\Phi(f_m,\tau)$, есть $\tau' = \Big\{\dfrac{j}{2m}\Big\}_{j=0}^{2m}$. Сначала убедимся, что если добавить еще одну точку в это разбиение, то сумма не увеличится. То есть пусть $\tau'' = \tau' \cup \{t\}$, $t \in [0,1]$. Тогда t принадлежит какому-то отрезку линейности функции $\Big[\dfrac{s-1}{2m}, \dfrac{s}{2m}\Big]$ для некоторого натурального $s \leqslant 2m$. Пусть, без ограничения общности, на этом отрезке функция возрастает. Тогда, воспользовавшись свойством 3, получаем

$$\begin{aligned} \Phi\Big(f_m\Big(\frac{s}{2m}\Big) - f_m\Big(\frac{s-1}{2m}\Big)\Big) &= \Phi\Big(f_m\Big(\frac{s}{2m}\Big) - f_m(t) + f_m(t) - f_m\Big(\frac{s-1}{2m}\Big)\Big) \\ &\geqslant \Phi\Big(f_m\Big(\frac{s}{2m}\Big) - f_m(t)\Big) + \Phi\Big(f_m(t) - f_m\Big(\frac{s}{2m}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $V_\Phi(f_m,\tau'') \leqslant V_\Phi(f_m,\tau')$. Таким же образом, добавляя по одной точке к разбиению τ', легко убедиться, что это неравенство верно для любого $\tau'' \supseteq \tau'$. Тогда, взяв произвольное разбиение τ, мы можем добавить в него точки τ', образовав новое разбиение $\tau'' = \tau \cup \tau'$. Так как, добавляя точки из τ' в разбиение, мы не уменьшаем суммы, то

$$V_\Phi(f_m,\tau) \leqslant V_\Phi(f_m,\tau'') \leqslant V_\Phi(f_m,\tau').$$

Таким образом, действительно, $V_\Phi f_m = V_\Phi(f_m,\tau')$. Поэтому

$$V_\Phi f_m = V_\Phi(f_m,\tau') = \sum_{j=1}^{2m}\Phi\Big(\Big|\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m}\Big)f_0\Big(\frac{j}{2}\Big) - \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m}\Big)f_0\Big(\frac{j-1}{2}\Big)\Big|\Big) = 2.$$

Отсюда и из (2.6) получаем, что $V_\Phi(f,\tau) \leqslant \sum\limits_{k=1}^\infty 2a_k \leqslant 2$, т. е. $f \in BV_\Phi[0,1]$.

Осталось показать, что $f \notin F^\mu$. Возьмем последовательность $\varepsilon_k = \dfrac{1}{m_k}$. Подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям, поставленным выше. Будем покрывать график функции $a_k f_{m_k}$ квадратами со стороной ε_k. Для покрытия каждого участка линейности необходимо

$$\left\lceil a_k \frac{\Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \right\rceil$$

квадратов. Таких участков линейности $2m_k$. Поэтому

$$\nu(a_k f_{m_k}, \varepsilon_k) \geqslant 2m_k \left\lceil \frac{a_k \Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \right\rceil \geqslant a_k \frac{2\Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2}. \tag{2.7}$$

Оценим функцию $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}$, воспользовавшись условием (2.4). Получаем

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i} \leqslant \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{m_{k+1}}\Big) \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \leqslant \frac{a_k}{18} \Phi^{-1}(\varepsilon_k).$$

В силу этой оценки

$$\nu\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big) \leqslant \frac{a_k}{18} \frac{\Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2}. \tag{2.8}$$

Воспользуемся неравенствами (1.12), (2.7), (2.8) и условием (2.5), тогда

$$\nu(f, \varepsilon_k) = \nu\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{m_k}, \varepsilon_k\Big) \geqslant \frac{1}{3}\nu(a_k f_{m_k}, \varepsilon_k) - 3\nu\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big) - 3\nu\Big(\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i f_{m_i}, \varepsilon_k\Big)$$
$$\geqslant \frac{2a_k \Phi^{-1}(\varepsilon_m)}{3\varepsilon_m^2} - \frac{3a_k}{18}\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2} - \frac{3a_k}{18}\frac{\Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2} = \frac{a_k \Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{3\varepsilon_{m_k}^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mu(\varepsilon_k)\Phi^{-1}(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k^2}}.$$

для любого $m_k,\ k \geqslant 6$. Итак, мы показали, что $\mu(\varepsilon_k) = o(\nu(f, \varepsilon_k))$. Следовательно, $f \notin F^\mu$.

Теорема доказана.

3. Равенство классов $BV[a,b] \cap C[a,b]$ и $F^{1/\varepsilon}$

Рассмотрим частный случай p-вариации. Пусть $\mu(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^{2-1/p}}$. Тогда согласно теореме 2 получаем $BV_p[a,b] \cap C[a,b] \subset F^\mu$. Заметим, что для классического случая $p = 1$ мы не можем воспользоваться теоремой, так как в этом случае $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$.

Теорема 4. *Для любой функции* $f \in C[a,b]$

$$\frac{1}{8} \cdot V_1 f \leqslant \sup_{0<\varepsilon<1} \varepsilon\nu(f, \varepsilon) \leqslant V_1 f + (b-a) + 1. \tag{3.1}$$

В частности, $BV_1[a,b] \cap C[a,b] = F^{1/\varepsilon}$.

Доказательство. Зафиксируем $0 < \varepsilon < 1$. Обозначения m, I_i, d_i имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 2. Оценим модуль фрактальности функции f. Имеем

$$\nu(f, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} d_i = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{m+1} d_i\varepsilon.$$

Оценим сумму так же, как в доказательстве теоремы 2:

$$\sum_{i=1}^{m+1} d_i\varepsilon = \sum_{i=1}^{m+1} (d_i - 1)\varepsilon + \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} \big(\max_{t\in I_i} f(t) - \min_{t\in I_i} f(t)\big)$$
$$+ \Big(\frac{b-a}{\varepsilon} + 1\Big)\varepsilon \leqslant V_1 f + (b-a) + 1.$$

Правое неравенство (3.1) доказано.

Докажем левое неравенство. Для любого разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a,b]$ рассмотрим

$$0 < \varepsilon(\tau) < \min_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i - t_{i-1}).$$

Пусть $d_i(\varepsilon(\tau))$ — минимальное количество квадратов из $S(\varepsilon(\tau))$, которыми можно покрыть график функции f на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$. Спроецируем квадраты, покрывающие график функции f на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ на ось OY. Получим (в силу непрерывности f) покрытие отрезками длины $\varepsilon(\tau)$ отрезка

$$\Big[\min_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t), \max_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t)\Big]$$

длины $\max\limits_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \min\limits_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t)$. Так как эти отрезки либо совпадают, либо их внутренности не пересекаются, то $d_i(\varepsilon(\tau))\varepsilon(\tau) \geqslant \max\limits_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) - \min\limits_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \geqslant |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. Получаем

$$V_1 f = \sup_\tau \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sup_\tau \sum_{i=1}^n d_i(\varepsilon(\tau))\varepsilon(\tau).$$

Рассмотрим величину $\overline{\nu}_{[t_{i-1},t_i]}(f, \varepsilon(\tau))$ — количество квадратов на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, взятых из минимального покрытия на всем отрезке $[a,b]$. Очевидно, что $d_i(\varepsilon(\tau)) \leqslant \overline{\nu}_{[t_{i-1},t_i]}(f, \varepsilon(\tau))$. Спроецируем квадраты на ось OX. В силу определения $\varepsilon(\tau)$ проекция квадрата может лежать максимум в двух соседних частях разбиения. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \overline{\nu}_{[t_{i-1},t_i]}(f, \varepsilon(\tau)) \leqslant 2\overline{\nu}(f, \varepsilon(\tau)).$$

Откуда, воспользовавшись неравенством (1.1), получаем

$$\sup_\tau \sum_{i=1}^n d_i(\varepsilon(\tau))\varepsilon(\tau) \leqslant \sup_\tau 2\overline{\nu}(f, \varepsilon(\tau))\varepsilon(\tau) \leqslant 8 \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon\nu(f, \varepsilon).$$

Таким образом, $\dfrac{1}{8} V_1 f \leqslant \sup\limits_{\varepsilon>0} \varepsilon\nu(f, \varepsilon)$.

Теорема доказана.

Покажем, что если $\varepsilon\mu(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$, то классы F^μ “значительно шире”, чем классы BV_Φ.

Теорема 5. *Пусть для μ выполнено* (1.2) *и $\varepsilon\mu(\varepsilon)$ — убывающая функция, а $\varepsilon^2\mu(\varepsilon)$ — возрастающая функция. Тогда для любой N-функции Φ*

$$F^\mu \not\subset BV_\Phi[0,1].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $\psi(\varepsilon) = \varepsilon\mu(\varepsilon)$ строго монотонна, то к ней существует обратная функция ψ^{-1}. Аналогично к функции $\tau(\varepsilon) = \varepsilon^2\mu(\varepsilon)$ существует обратная функция τ^{-1}. Возьмем последовательность чисел $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $x_k = \tau(\psi^{-1}(k))$. Выберем число n таким образом, что $x_n \leqslant 1$, а $x_{n-1} > 1$ (в случае $x_1 \leqslant 1$ считаем $n = 1$). Построим кусочно-линейную непрерывную функцию ρ следующим образом:

$$\rho(t) = \begin{cases} \dfrac{x_k + x_{k-1} - 2x}{x_{k-1} - x_k}, & t \in [x_k, \frac{x_{k-1}+x_k}{2}), \quad k \geqslant n+1, \\ \dfrac{2x - x_k - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & t \in [\frac{x_k+x_{k+1}}{2}, x_k), \quad k \geqslant n, \\ 1, & t \in [x_n, 1]. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет требованиям

$$\rho(x_k)=1,\ \rho\Big(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\Big)=0,\quad k\geqslant n.$$

Рассмотрим непрерывную функцию

$$f(t)=\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\psi(\tau^{-1}(t))}\Big)\rho(t).$$

Покажем, что $f\in F^\mu$. Пусть $\varepsilon>0$, покроем квадратами со стороной ε прямоугольник $[0,\tau(\varepsilon)]\times[0,M]$, где

$$M=\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\psi(\tau^{-1}(x_1))}\Big).$$

Это будет покрытие графика сужения функции f на отрезке $[0,\tau(\varepsilon)]$, которое состоит из $\left\lceil\frac{M}{\varepsilon}\right\rceil\cdot\left\lceil\frac{\tau(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\rceil=\left\lceil\frac{M}{\varepsilon}\right\rceil\cdot\lceil\psi(\varepsilon)\rceil$ квадратов. Оставшуюся часть графика будем покрывать на каждом участке линейности функции отдельно, для каждого участка достаточно не более $\left\lceil\frac{M}{\varepsilon}\right\rceil$ квадратов. Покажем, что таких участков не более чем $2\lceil\psi(\varepsilon)\rceil$. Действительно, пусть $k\geqslant\lceil\psi(\varepsilon)\rceil$. Тогда

$$x_k\leqslant\tau(\psi^{-1}(\psi(\varepsilon)))=\tau(\varepsilon),$$

т. е. $x_k\in[0,\psi(\varepsilon)]$, а этот участок мы уже покрыли. В итоге

$$\nu(f,\varepsilon)\leqslant\left\lceil\frac{M}{\varepsilon}\right\rceil\cdot\lceil\psi(\varepsilon)\rceil+2\left\lceil\frac{M}{\varepsilon}\right\rceil\cdot\lceil\psi(\varepsilon)\rceil\leqslant 12M\mu(\varepsilon),$$

что и означает $f\in F^\mu$.

Покажем, что $f\notin BV_\Phi[0,1]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[0,1]$

$$\tau=\Big\{x_k,\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\Big\}_{k=n}^{N}\cup\{0\}.$$

Тогда

$$V_\Phi f\geqslant\sum_{k=n}^{N}\Phi\Big(\Big|f\Big(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\Big)-f(x_k)\Big|\Big)$$

$$=\sum_{k=n}^{N}\Phi\bigg(\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\psi\big(\tau^{-1}(\tau(\psi^{-1}(k)))\big)}\Big)\bigg)=\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty,$$

т. е. $f\notin BV_\Phi[0,1]$.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Н. Ю. Антонову за постановку задачи, обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Xuefei Wang, Chunxia Zhao, Xia Yuan.** A review of fractal functions and applications // Fractals. 2022. Vol. 30, no. 6. Article no. 22501134. doi: 10.1142/S0218348X22501134
2. **Gridnev M.L.** Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 46–50.
3. **Гриднев М.Л.** Сходимость тригонометрических рядов Фурье функций с ограничением на фрактальность их графиков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 104–109. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-104-109

4. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИМФЛ, 1958. 272 с.
5. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИМФЛ, 1961. 937 с.
6. **Гриднев М.Л.** О классах функций с ограничением на фрактальность их графика // Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Yekaterinburg, 2017. Vol. 1894. С. 167–173. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr5.pdf

Поступила 17.03.2023
После доработки 20.10.2023
Принята к публикации 23.10.2023

Масютин Даниил Игоревич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: newselin@mail.ru

REFERENCES

1. Xuefei Wang, Chunxia Zhao, Xia Yuan. A review of fractal functions and applications. *Fractals*, 2022, vol. 30, no. 6, 22501134. doi: 10.1142/S0218348X22501134
2. Gridnev M.L. Divergence of Fourier series of continuous functions with restriction on the fractality of their graphs. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 46–50. doi: 10.15826/umj.2017.2.007
3. Gridnev M.L. Convergence of trigonometric Fourier series of functions with a constraint on the fractality of their graphs. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2020, vol. 308, Suppl. 1, pp. S106–S111. doi: 10.1134/S008154382002008X
4. Krasnosel'skii M.A., Rutitskii Ya.B. Convex functions and Orlicz spaces. Groningen: Noordhoff, 1961, 249 p. Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Rutitskii Ya.B. *Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha*, Moscow: GIMFL Publ., 1958, 272 p.
5. Bary N.K. A treatise on trigonometric series, vol. I,II. Oxford; NY: Pergamon Press, 1964, 553 p., 508 p. doi: 10.1002/zamm.19650450531 . Original Russian text published in Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady*, Moscow: GIMFL Publ., 1961, 937 p.
6. Gridnev M.L. On classes of functions with a restriction on the fractality of their graphs. In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, 2017, vol. 1894, pp. 167–173 (in Russian). Published at http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr5.pdf .

Received March 17, 2023
Revised October 20, 2023
Accepted October 23, 2023

Daniil Igorevich Masyutin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: newselin@mail.ru .

Cite this article as: D. I. Masyutin. On the connection between classes of functions of bounded variation and classes of functions with fractal graph. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 155–168.