ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.542

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С КОНЕЧНОЙ НЕТРИВИАЛЬНОЙ СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППОЙ[1]

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Доказываются следующие результаты. Пусть d — натуральное число, G — группа конечной четной экспоненты, в которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению m групп диэдра, где $m \leqslant d$. Тогда G конечна (и изоморфна прямому произведению групп диэдра в количестве, не превосходящем d). Далее, пусть G — периодическая группа, p — нечетное простое число. Если каждая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению $D_1 \times D_2$, где D_i — некоторая группа диэдра порядка $2p^{r_i}$, r_i — натуральное число, $i = 1, 2$, то $G = M_1 \times M_2$, где $M_i = \langle H_i, t \rangle$, t_i — элемент порядка 2, H_i — локально циклическая p-группа и $h^{t_i} = h^{-1}$ для любого $h \in H_i$, $i = 1, 2$. Наконец, пусть d — натуральное число, G — разрешимая периодическая группа, в которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению групп диэдра, взятых в количестве, не превосходящем d. Тогда G локально конечна и является расширением абелевой нормальной подгруппы посредством элементарной абелевой 2-подгруппы порядка, не превосходящего 2^{2d}.

Ключевые слова: периодическая группа, экспонента, силовская 2-подгруппа, группа диэдра, прямое произведение, насыщающее множество.

D. V. Lytkina, V. D. Mazurov. On periodic groups with a finite nontrivial Sylow 2-subgroup.

The following results are proved. Let d be a natural number, and let G be a group of finite even exponent such that each of its finite subgroups is contained in a subgroup isomorphic to a direct product of m dihedral groups, where $m \leqslant d$. Then G is finite (and isomorphic to a direct product of at most d dihedral groups). Next, suppose that G is a periodic group and p is an odd prime. If every finite subgroup of G is contained in a subgroup isomorphic to a direct product $D_1 \times D_2$, where D_i is a dihedral group of order $2p^{r_i}$ with natural r_i, $i = 1, 2$, then $G = M_1 \times M_2$, where $M_i = \langle H_i, t \rangle$, t_i is an element of order 2, H_i is a locally cyclic p-group, and $h^{t_i} = h^{-1}$ for every $h \in H_i$, $i = 1, 2$. Now, suppose that d is a natural number and G is a solvable periodic group such that every of its finite subgroups is contained in a subgroup isomorphic to a direct product of at most d dihedral groups. Then G is locally finite and is an extension of an abelian normal subgroup by an elementary abelian 2-subgroup of order at most 2^{2d}.

Keywords: periodic group, exponent, Sylow 2-subgroup, dihedral group, direct product, saturating set.

MSC: 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-146-154

К 70-летию Александра Алексеевича Махнева

Введение

С. В. Иванов [1] и И. Г. Лысенок [2] независимо показали, что для достаточно большой четной экспоненты n любая конечная подгруппа не локально конечной бернсайдовой группы экспоненты n изоморфна подгруппе прямого произведения групп диэдра.

В работе Иванова и А. Ю. Ольшанского [3] описаны конечные и локально конечные подгруппы бернсайдовых групп $B(m, n)$, где $m \geqslant 2$, $n = n_1 n_2 \geqslant 2^{48}$, n_1 нечетно, $n_2 = 2^s$, $s \geqslant 9$. В частности, доказано, что любая конечная подгруппа группы $B(m, n)$ вкладывается изоморфно в $D(2n_1) \times D(2n_2)^l$ для некоторого l, где $D(2r)$ — диэдральная группа порядка $2r$, и $B(m, n)$ для любого $l \geqslant 0$ содержит подгруппу, изоморфную $D(2n_1) \times D(2n_2)^l$.

А. К. Шлёпкин, А. Г. Рубашкин [4] доказали, что периодическая группа конечного периода, в которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе диэдра, сама является конечной

[1]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН (проект FWNF-2022-0002).

группой диэдра. В этой же работе [4] начато исследование периодических групп, насыщенных группами диэдра.

Согласно определению, введенному в оборот Шлёпкиным [5], группа G *насыщена* заданным множеством групп M, если любая конечная подгруппа группы G содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу множества M. Шлёпкин и Рубашкин показали, что периодическая группа G, насыщенная множеством групп диэдра, либо локально конечна, либо представима в виде

$$G = ABC = ACB = BCA = CBA,$$

где A — объединение возрастающей последовательности конечных групп диэдра, а B, C — локально циклические группы.

Основываясь на этой работе, Б. Амберг и Л. С. Казарин [6] показали, что периодическая группа, насыщенная конечными группами диэдра, локально конечна и является объединением возрастающей последовательности конечных групп диэдра.

Позднее, выступая на “часе проблем” XII школы-конференции по теории групп, Амберг и Казарин предложили следующий

В о п р о с [7]. Будет ли разрешимой периодическая группа, у которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению d конечных групп диэдра? В случае $d = 1$ это так.

В настоящей работе показано, что теорема Шлёпкина и Рубашкина обобщается на случай групп четной экспоненты, насыщенных прямыми произведениями групп диэдра, что полезно сравнить с упомянутыми выше результатами работ [1–3].

Теорема 1. *Пусть d — натуральное число, G — группа конечной четной экспоненты, в которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению m групп диэдра, где $m \leqslant d$. Тогда G конечна (и изоморфна прямому произведению групп диэдра в количестве, не превосходящем d).*

Теорема 1 непосредственно вытекает из более общей теоремы, где условие насыщенности прямыми произведениями групп диэдра заменяется на более общее индуктивное условие, которое наследуется подгруппами и факторгруппами.

Теорема 2. *Пусть G — группа конечной четной экспоненты, d — натуральное число, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(G)$ — некоторая совокупность конечных подгрупп H группы G, обладающих следующими свойствами: H — расширение d-порожденной абелевой группы посредством нетривиальной элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^d, и H не содержит в своем центре нетривиальных элементов нечетного порядка. Если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе из $\mathfrak{A}(G)$, то G конечна.*

Наконец, мы получаем положительный ответ на вопрос Амберга и Казарина в одном весьма частном случае.

Теорема 3. *Пусть G — периодическая группа, p — нечетное простое число. Если каждая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению $D_1 \times D_2$, где D_i — некоторая группа диэдра порядка $2p^{r_i}$, r_i — натуральное число, $i = 1, 2$, то $G = M_1 \times M_2$, где $M_i = \langle H_i, t_i \rangle$, t_i — элемент порядка 2, H_i — локально циклическая p-группа и $h^{t_i} = h^{-1}$ для любого $h \in H_i$, $i = 1, 2$.*

Для случая, когда G локально конечна, теорема 3 получена А. В. Кухаревым и А. А. Шлёпкиным в [8].

Кроме того, мы уточняем заключение вопроса Амберга и Казарина о разрешимости периодической группы, насыщенной прямыми произведениями групп диэдра.

Теорема 4. *Пусть d — натуральное число, G — разрешимая периодическая группа, в которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению групп диэдра, взятых в количестве, не превосходящем d. Тогда G локально конечна и является расширением абелевой нормальной подгруппы посредством элементарной абелевой 2-подгруппы порядка, не превосходящего 2^{2d}.*

1. Предварительные сведения

Предложение 1 (В. П. Шунков). 1. *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна* [9].

2. *В бесконечной 2-группе любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора* ([10], предложение 5).

3. *Если в периодической группе G существует конечная силовская 2-подгруппа, то любые две силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены* ([10], предложение 6).

Предложение 2. *Пусть G — периодическая группа, d — натуральное число и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(G)$ — некоторая совокупность подгрупп группы G, каждый элемент $H \in \mathfrak{B}$ которой удовлетворяет следующему условию: H — расширение d-порожденной конечной абелевой группы посредством элементарной абелевой группы порядка 2^d.*

Если некоторая силовская 2-подгруппа S из G конечна и любая конечная подгруппа из G содержится в некоторой подгруппе $H \in \mathfrak{B}$, то любые два элемента из S, сопряженные в G, сопряжены в S.

Если, кроме того, любая подгруппа $H \in \mathfrak{B}$ содержит силовскую 2-подгруппу из G, то подгруппа Фраттини $\Phi(S)$ группы S нормальна в G.

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Любая силовская 2-подгруппа группы G является расширением конечной абелевой 2-группы ранга, не превосходящего d, посредством элементарной абелевой группы порядка 2^d.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По п. 3 предложения 1 все силовские 2-подгруппы G конечны и сопряжены в G с S. По условию S содержится в подгруппе H, которая изоморфна элементу из $\mathfrak{B}$. Отсюда вытекает заключение леммы. □

Лемма 2. *Пусть $1 \neq V$ — 2-подгруппа из G.*

(a) *Если x — элемент нечетного порядка из $N_G(V)$, то $x \in C_G(V)$.*

(b) *$N_G(V) = C_G(V) \cdot R$, где R — любая силовская 2-подгруппа из $N_G(V)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) Подгруппа $\langle V, x\rangle$ конечна и поэтому содержится в подгруппе P, изоморфной элементу $\mathfrak{B}$. Так как $P = O(P) \cdot U$, где U — силовская 2-подгруппа из P, содержащая V, то $x \in O(P)$ и $[x, V] \leq O(P) \cap U = 1$.

(b) Из п. (a) вытекает, что $\overline{N} = N_G(V)/C_G(V)$ является 2-группой. Действительно, пусть $\overline{n} \in \overline{N}$ и n — прообраз $\overline{n}$ в $N_G(V)$. Тогда $n = n_0 n_2$, где n_0 — нечетная часть n, а n_2 — 2-часть n. Так как n_0 и n_2 — степени n, то $n_0 \in C_G(V)$ по п. (a) и $C_G(V)n = C_G(V)n_0n_2 = C_G(V)n_2$. Поэтому $\overline{n}$ является 2-элементом, и $\overline{N}$ — 2-группа.

Предположим, что $N_G(V) \neq C_G(V)R$. Пусть $\overline{R}$ — образ R в $\overline{N}$. Так как $\overline{R}$ конечна, то $N_{\overline{N}}(\overline{R}) \neq \overline{R}$ и $\overline{N}$ содержит подгруппу $\overline{N}_0$, содержающую $\overline{R}$ в качестве подгруппы индекса 2. Пусть N_0 — полный прообраз $\overline{N}_0$ в $N_G(V)$. Тогда $C_G(V)R \trianglelefteq N_0$. Пусть $x \in N_0$. Тогда R и R^x — силовские 2-подгруппы в $C_G(V)R$. По п. 3 предложения 1 $R^x = R^c$, где $c \in C_G(V)R$, и $cx^{-1} \in N_{N_0}(R)$, откуда $x \in C_G(V)N_{N_0}(R)$ и $N_0 = C_G(V)N_{N_0}(R)$.

Пусть $y \in N_{N_0}(R) \setminus C_G(V)$ и $y = y_0y_2$, где y_0 — нечетная часть y, а y_2 — 2-часть y. Если $y_2 = 1$, то $y \in C_G(V)$; противоречие. Поэтому $y_2 \neq 1$ и $\langle R, y_2\rangle$ — 2-подгруппа из $N_G(V)$, содержащая R и отличная от R; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть S и Q — силовские 2-подгруппы группы G. Если $N_S(S\cap Q)$ и $N_Q(S\cap Q)$ являются силовскими подгруппами в $N_G(S \cap Q)$, а элементы a и b содержатся в $S \cap Q$ и сопряжены в $N_G(S\cap Q)$, то a и b сопряжены в S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2

$$N_G(S \cap Q) = C_G(S \cap Q)N_S(S \cap Q),$$

поэтому a и b сопряжены в $N_S(S \cap Q) \leq S$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $t, t^x \in S$ для $x \in G$, то t и t^x сопряжены в S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 из [11] существуют элементы x_i, силовские 2-подгруппы Q_i группы G, $i \leqslant i \leqslant m$, и элемент $y \in N_G(S)$ со следующими свойствами:

(a) $x = x_1x_2 \cdots x_my$;

(b) $N_S(S\cap Q_i)$ и $N_{Q_i}(S\cap Q_i)$ — силовские подгруппы в $N_G(S\cap Q_i)$;

(c) $x_i \in N_G(S\cap Q_i)$ и x — 2-элемент, $q \leq i \leqslant m$;

(d) $t \in S \cap Q_1$ и $t^{x_1x_2\cdots x_i} \in S \cap Q_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m - 1$.

По лемме 3 t и t^{x_1} сопряжены в S, t^{x_1} и $t^{x_1x_2}$ сопряжены в S, поэтому t и $t^{x_1x_2}$ сопряжены в S. Продолжая эти рассуждения, получим, что t и $t^{x_1x_2\cdots x_m}$ сопряжены в S. Наконец, $t^{x_1x_2\cdots x_m}$ и $t^{x_1x_2\cdots x_my}$ сопряжены в $N_G(S) = C_G(S) \cdot S$ по лемме 2, т. е. сопряжены в S, поэтому t и t^x сопряжены в S.

Лемма доказана. Она заканчивает доказательство первой части предложения 2. □

Пусть теперь любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, содержащей некоторую силовскую 2-подгруппу группы G.

Пусть S — силовская 2-подгруппа из G, z — инволюция из $\Phi(S)$, принадлежащая центру S, и $g \in G$.

Если $\langle z, z^g\rangle$ является 2-группой, то в силу сопряженности силовских 2-подгрупп $\langle z^t, z^{gt}\rangle \leq S$ для некоторого элемента t из G и согласно первой части предложения $z^t = z$ и $z^{st} = z$, откуда $z^s = z$. Если же $\langle z, z^g\rangle$ не является 2-группой, то $p^z = p^{-1}$ для некоторого элемента p нечетного порядка из $\langle z, z^g\rangle$. По условию $\langle p, z\rangle$ содержится в конечной подгруппе H, содержащей некоторую силовскую 2-подгруппу S_1 группы G, и согласно первой части предложения $z \in Z(\Phi(S))$. Так как в H все элементы нечетного порядка по условию централизуют $\Phi(S_1)$, $p^z = p$; противоречие. Таким образом, $z^g = z$ для любого $g \in G$ и $\langle z\rangle \trianglelefteq G$. Поскольку $\overline{G} = G/\langle z\rangle$ удовлетворяет условиям предложения 2 и $\overline{\Phi(S)} = \Phi(\overline{S})$, можно повторять приведенные рассуждения до тех пор, пока $\Phi(S)$ не будет исчерпана. Это доказывает, что $\Phi(S) \trianglelefteq G$.

Предложение 2 доказано.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Сформулируем теорему 2 в более общем виде.

Теорема 2. *Пусть G — группа конечной четной экспоненты, d и m — натуральные числа, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(G)$ — некоторая совокупность конечных подгрупп H группы G, обладающих следующими свойствами: H — расширение m-порожденной абелевой подгруппы посредством нетривиальной элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^d, и*

$O(Z(H)) = 1$. *Здесь* $O(Z(H))$ — *наибольшая подгруппа нечетного порядка из центра* $Z(H)$ *группы* H. *Если любая конечная подгруппа группы* G *содержится в некоторой подгруппе* $H \in \mathfrak{B}(G)$, *то* G *конечна.*

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм. Пусть n — экспонента G.

Лемма 5. *Порядок любой конечной подгруппы группы* G *не превосходит* $n^m 2^d$.

Доказательство. Очевидно, $|H| \leqslant n^m 2^d$ для любой подгруппы $H \in \mathfrak{B}$. Так как любая конечная подгруппа из G содержится в некоторой $H \in \mathfrak{B}$, то лемма доказана. □

Лемма 6. *Все силовские* 2*-подгруппы из* G *конечны и сопряжены в* G.

Доказательство. По условию G содержит нетривиальную 2-подгруппу, а по лемме 5 порядок любой конечной 2-подгруппы из G ограничен числом $n^m 2^d$. Пусть S — конечная 2-подгруппа из G наибольшего порядка. Если S не является силовской 2-подгруппой группы G, то найдется такая 2-подгруппа $T \leq G$, что $S \leq T$ и $T \neq S$. По предложению 1 $N_T(S) \neq S$. Если $t \in N_T(S) \setminus S$, то $T_0 = \langle t, S\rangle$ — конечная 2-подгруппа и $|T_0| > |S|$. Это противоречит выбору S, откуда вытекает, что S — силовская 2-подгруппа G. По предложению 1 все силовские 2-подгруппы сопряжены с S и, в частности, конечны.

Лемма доказана.

Зафиксируем для дальнейшего силовскую 2-подгруппу S группы G.

Лемма 7. $C_G(S) \leq S$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в $C_G(S)$ есть нетривиальный элемент x нечетного порядка и $\langle S, x\rangle$ — конечная подгруппа. По условию $\langle S, x\rangle$ содержится в $H \in \mathfrak{B}$. Так как по условию все элементы нечетного порядка из H составляют нормальную абелеву подгруппу $O(H)$ нечетного порядка и $H = O(H) \cdot S$, то $x \in Z(H)$, что противоречит определению $\mathfrak{B}$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* G *локально конечна, то она конечна.*

Доказательство сразу вытекает из леммы 5. □

Лемма 9. *Если* $|S| = 2$, *то группа* G *конечна.*

Доказательство. Пусть t — инволюция, порождающая S. По лемме 7 $C_G(t) = S$. По предложению 1 G локально конечна, а по лемме 8 конечна.

Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы 2 проведем индукцией по $|S|$.

Пусть теорема неверна. По лемме 9 можно считать, что $|S| > 2$. Выберем инволюцию t из центра S. Пусть $C = C_G(t)$, $\overline{C} = C/\langle t\rangle$. Определим $\mathfrak{B}(\overline{C})$ как совокупность всех конечных подгрупп $\overline{H}$ группы $\overline{C}$, обладающих теми же свойствами, что и элементы $\mathfrak{B}$, т. е. $\overline{H}$ — расширение m-порожденной абелевой группы посредством нетривиальной элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^d, и $\overline{H}$ не содержит в своем центре нетривиальных элементов нечетного порядка.

Покажем, что любая конечная подгруппа $\overline{K}$ группы $\overline{C}$ содержится в $\overline{H} \in \mathfrak{B}(\overline{C})$. Полный прообраз K группы $\overline{K}$ в C содержится в $H = H^* \cap C$, где H^* — некоторый элемент $\mathfrak{B}$, содержащий K. По определению $\mathfrak{B}$, $H^* = H_0^* S^*$, где $H_0^* = O(H^*)$ и S^* — силовская 2-подгруппа из H^*. Так как $t \in K \leq H^*$, то S^* можно выбрать так, чтобы $t \in S^*$. Пусть $S^* \leq T$, где T — силовская 2-подгруппа G. По лемме 6 $T = S^g$, где $g \in G$. Поэтому $t \in S^g$, $t^{g^{-1}} \in S$. По предложению 2 t и $t^{g^{-1}}$ сопряжены в S. Поскольку $t \in Z(S)$, то $t = t^{g^{-1}} \in Z(S)$ и

$t \in Z(S^g) = Z(T)$, откуда $t \in Z(S^*)$ и $C_G(t) \geq S^*$ и $S^* \leq H$. Так как $C_{H^*}(S^*) \leq S^*$, то $C_H(S^*) \leq S^*$ и поэтому $Z(H) \cap O(H) = 1$. Отсюда $Z(\overline{H}) \cap O(\overline{H}) = 1$. Очевидно, что $\overline{H}$ — расширение m-порожденной абелевой группы посредством нетривиальной элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^d. Так как порядок силовской 2-подгруппы $\overline{C}$ меньше $|S|$, то по индукционному предположению $\overline{C}$ и, следовательно, C конечны. По предложению 1 группа G локально конечна. По лемме 8 G конечна и теорема 2 доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 3

Пусть G удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда $1 \leq H = A \times B$, где $A = \langle x, a \rangle$, $B = \langle y, b \rangle$, $|x| = p^{r_1}$, $|y| = p^{r_2}$, $r_i \geq 1$ для $i = 1, 2$, a и b — инволюции, $x^a = x^{-1}$, $y^b = y^{-1}$.

Положим $S = \langle a, b \rangle$. Тогда S — элементарная абелева группа порядка 4, которая по предложению 1 является силовской 2-подгруппой группы G, поскольку по условию порядок любой конечной 2-подгруппы из G не превосходит числа 4. Кроме того, любая силовская 2-подгруппа G сопряжена с S.

Лемма 10. *$C_G(S) = S$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть c — нетривиальный элемент нечетного порядка из $C = C_G(S)$. Подгруппа $H = \langle S, c \rangle$ конечна, и по условию $H \leq D_1 \times D_2$, где D_i — группа диэдра порядка $2n_i$, n_i нечетно, $i \in \{1, 2\}$. Так как S — силовская 2-подгруппа в H, то $C_H(S) = S$; противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть t — инволюция из S, $C = C_G(t)$. Тогда $C = P_t S$, где P_t — нормальная локально циклическая p-подгруппа из C и $x^u = x^{-1}$ для любого $x \in P$ и любого $u \in S \setminus \langle t \rangle$.*

Доказательство. Пусть $u \in S \setminus \langle t \rangle$. Тогда $S = \langle t, u \rangle$. По лемме 10 $C_C(u) = C_G(t) \cap C_G(u) = C_G(S) = S$, откуда по предложению 1 C — локально конечная группа.

Если x, y — элементы нечетных порядков из C, то $K = \langle x, y, t \rangle$ — конечная подгруппа. По условию $K \leq K_1 \times K_2$, где K_1 и K_2 — группы диэдра порядков вида $2p^r$, $r \geqslant 1$. Отсюда K — абелева группа из $C_{K_1 \times K_2}(t)$, поэтому K — циклическая группа и, в частности, $\langle x, y \rangle$ — циклическая p-группа. Значит, $C = PS$, где P — локально циклическая p-группа. Так как $C_P(u) = C_P(S) = 1$, то $x^u = x^{-1}$ для любого $x \in P$.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Группа G локально конечна.*

Доказательство. Предположим противное. По предложению 1 $C_G(t)$ бесконечна для любой инволюции $t \in S$. По лемме 11 $C_G(t)$ содержит единственную подгруппу $\langle c_t \rangle$ порядка p. Пусть вначале $t = a$, c_a — элемент порядка p из $C_G(a)$. Конечная подгруппа $\langle a, c_a \rangle$ по условию содержится в подгруппе $D = D_1 \times D_2$, где D_1 и D_2 — подгруппы диэдра. Если $a \notin D_1 \cup D_2$, то $|C_D(a)| = 4$ и $c_a \notin D$; противоречие. Поэтому можно считать, что $a \in D_1$, откуда $c_a \in D_2 \leq C_G(a)$. Если T — силовская 2-подгруппа из D, содержащая a, то $T \leq C_G(a) \geq S$. По предложению 1 T и S сопряжены в $C_G(a)$, и по лемме 11 $S = T^x$ для некоторого $x \in P_a$. Поэтому можно считать, что $S \leq D$. Если теперь s — инволюция из $S \cap D_2$, то $s = a$ или $s = ab$. В любом случае $c_a^s = c_a^{-1}$, и можно в качестве D_2 взять $\langle b, c_a \rangle$, после чего заменить D_1 на $\langle a, c_b \rangle$.

Таким образом, $\langle a, b, c_a, c_b \rangle = \langle a, c_b \rangle \times \langle b, c_a \rangle$, где $c_b^a = c_b^{-1}$, $c_a^b = c_a^{-1}$. Аналогично $\langle ab, b, c_{ab}, c_b \rangle = \langle ab, c_b \rangle \times \langle b, c_{ab} \rangle$, где $\langle ab, c_b \rangle$ и $\langle b, c_{ab} \rangle$ — группы диэдра. В частности, c_b централизует $\langle c_a, c_{ab} \rangle$ и поэтому перестановочен с $c = c_a c_{ab} c_a$. Отметим, что $c^b = c_a^{-1} c_{ab}^{-1} c_a^{-1} = c^{-1}$, и поэтому c_b централизует подгруппу диэдра $\langle c, b \rangle$.

Если $c^2 = 1$, то $1 = c_a c_{ab} c_a c_a c_{ab} c_a$ и $1 = c_a^2 c_{ab} c_a^2 c_{ab}$. Сопрягая это равенство элементом a, получим $1 = c_a^2 c_{ab}^{-1} c_a^2 c_{ab}^{-1}$. Поэтому $c_a^2 c_{ab} c_a^2 c_{ab} = c_a^2 c_{ab}^{-1} c_a^2 c_{ab}^{-1}$, откуда $c_{ab}^2 c_a^2 c_{ab}^2 = c_a^2$, т. е. $c_a^2 c_{ab}^2 c_a^{-2} = c_{ab}^{-2}$. Поскольку c_a^2 и c_{ab}^2 — нетривиальные элементы нечетных порядков, это равенство невозможно, откуда $c^2 \neq 1$ и $\langle c, b\rangle$ — неабелева группа диэдра, которую централизует c_b. По условию $\langle c, b, c_b\rangle$ содержится в прямом произведении $D = D_1 \times D_2$ двух групп диэдра D_1 и D_2, порядок каждой из которых — удвоенное нечетное число. Так как $C_D(b)$ не является 2-группой, то элемент b содержится в $D_1 \cup D_2$, скажем, в D_1, а тогда $c_b \in D_2$.

Если порядок c четен, то $c = c_1 t$, где t — инволюция из $\langle c\rangle$, $c_1 \in D_1$, $t \in C_D(D_1) = D_2$. Поэтому $c_b^t = c_b^{-1} \neq c_b$, что неверно, поскольку t содержится в централизаторе $\langle c_1, b\rangle$ и, следовательно, централизует c_b. Таким образом, порядок c нечетен, $c \in D_1$.

Пусть t — инволюция из D_2. Тогда $t \in C_G(b)$, $\langle b, t\rangle$ и S — силовские подгруппы в $C_G(b)$, поэтому найдется $x \in C_G(b)$ такой, что $t^x \in S$. Поскольку $\langle c_b\rangle$ — единственная подгруппа порядка p из $C_G(b)$, то $c_b^x \in \langle c_b\rangle$, и поэтому, заменив, если нужно, t^x на t и c_b на c_b^x, можно считать, что $D_1 = \langle c_b, t\rangle$, где $t \in S \setminus \langle b\rangle$, т. е. $t = a$ или $t = ab$. Покажем, что и в том, и в другом случае t не централизует c.

Действительно, пусть вначале $t = a$. Тогда $c^t = (c_a c_{ab} c_a)^{-1} = c_a c_{ab}^{-1} c_a$, откуда $c_a c_{ab} c_a = c_a c_{ab}^{-1} c_a$, т. е. $c_{ab} = c_{ab}^{-1}$, $c_{ab}^2 = 1$; противоречие.

Если же $t = ab$, то $c = c^t = c^{ab} = c_a^{-1} c_{ab} c_a^{-1} = c_a c_{ab} c_a$, т. е. $c_{ab} = c_a^2 c_{ab} c_a^2$, $c_{ab}^{-1} c_a^2 c_{ab} = c_a^{-2}$, что невозможно, поскольку c_a^2 и c_{ab} — нетривиальные элементы нечетных порядков.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Закончим доказательство теоремы 3. Поскольку G локально конечна, то для любых двух элементов x, y нечетных порядков из G группа $\langle x, y, S\rangle$ конечна и по условию содержится в прямом произведении двух групп диэдра, откуда x и y перестановочны. Таким образом, совокупность P всех элементов нечетного порядка из G составляет нормальную абелеву подгруппу, и $G = PS = P\langle a, b\rangle$.

Пусть $P_a = C_P(a)$, $P_b = C_P(b)$. Тогда $P_a \cap P_b = C_P(\langle a, b\rangle) = C_P(b) = 1$ и $P = P_a \times P_b$. Далее, $A = P_a\langle b\rangle$ и $B = P_b\langle a\rangle$ перестановочны, т. е. $G = A \times B$. По лемме 11 P_a и P_b — локально циклические группы, $x^b = x^{-1}$ для любого $x \in P_a$, $y^a = y^{-1}$ для любого $y \in P_b$, т. е. выполняется заключение теоремы 3. □

Доказательство теоремы 4. Индукция по ступени разрешимости n группы G. Если $d = 1$, то G абелева и удовлетворяет заключению теоремы.

Пусть $n > 1$ и $A = G^{(n-1)}$ — последний нетривиальный член ряда коммутантов группы G. Очевидно, A абелева и поэтому локально конечна. Для произвольной группы X определим совокупность $\mathfrak{A}(X)$ всех конечных подгрупп H, обладающих следующими свойствами: (a) H является расширением d-порожденной абелевой подгруппы посредством нетривиальной элементарной абелевой 2-подгруппы порядка, не превосходящего 2^d; (b) H не содержит в своем центре нетривиальных элементов нечетного порядка.

Докажем вначале следующее

Предложение 3. *Пусть d — натуральное число, G — разрешимая периодическая группа, в которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, являющейся расширением d-порожденной абелевой подгруппы посредством нетривиальной элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^d, и не содержащей нетривиальных элементов нечетного порядка в своем центре. Тогда G локально конечна.*

Доказательство. По условию любая конечная подгруппа группы G содержится в некоторой подгруппе из $\mathfrak{A}(G)$. Обозначим $\overline{G} = G/A$. Покажем, что любая конечная подгруппа $\overline{K}$ из $\overline{G}$ содержится в некоторой подгруппе из $\mathfrak{A}(\overline{G})$. Пусть $\langle \overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_m\rangle = \overline{K}$, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — некоторые прообразы в G элементов $k_i, i = 1, 2, \ldots, m$, и $K = \langle k_i \mid i = 1, 2, \ldots, m\rangle$. Ясно, что $\overline{K} = KA/A \simeq K/K \cap A$. Поскольку $\overline{K}$ конечна и K конечно порождена, то $K \cap A$ конечно порождена по следствию 7.2.1 из [12] и, следовательно, конечна.

По условию K содержится в подгруппе $H \in \mathfrak{A}(G)$. Если $\overline{H} = HA/A$ содержит в своем центре нетривиальный элемент нечетного порядка, то H также содержит такой элемент, что противоречит определению $\mathfrak{A}(G)$. Поэтому $\overline{H} \in \mathfrak{A}(\overline{G})$. По предположению индукции $\overline{G}$ локально конечна. Так как A абелева, то G также локально конечна.

Предложение доказано.

Закончим доказательство теоремы 4. Определим $\mathfrak{A}(G)$, как в предложении 3. Поскольку прямое произведение s групп диэдра, где $s \leqslant d$, содержится в $\mathfrak{A}(G)$, G локально конечна по предложению 3. Пусть $x, y, z, t \in G$ и $K = \langle x, y, z, t\rangle$. Тогда K содержится в прямом произведении групп диэдра, и поэтому $[x, y]$ и $[z, t]$ перестановочны, откуда вытекает, что коммутант G' группы G абелев. Так как G порождается инволюциями, то G/G' — элементарная абелева 2-группа порядка, не превосходящего 2^{2d}.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ivanov S.V.** The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Internat. J. Algebra Comput. 1994. Vol. 4, no. 1–2. P. 1–308. doi: 10.1142/S0218196794000026
2. **Лысенок И.Г.** Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. математическая. 1996. Т. 60, № 3. С. 5–224.
3. **Ivanov S.V., Olshanskii A.Yu.** On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents // J. Algebra. 1997. Vol. 195, no. 1. P. 281–284. doi: 10.1006/jabr.1996.6941
4. **Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г.** Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 114–125.
5. **Шлепкин А.К.** О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
6. **Amberg B., Kazarin L.** Periodic groups saturated by dihedral subgroups // Proc. Conf. Ischia group theory 2010. World Sci. Publ., 2012. P. 11–19. doi: 10.1142/9789814350051_0002
7. **Белоусов И.Н., Кондратьев А.С., Рожков А.В.** XII школа-конференция по теории групп, посвященная 65-летию со дня рождения А. А. Махнева (информационная статья) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 286–295. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-286-295
8. **Кухарев А.В., Шлепкин А.А.** Локально конечные группы, насыщенные прямым произведением двух конечных групп диэдра // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. “Математика”. 2023. Т. 44. С. 71–81. doi: 10.26516/1997-7670.2023.44.71
9. **Шунков В.П.** О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
10. **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 394–399.
11. **Lytkina D.V., Mazurov V.D.** Fusion of 2-elements in periodic groups with finite Sylow 2-subgroups // Siberian Electronic Math. Reports. 2020. Vol. 17. P. 1953–1958. doi: 10.33048/semi.2020.17.131
12. **Холл М.** Теория групп. М.: Иностранная литература, 1962. 467 p.

Поступила 5.05.2023
После доработки 21.06.2023
Принята к публикации 26.06.2023

Лыткина Дарья Викторовна
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики
г. Новосибирск
e-mail: daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН;
профессор кафедры
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики
г. Новосибирск
e-mail: vic.mazurov@gmail.com

REFERENCES

1. Ivanov S. V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents. *Internat. J. Algebra Comput.*, 1994, vol. 4, no. 1–2, pp. 1–308. doi: 10.1142/S0218196794000026
2. Lysenok I. G. Infinite Burnside groups of even exponent. *Izv. Math.*, 1996, vol. 60, no. 3, pp. 453–654. doi: 10.1070/IM1996v060n03ABEH000077
3. Ivanov S. V., Olshanskii A. Yu. On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents. *J. Algebra*, 1997, vol. 195, no. 1, pp. 241–284. doi: 10.1006/jabr.1996.6941
4. Shlepkin A. K., Rubashkin A. G. A class of periodic groups. *Algebra and Logic*, 2005, vol. 44, no. 1, pp. 65–71. doi: 10.1007/s10469-005-0008-x
5. Shlepkin A. K. On certain torsion groups saturated with finite simple groups. *Siberian Adv. Math.*, 1999, vol. 9, no. 2, pp. 100–108.
6. Amberg B., Kazarin L. Periodic groups saturated by dihedral subgroups. In: *Proc. Conf. Ischia group theory 2010*, World Sci. Publ., 2012, pp. 11–19. doi: 10.1142/9789814350051_0002
7. Belousov I. N., Kondrat'ev A. S., Rozhkov A. V. The 12th school–conference on group theory dedicated to the 65th birthday of A.A. Makhnev (informational paper). *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 286–295 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-286-295
8. Kukharev A. V., Shlepkin A. A. Locally finite groups saturated with direct product of two finite dihedral groups. *Izvestiya Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Matem.*, 2023, vol. 44, pp. 71–81 (in Russian). doi: 10.26516/1997-7670.2023.44.71
9. Shunkov V. P. On periodic groups with almost regular involution. *Algebra i Logika*, 1972, vol. 11, no. 4, pp. 470–493 (in Russian).
10. Lytkina D. V., Tukhvatullina L. R., Filippov K. A. The periodic groups saturated by finitely many finite simple groups. *Siberian Math. J.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 317–321. doi: 10.1007/s11202-008-0031-y
11. Lytkina D. V., Mazurov V. D. Fusion of 2-elements in periodic groups with finite Sylow 2-subgroups. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2020, vol. 17, pp. 1953–1958. doi: 10.33048/semi.2020.17.131
12. Hall M. *The theory of groups*, NY, Macmillan, 1959, 434 p. Translated to Russian under the title *Teoriya grupp*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1962, 467 p.

Received May 5, 2023
Revised June 21, 2023
Accepted June 26, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Program for Fundamental Research of the Russian Academy of Sciences (project no. FWNF-2022-0002).

Daria Viktorovna Lytkina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, 630102 Russia, e-mail: daria.lytkin@gmail.com .

Victor Danilovich Mazurov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member RAS, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, 630090; Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, 630102 Russia, e-mail: vic.mazurov@gmail.com .

Cite this article as: D. V. Lytkina, V. D. Mazurov. On periodic groups with a finite nontrivial Sylow 2-subgroup. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 146–154.