ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.542

ПРИМЕРЫ НЕПРОНОРМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ[1]

Б. Ли, Д. О. Ревин

С помощью недавних результатов Р. Уилсона доказано существование троек $(\mathfrak{X}, G, H)$, где $\mathfrak{X}$ — полный, т. е. замкнутый относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений, класс конечных групп, G — конечная простая группа и H — ее $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа, таких, что H не пронормальна в G. Этим опровергнута гипотеза, высказанная ранее вторым автором и В. Го.

Ключевые слова: полный класс групп, относительно максимальная подгруппа, пронормальная подгруппа, конечная простая группа.

B. Li, D. O. Revin. Examples of nonpronormal relatively maximal subgroups in finite simple groups.

Using R. Wilson's recent results, we prove the existence of triples $(\mathfrak{X}, G, H)$ such that $\mathfrak{X}$ is a complete (i.e. closed under taking subgroups, homomorphic images, and extensions) class of finite groups, G is a finite simple group, H is an $\mathfrak{X}$-maximal subgroup of G, and H is not pronormal in G. This disproves a conjecture stated earlier by the second author and W. Guo.

Keywords: complete class of groups, relatively maximal subgroup, pronormal subgroup, finite simple group.

MSC: 20E32 20E28 20D20

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-140-145

К 70-летию Александра Алексеевича Махнева

Введение

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.

Пронормальные подгруппы были введены Ф. Холлом [1] и естественно обобщают понятие нормальной подгруппы. Пронормальность тесно связана с широко используемым в теории групп рассуждением, известным как аргумент Фраттини. Свойство пронормальности играет важную роль как в самой теории групп, так и в ее комбинаторных приложениях. Изучению вопросов, связанных с этим свойством, посвящена обширная литература (см. обзоры [2–4]).

Замена нормальных подгрупп пронормальными часто открывает интересные и неожиданные возможности для обобщений. Так, в свое время Н. Ф. Сесекин и Г. М. Ромалис [5] ввели понятие *метагамильтоновой группы* — такой группы, где все неабелевы подгруппы нормальны. Метагамильтоновы группы изучали многие авторы (см. обзор [6] и современное замкнутое изложение в [7]). Этим группам посвящена одна из первых работ Александра Алексеевича Махнева [8]. Совсем недавно в серии статей [9–12] М. Бреша, М. Феррара и М. Тромбетти инициировали изучение более широких классов групп, чем метагамильтоновы, а именно, групп, в которых все неабелевы подгруппы пронормальны (так называемых, *прогамильтоновы группы*), или, еще более широко, все ненильпотентные подгруппы пронормальны. О том, что даже

[1]Б. Ли поддержан Национальным естественно-научным фондом Китая (NSFC), грант № 12371021. Работа Д .О. Ревина выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

класс прогамильтоновых групп существенно шире метагамильтоновых, свидетельствует классификация простых конечных прогамильтоновых групп [10] в сопоставлении с тем, что простая конечная метагамильтонова группа очевидным образом имеет простой порядок.

Вообще в простых группах, где отсутствуют собственные нетривиальные нормальные подгруппы, нахождение пронормальных подгрупп представляет особый интерес.

Помимо нормальных подгрупп пронормальными всегда будут максимальные подгруппы. Наряду с обычными максимальными подгруппами, которые максимальны по включению среди собственных подгрупп, рассматривают элементы решетки подгрупп, максимальные среди $\mathfrak{X}$-подгрупп, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, а под *$\mathfrak{X}$-группой* понимается группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$. Такие подгруппы называют *$\mathfrak{X}$-максимальными*. В дальнейшем мы будем предполагать, что класс $\mathfrak{X}$ является *полным в смысле Виланда* ([13], определение 11.1) т. е. замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. *Относительно максимальной подгруппой* будем называть подгруппу, которая $\mathfrak{X}$-максимальна для некоторого класса $\mathfrak{X}$.

С одной стороны, максимальные и относительно максимальные подгруппы — существенно разные понятия. Например, если G — неединичная конечная p-группа для простого числа p, то максимальные подгруппы в G — это в точности подгруппы индекса p, в то время как максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа в предположении полноты класса $\mathfrak{X}$ всегда одна — это либо G, либо 1 в зависимости от того, содержит $\mathfrak{X}$ группу порядка p или нет. С другой стороны, в конечной простой группе G максимальные подгруппы — это в точности $\mathfrak{X}$-максимальные подгруппы, где в качестве $\mathfrak{X}$ рассматривается класс групп, у которых порядки композиционных факторов строго меньше, чем порядок группы G. Поэтому естественной представляется

Проблема 1. *Всегда ли пронормальны относительно максимальные подгруппы простых конечных групп?*

В 2018 г. в работах ([4], проблема 5.20; [14], проблема 6) вопрос поставлен даже более широко, как вопрос о пронормальности так называемых $\mathfrak{X}$-субмаксимальных подгрупп, которые включают в себя $\mathfrak{X}$-максимальные подгруппы. Об $\mathfrak{X}$-субмаксимальных подгруппах и о том, какую роль вопросы пронормальности играют в их изучении, в особенности для простых и близких к ним групп, можно составить представление по работам [14–16] и обзору [4]. Дополнительным мотивом к изучению сформулированной проблемы является установленный в [17] факт пронормальности холловых подгрупп, т. е. таких, у которых индекс и порядок взаимно просты, или, эквивалентно, $\mathfrak{X}$-холловых подгрупп в конечных простых группах, т. е. $\mathfrak{X}$-подгрупп, индексы которых не делятся на простые числа p, если только $\mathfrak{X}$ содержит группу порядка p. Очевидно, что $\mathfrak{X}$-холловы подгруппы всегда $\mathfrak{X}$-максимальны.

В статье будет показано, что решение проблемы 1 отрицательно, и будет указан источник примеров, дающих такое решение. Таким образом, верна

Теорема 1. *Существуют полный класс конечных групп $\mathfrak{X}$, неабелева простая группа G и ее $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа H такие, что H не пронормальна в G.*

1. Вопрос Ашбахера и примеры Уилсона

В ([18], вопрос 8.2) М. Ашбахер поставил следующий вопрос. Пусть G — конечная простая или почти простая группа, и H — ее подгруппа, которая содержится точно в двух максимальных подгруппах M_1 и M_2 группы G и максимальна в каждой из них. Другими словами, решетка надгрупп подгруппы H выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ M_1 \arrow[dr, dash] & & M_2 \arrow[dl, dash] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Верно ли, что M_1 и M_2 не сопряжены в G?

В 2018 г. Р. Уилсон [19] указал большое количество интересных примеров, дающих отрицательный ответ на вопрос Ашбахера. Среди примеров простых групп G есть группы из Атласа [20], в том числе спорадические группы, бесконечные серии классических простых групп как ограниченного лиева ранга, так и неограниченных по рангу. Пример наименьшего порядка (см. [19], теорема 1) — группа Матьё $G = \mathrm{M}_{12}$, рассматриваемая как группа подстановок на 12 точках, и $H \cong A_5$ — транзитивная подгруппа в G. В этом случае H содержится точно в двух максимальных подгруппах, изоморфных $L_2(11)$, а все подгруппы $L_2(11)$ сопряжены в G.

Интересно, что во всех указанных в ([19], теоремы 1–11) примерах подгруппы $M_1 \cong M_2$ простые и за исключением примера, возникающего в ([19], теорема 7), подгруппы H простые. Пользуясь простотой подгрупп M_1 и M_2, в следующем разделе мы покажем, что во всех примерах Уилсона H — $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа для некоторого полного класса $\mathfrak{X}$ (предложение 1). А также покажем, что если группа G и ее подгруппы H, M_1 и M_2 дают пример для отрицательного ответа на вопрос Ашбахера, то H не пронормальна в G (предложение 3). Тем самым все примеры Уилсона оказываются также примерами непронормальных $\mathfrak{X}$-максимальных (и следовательно $\mathfrak{X}$-субмаксимальных) подгрупп в конечных простых группах.

2. Примеры Уилсона — решение проблемы 1

Предложение 1. *Пусть максимальная подгруппа M конечной группы G проста и H — максимальная подгруппа в M такая, что любая собственная подгруппа группы G, строго содержащая H, изоморфна M. Рассмотрим класс $\mathfrak{X}$ всех конечных групп, у которых порядки композиционных факторов строго меньше порядка группы M. Тогда класс $\mathfrak{X}$ полон и подгруппа H является $\mathfrak{X}$-максимальной в G.*

Доказательство. Полнота класса $\mathfrak{X}$ очевидна. Так как $H < M$, H — $\mathfrak{X}$-группа. Если $H < K \leqslant G$, то либо $K \cong M$, либо $K = G$. В первом случае $K \notin \mathfrak{X}$ в силу простоты группы M. Во втором случае также $K \notin \mathfrak{X}$, так как G содержит подгруппу $M \notin \mathfrak{X}$, а класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп. □

Если группа G действует на множестве Ω и $H \leqslant G$, то полагаем $\mathrm{Fix}\,H := \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x = \alpha$ для всех $x \in H\}$.

Предложение 2 (Критерий Ф. Холла, [1], теорема 6.6). *Подгруппа H группы G пронормальна тогда и только тогда, когда в любом транзитивном подстановочном представлении группы G нормализатор $\mathrm{N}_G(H)$ подгруппы H транзитивно действует на* $\mathrm{Fix}\,H$.

Предложение 3. *Пусть H — ненормальная подгруппа конечной группы G, содержащаяся в более чем одной максимальной подгруппе, и все максимальные подгруппы, содержащие H, сопряжены. Тогда H непронормальна.*

Доказательство. Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — все попарно различные максимальные подгруппы, содержащие H, т. е. решетка надгрупп подгруппы H выглядит, как на рис. 1.

По условию $n > 1$. Так как H ненормальна, найдется подгруппа $M \in \{M_1, \ldots, M_n\}$ такая, что $\mathrm{N}_G(H) \leqslant M$. Положим $\Omega = \{M^g \mid g \in G\}$. Тогда G транзитивно действует сопряжениями на множестве Ω и $M_1, \ldots, M_n \in \Omega$. Заметим, что $M^g \in \mathrm{Fix}\,H$ тогда и только тогда, когда H нормализует M^g. Если при этом $H \nleqslant M^g$, то $G = HM^g$ и $M^g \trianglelefteqslant G$. Но тогда $M = M^g$, $\Omega = \{M\}$ и $n = 1$ вопреки условию. Следовательно, $H \leqslant M^g$. Тем самым мы установили, что

$$\mathrm{Fix}\,H = \{M^g \mid g \in G \text{ и } H \leqslant M^g\} = \{M_1, \ldots, M_n\}.$$

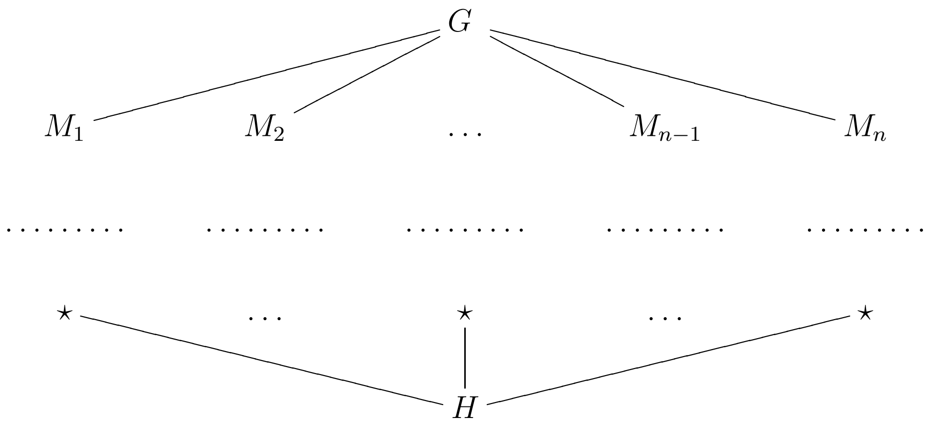

Рис. 1. Решетка надгрупп подгруппы H.

Допустим, подгруппа H пронормальна в G. Тогда в силу предложения 2 группа $\mathrm{N}_G(H)$ транзитивно действует на $\mathrm{Fix}\, H$, т. е. для любого $i = 1, \ldots, n$ найдется элемент $x \in \mathrm{N}_G(H)$ такой, что $M_i = M^x$. Но $M^x = M$, поскольку $\mathrm{N}_G(H) \leqslant M$. Снова $n = 1$; противоречие. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 получается применением предложений 1 и 3 (где считаем $n = 2$) к группе G, ее подгруппе H и промежуточным подгруппам M_1 и M_2 в любой из теорем 1–11 в [19].

Теорема 1 доказана.

3. Заключительные замечания

В свете активно изучаемого в последние годы вопроса о том, когда подгруппы нечетного индекса в простых группах пронормальны, отметим, что все примеры подгрупп H в простых группах G из [19] имеют четные индексы. Поэтому открыта[2]

Проблема 2. *Всегда ли пронормальны $\mathfrak{X}$-(суб)максимальные подгруппы нечетного индекса в простых конечных группах?*

Подгруппы H также в этих примерах всегда являются простыми неабелевыми группами, в частности неразрешимы и имеют четные порядки.

Проблема 3. *Всегда ли пронормальны $\mathfrak{X}$-(суб)максимальные подгруппы простых конечных групп, если полный класс $\mathfrak{X}$ состоит только из разрешимых групп или только из групп нечетного порядка?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hall P.** Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6 / Cambridge: University of Cambridge, 1951–1967. Available at: http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788 .
2. **de Giovanni F., Trombetti M.** Pronormality in group theory // Adv. Group Theory Appl. 2020. Vol. 9. P. 123–149. https://doi.org/10.32037/agta-2020-00
3. **Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O.** On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups // Groups St Andrews 2017 in Birmingham / eds. C.M. Campbell, M.R. Quick, C.W. Parker, E.F. Robertson, C. M. Roney-Dougal. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 2019. P. 406–418 (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 455). doi: 10.1017/9781108692397.016
4. **Guo W., Revin D.O.** Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups in finite groups // Comm. Math. Stat. 2018. Vol. 6, no. 3. P. 289–317. https://doi.org/10.1007/s40304-018-0154-9

[2]Напомним, класс $\mathfrak{X}$ предполагается полным. При этом $\mathfrak{X}$-субмаксимальная подгруппа простой группы G — это пересечение G и $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппы из $\mathrm{Aut}\, G$ (см. [14], предложение 7).

5. **Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф.** О метагамильтоновых группах. I–III // Мат. зап. УрГУ. 1966. Т. 5, тетр. 2. С. 45–49; Т. 6, тетр. 5. С. 52–58; 1969/70. Т. 7, тетр. 3. С. 195–199.
6. **De Falco M., de Giovanni F., Musella C.** Metahamiltonian groups and related topics // Int. J. Group Theory. 2013. Vol. 2, no. 1. P. 117–129.
7. **Brescia M., Ferrara M., Trombetti M.** The structure of metahamiltonian groups // Jpn. J. Math. 2023. Vol. 18, no. 1. P. 1–65. doi: 10.1007/s11537-023-2216-3
8. **Махнев А.А.** О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. УрГУ. 1976. Т. 10, тетр. 1. С. 60–75.
9. **Brescia M., Ferrara M., Trombetti M.** Groups whose subgroups are either abelian or pronormal // Kyoto J. Math. 2023. Vol. 63, no. 3. P. 471–500. doi: 10.1215/21562261-10607307
10. **Brescia M., Trombetti M.** Locally finite simple groups whose non-Abelian subgroups are pronormal // Comm. Algebra. 2023. Vol. 51, no. 8. P. 3346–3353. doi: 10.1080/00927872.2023.2182604
11. **Ferrara M., Trombetti M.** Groups with many pronormal subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2022. Vol. 105, no. 1. P. 75–86. doi: 10.1017/S0004972721000277
12. **Ferrara M., Trombetti M.** Locally finite simple groups whose nonnilpotent subgroups are pronormal // Bull. Austral. Math. Soc. (publ. online). 2023. P. 1–10. doi: 10.1017/S0004972723000576
13. **Wielandt H.** Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung. Lecture notes Math. Inst. Univ. Tübingen (1963/64) // Helmut Wielandt. Mathematische Werke/Mathematical Works, Vol. 1 (Group Theory). Berlin: de Gruyter, 1994. P. 607–655.
14. **Го В., Ревин Д.О.** О максимальных и субмаксимальных $\mathfrak{X}$-подгруппах // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 1. С. 14–42. doi: 10.17377/alglog.2018.57.102
15. **Guo W., Revin D.O.** Classification and properties of the π-submaximal subgroups in minimal nonsolvable groups // Bull. Math. Sci. 2018. Vol. 8, no. 2. P. 325–351. doi: 10.1007/s40304-018-0154-9
16. **Ревин Д.О.** Субмаксимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в знакопеременных группах // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 387–401. doi: 10.33048/smzh.2021.62.210
17. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542. doi: 10.1134/S0037446612020231
18. **Aschbacher M.** The subgroup structure of finite groups // Finite simple groups: thirty years of the Atlas and beyond // Contemp. Math. AMS. 2017. Vol. 694 P. 111–121.
19. **Wilson R.A.** A negative answer to a question of Aschbacher // Albanian J. Math. 2018. Vol. 12, no. 1. P. 24–31. doi: 10.51286/albjm/1544605486
20. **Conway J.H., et al.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

Поступила 28.08.2023
После доработки 14.09.2023
Принята к публикации 18.09.2023

Li Baojun
PhD, Prof.
School of Sciences, Nantong University, Nantong, P.R. China
e-mail: libj@ntu.edu.cn

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
г. Новосибирск;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: revin@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Hall P. *Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6.* Cambridge: University of Cambridge, 1951–1967. Available at: http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788 .
2. de Giovanni F., Trombetti M. Pronormality in group theory. *Adv. Group Theory Appl.*, 2020, vol. 9, pp. 123–149. doi: 10.32037/agta-2020-00

3. Kondrat'ev A.S., Maslova N.V., Revin D.O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups. In: Groups St Andrews 2017 in Birmingham, eds. C.M. Campbell, M.R. Quick, C.W. Parker, E. F. Robertson, C.M. Roney-Dougal, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 455, Cambridge: Cambridge Univ. Press., 2019, pp. 406–418. doi: 10.1017/9781108692397.016
4. Guo W., Revin D.O. Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups in finite groups. *Comm. Math. Stat.*, 2018, vol. 6, no. 3, pp. 289–317. doi: 10.1007/s40304-018-0154-9
5. Romalis G.M., Sesekin N.F. Metahamiltonian groups, I–III. *Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.*, 1966, vol. 5, no. 2, pp. 45–49; vol. 6, no. 5, pp. 52–58; 1969/70, vol. 7, no. 3, pp. 195–199 (in Russian).
6. De Falco M., de Giovanni F., Musella C. Metahamiltonian groups and related topics. *Int. J. Group Theory.*, 2013, vol. 2, no. 1, pp. 117–129.
7. Brescia M., Ferrara M., Trombetti M. The structure of metahamiltonian groups. *Jpn. J. Math.*, 2023, vol. 18, no. 1, pp. 1–65. doi: 10.1007/s11537-023-2216-3
8. Makhnev A.A. Finite meta-Hamiltonian groups. *Ural. Gos. Univ. Mat. Zap.*, 1976, vol. 10, no. 1, pp. 60–75 (in Russian).
9. Brescia M., Ferrara M., Trombetti M. Groups whose subgroups are either abelian or pronormal. *Kyoto J. Math.*, 2023, vol. 63, no. 3, pp. 471–500. doi: 10.1215/21562261-10607307
10. Brescia M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose non-Abelian subgroups are pronormal. *Comm. Algebra*, 2023, vol. 51, no. 8, pp. 3346–3353. doi: 10.1080/00927872.2023.2182604
11. Ferrara M., Trombetti M. Groups with many pronormal subgroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2022, vol. 105, no. 1, p. 75–86. doi:10.1017/S0004972721000277
12. Ferrara M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose nonnilpotent subgroups are pronormal. *Bull. Austral. Math. Soc.*: publ. online, 2023, pp. 1–10. doi: 10.1017/S0004972723000576
13. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung. *Lecture notes Math. Inst. Univ. Tübingen (1963/64).* In book: Helmut Wielandt. Mathematische Werke/Mathematical Works, vol. 1 (Group theory), Berlin: de Gruyter, 1994, pp. 607–655.
14. Guo W., Revin D.O. Maximal and submaximal $\mathfrak{X}$-subgroups. *Algebra and Logic*, 2018, vol. 57, no. 1, pp. 9–28. doi: 10.1007/s10469-018-9475-8
15. Guo W., Revin D.O. Classification and properties of the π-submaximal subgroups in minimal nonsolvable groups. *Bull. Math. Sci.*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 325–351. doi: 10.1007/s40304-018-0154-9
16. Revin D.O. Submaximal soluble subgroups of odd index in alternating groups. *Siberian Math. J.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 313–323. doi: 10.1134/S0037446621020105
17. Vdovin E.P., Revin D.O. Pronormality of Hall subgroups in finite simple groups. *Siberian Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 419–430. doi: 10.1134/S0037446612020231
18. Aschbacher M. The subgroup structure of finite groups. Finite simple groups: thirty years of the Atlas and beyond. *Contemp. Math. AMS*, 2017, vol. 694, pp. 111–121.
19. Wilson R.A. A negative answer to a question of Aschbacher. *Albanian J. Math.*, 2018, vol. 12, no. 1, pp. 24–31. doi: 10.51286/albjm/1544605486
20. Conway J.H., et al. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.

Received August 28, 2023
Revised September 14, 2023
Accepted September 18, 2023

Funding Agency: The research of B. Li was supported by National Natural Science Foundation of China, (NSFC), grant no.12371021. The research of D. O. Revin was carried out within the State Contract of the Sobolev Institute of Mathematics (FWNF-2022-0002).

Baojun Li, PhD, Prof., School of Sciences, Nantong University, Nantong, 226019 P.R. China, e-mail: libj@ntu.edu.cn .

Danila Olegovich Revin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberia Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: revin@math.nsc.ru .

Cite this article as: B. Li, D. O. Revin. Examples of non-pronormal relatively maximal subgroups in finite simple groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 140–145 .