ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.518.86

О КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА — СЕГЁ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕЙЛЯ ПОРЯДКА, МЕНЬШЕГО ЕДИНИЦЫ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ И ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ[1]

А. О. Леонтьева

Во множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов f_n порядка n с комплексными коэффициентами рассматривается производная Вейля (дробная производная) $f_n^{(\alpha)}$ вещественного неотрицательного порядка α. Изучается вопрос о константе в неравенстве Бернштейна — Сегё $\left\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}\sin\theta\right\| \leqslant B_n(\alpha,\theta)\|f_n\|$ в равномерной норме. Такое неравенство хорошо изучено при $\alpha \geqslant 1$. Г. Т. Соколов в 1935 г. доказал, что оно выполняется с константой n^α при всех $\theta \in \mathbb{R}$. При $0 < \alpha < 1$ о величине $B_n(\alpha,\theta)$ известно существенно меньше. В данной статье при $0 < \alpha < 1$ и $\theta \in \mathbb{R}$ получено предельное соотношение $\lim_{n\to\infty} B_n(\alpha,\theta)/n^\alpha = \mathcal{B}(\alpha,\theta)$, где $\mathcal{B}(\alpha,\theta)$ — точная константа в аналогичном неравенстве для целых функций экспоненциального типа не выше 1, ограниченных на вещественной оси. Значение $\theta = -\pi\alpha/2$ соответствует производной Рисса — важному частному случаю оператора Вейля — Сегё. В этом случае для величины $B_n(\alpha) = B_n(\alpha, -\pi\alpha/2)$ получена точная асимптотика при $n \to \infty$.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, целые функции экспоненциального типа, оператор Вейля — Сегё, производная Рисса, неравенство Бернштейна, равномерная норма.

A. O. Leont'eva. On constants in the Bernstein–Szegő inequality for the Weyl derivative of order less than unity of trigonometric polynomials and entire functions of exponential type in the uniform norm.

In the set $\mathscr{T}_n$ of trigonometric polynomials f_n of order n with complex coefficients, the Weyl derivative (fractional derivative) $f_n^{(\alpha)}$ of real nonnegative order α is considered. We study the question about the constant in the Bernstein–Szegő inequality $\left\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}\sin\theta\right\| \leqslant B_n(\alpha,\theta)\|f_n\|$ in the uniform norm. This inequality has been well studied for $\alpha \geqslant 1$: G. T. Sokolov proved in 1935 that it holds with the constant n^α for all $\theta \in \mathbb{R}$. For $0 < \alpha < 1$, there is much less information about $B_n(\alpha,\theta)$. In this paper, for $0 < \alpha < 1$ and $\theta \in \mathbb{R}$, we establish the limit relation $\lim_{n\to\infty} B_n(\alpha,\theta)/n^\alpha = \mathcal{B}(\alpha,\theta)$, where $\mathcal{B}(\alpha,\theta)$ is the sharp constant in the similar inequality for entire functions of exponential type at most 1 that are bounded on the real line. The value $\theta = -\pi\alpha/2$ corresponds to the Riesz derivative, which is an important particular case of the Weyl–Szegő operator. In this case, we derive an exact asymptotic expansion for the quantity $B_n(\alpha) = B_n(\alpha, -\pi\alpha/2)$ as $n \to \infty$.

Keywords: trigonometric polynomials, entire functions of exponential type, Weyl–Szegő operator, Riesz derivative, Bernstein inequality, uniform norm.

Дорогому учителю
Виталию Владимировичу Арестову
с искренней благодарностью
в честь его юбилея

MSC: 26A33, 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-130-139

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

1. Введение

1.1. Оператор Вейля — Сегё для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа

Пусть $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ — множество тригонометрических полиномов

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{1.1}$$

порядка n с комплексными коэффициентами. Вместе с полиномом (1.1) будем рассматривать сопряженный ему полином

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k \cos kx - a_k \sin kx) = i \sum_{k=-n}^{n} c_k (\operatorname{sign} k) e^{ikx}.$$

Для произвольного $\alpha \geqslant 0$ *дробной производной*, или *производной Вейля* порядка α полинома (1.1), называется ([1], см. также гл. 4, §19 [2]) полином

$$D^\alpha f_n(x) = D_+^\alpha f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha e^{i\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sign} k} e^{ikx};$$

при $\alpha \in \mathbb{N}$ производная Вейля совпадает с классической производной: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. В дальнейшем будем для произвольного $\alpha > 0$ вместо $D^\alpha f_n$ писать $f_n^{(\alpha)}$.

Наряду с D_+^α рассмотрим оператор ([2], §19, п. 1)

$$D_-^\alpha f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kx - \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kx - \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sign} k} e^{ikx};$$

операторы D_-^α и D_+^α связаны соотношением

$$D_-^\alpha f_n(x) = (D_+^\alpha g_n)(-x), \quad \text{где} \quad g_n(x) = f_n(-x). \tag{1.2}$$

Наконец, для вещественного θ определим оператор

$$\begin{gathered} D_\theta^\alpha f_n(x) = f_n^{(\alpha)}(x)\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}(x)\sin\theta \\ = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha e^{i\left(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right)\operatorname{sign} k} e^{ikx}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

будем называть его *оператором Вейля — Сегё*.

При $\theta = -\pi\alpha/2$ оператор (1.3) является *производной Рисса*

$$D_R^\alpha f_n(x) = D_{-\pi\alpha/2}^\alpha f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha e^{ikx}.$$

Для $m \in \mathbb{N}$ при $\alpha = 2m$ производная Рисса превращается в классическую производную порядка $2m$: $D_R^{2m} f_n = (-1)^m f_n^{(2m)}$. При $\alpha = 2m - 1$ производная Рисса является производной порядка $2m-1$ сопряженного полинома: $D_R^{2m-1} f_n = (-1)^{m-1} \widetilde{f}_n^{(2m-1)}$.

При $\theta = \pi(1-\alpha)/2$ оператор (1.3) является *сопряженной производной Рисса*

$$D_{\pi(1-\alpha)/2}^\alpha f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha (b_k \cos kx - a_k \sin kx) = i \sum_{k=-n}^{n} c_k |k|^\alpha (\operatorname{sign} k) e^{ikx}.$$

При $0<\alpha<1$ для производной Вейля $D^\alpha f_n$ полинома $f_n\in\mathscr{T}_n$ справедливо (см. [1]) интегральное представление

$$D^\alpha f_n(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{f_n(x)-f_n(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi. \tag{1.4}$$

Формулы (1.4) и (1.2) влекут подобное представление для оператора D^α_-:

$$D^\alpha_- f_n(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{f_n(x+\xi)-f_n(x)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi. \tag{1.5}$$

Оператор Вейля — Сегё при положительных нецелых α представи́м (см. лемму 2 в [3]) в виде линейной комбинации операторов D^α_+ и D^α_-:

$$D^\alpha_\theta=\frac{\sin(\pi\alpha+\theta)}{\sin\pi\alpha}D^\alpha_+-\frac{\sin\theta}{\sin\pi\alpha}D^\alpha_-.$$

Отсюда и из (1.4) и (1.5) вытекает представление

$$D^\alpha_\theta f_n(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{f_n(x+\xi)\sin\theta+f_n(x)\big(\sin(\pi\alpha+\theta)-\sin\theta\big)-f_n(x-\xi)\sin(\pi\alpha+\theta)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi. \tag{1.6}$$

Пусть $\mathbf{B}_\sigma$ – введенный С. Н. Бернштейном класс целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma>0$, ограниченных на вещественной оси (см. [4]; [5], гл. 4, § 83). Отметим, что $\mathscr{T}_n\subset\mathbf{B}_\sigma$ при $\sigma=n$. Будем считать, что на функциях из $\mathbf{B}_\sigma$ оператор Вейля — Сегё при $0<\alpha<1$ определяется сингулярным интегралом (1.6).

1.2. Неравенства Бернштейна — Сегё для тригонометрических полиномов и целых функций

В дальнейшем для функции $g\in\mathbf{B}_\sigma$ обозначим через $\|g\|$ ее равномерную норму на вещественной оси

$$\|g\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|.$$

Нас интересуют неравенства Бернштейна — Сегё для тригонометрических полиномов в равномерной норме

$$\|D^\alpha_\theta f_n\|\leqslant B_n(\alpha,\theta)\|f_n\|,\quad f_n\in\mathscr{T}_n, \tag{1.7}$$

и подобные им неравенства для целых функций экспоненциального типа

$$\|D^\alpha_\theta f\|\leqslant\mathcal{B}_\sigma(\alpha,\theta)\|f\|,\quad f\in\mathbf{B}_\sigma. \tag{1.8}$$

Изучение неравенств Бернштейна — Сегё имеет давнюю историю. Она хорошо изложена в статьях [6–8].

1.2.1. Случай $\alpha\geqslant 1$. При $\alpha\geqslant1$ неравенства (1.7) и (1.8) хорошо изучены. Они выполняются с константами n^α и σ^α соответственно и обращаются в равенство на функциях $\cos nx$ (или $\cos\sigma x$). Неравенство (1.7) с константой n^α получено в 1935 г. Г. Т. Соколовым [9] для производной Рисса и сопряженной производной Рисса. Для произвольного оператора Вейля — Сегё его обосновал А. И. Козко [10] в пространствах $L_p(\mathbb{T})$ для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$. Неравенство (1.8) для производных Рисса и Вейля с константой σ^α получил П. И. Лизоркин [11], а в общем случае, для оператора Вейля — Сегё, доказал О. Л. Виноградов [12]. Все эти результаты были получены при помощи квадратурных формул по равномерным узлам, коэффициенты которых знакочередуются при $\alpha \geqslant 1$.

1.2.2. Случай $0 < \alpha < 1$. При $0 < \alpha < 1$ неравенства (1.7) и (1.8) изучены меньше. Функции $\cos nt$ и соответственно $\cos \sigma x$ дают оценку снизу $B_n(\alpha,\theta) \geqslant n^\alpha$ (или $\mathcal{B}_\sigma(\alpha,\theta) \geqslant \sigma^\alpha$), но, скорее всего, эта оценка грубая.

В случае производной Рисса Г. Т. Соколов [9] получил при $0 < \alpha < 1$ оценку

$$B_n(\alpha) = B_n(\alpha, -\pi\alpha/2) \leqslant \frac{2n^\alpha}{\alpha+1}.$$

П. Сайвин [13] перенес ее на целые функции. Недавно нами (см. [14]) получено точное неравенство

$$\|D_R^\alpha f\| \leqslant \sigma^\alpha \mathcal{B}(\alpha)\|f\|, \quad f \in \mathbf{B}_\sigma, \quad 0<\alpha<1; \quad \mathcal{B}(\alpha) = \frac{2\pi\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\Bigl(\dfrac{1-\alpha}{2}\Bigr)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}. \tag{1.9}$$

Для сопряженной производной Рисса Г. Т. Соколов получил порядковый результат

$$c_1(\alpha)n^\alpha \leqslant B_n(\alpha, \pi(1-\alpha)/2) \leqslant c_2(\alpha)n^\alpha, \quad 0<\alpha<1.$$

Этот результат в 1950 г. обобщил С. Б. Стечкин [15] для более широкого класса операторов.

В случае производной Вейля наилучшими являются оценки

$$n^\alpha \leqslant B_n(\alpha,0) \leqslant 2^{1-\alpha}n^\alpha, \quad 0<\alpha<1,$$

где оценку сверху получил Г. Вилмес [16]. Менее точные оценки сверху были ранее получены Т. Бангом [17] и С. П. Гейсбергом [18].

1.3. Формулировка результата

Обозначим через $\mathcal{B}(\alpha,\theta) = \mathcal{B}_1(\alpha,\theta)$ точную константу в неравенстве (1.8) для целых функций экспоненциального типа $\sigma = 1$. Сделав в (1.6) замену переменной $x = \sigma y$ и воспользовавшись однородностью степенной функции, легко убедиться, что $\mathcal{B}_\sigma(\alpha,\theta) = \sigma^\alpha\mathcal{B}(\alpha,\theta)$.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть $0<\alpha<1$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда для точных констант в неравенстве Бернштейна — Сегё для оператора D_θ^α для тригонометрических полиномов и целых функций справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha} = \mathcal{B}(\alpha,\theta). \tag{1.10}$$

Из теоремы 1 и (1.9) вытекает

Теорема 2. *Пусть $0<\alpha<1$ и $B_n(\alpha) = B_n(\alpha,-\pi\alpha/2)$ — точная константа в неравенстве Бернштейна для производной Рисса тригонометрических полиномов*:

$$\|D_R^\alpha f_n\| \leqslant B_n(\alpha)\|f_n\|, \quad f_n \in \mathscr{T}_n.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(\alpha)}{n^\alpha} = \frac{2\pi\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma^2\Bigl(\dfrac{1-\alpha}{2}\Bigr)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}. \tag{1.11}$$

З а м е ч а н и е. В случае $\alpha \geqslant 1$ при $\sigma = n$ целая функция, экстремальная в неравенстве Бернштейна — Сегё, совпадает с экстремальным тригонометрическим полиномом, поэтому соотношение (1.10) очевидно. Но при $0 < \alpha < 1$ целая функция, экстремальная в (1.9), не является тригонометрическим полиномом, поэтому (1.11) не является простым следствием (1.9).

Предельные соотношения между константами в задачах для полиномов и в аналогичных задачах для целых функций — обширная тематика, обзор результатов по которой можно найти в [8; 19]. Немало результатов такого характера получено при изучении неравенств Никольского и Бернштейна, о них можно прочитать в § 3.4 работы [8]. Эти вопросы исследовали С. Б. Стечкин, Д. В. Горбачев, Е. Левин и Д. С. Любинский, М. И. Ганзбург, С. Ю. Тихонов и другие (см. приведенную в [8] библиографию), В. В. Арестов и М. В. Дейкалова [21].

Доказательство теоремы 1 в данной статье по методам близко к работам [20; 22].

2. Доказательство основного результата

2.1. Полиномы Левитана и их свойства

Б. М. Левитан [23] построил для произвольной целой функции из $\mathbf{B}_\sigma$ последовательность приближающих ее тригонометрических полиномов. Подробную информацию о полиномах Левитана можно найти, например, в ([5], § 85).

Пусть $\varphi(x) = (2\sin(x/2)/x)^2$ — ядро Фейера, $h = \sigma/n$. Полином Левитана $S_n(f, z)$ функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ имеет вид

$$S_n(f,z) = \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)e^{ikhz}, \quad E_h(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyu}\varphi(hu)f(u)du.$$

Применение формулы суммирования Пуассона (см. § 67, формула (3) в [5]) к функции

$$F(z) = hf(z)\varphi(hz) \in \mathbf{B}_{\sigma(1+1/n)} \cap L(\mathbb{R})$$

дает для полиномов Левитана представление (см. § 85, формула (2) в [5])

$$S_n(f,x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f\Big(x + \frac{2\pi\nu}{h}\Big)\varphi\left(hx + 2\pi\nu\right). \tag{2.1}$$

Иными словами, полином Левитана порядка n — это $2\pi n/\sigma$-периодизация лежащей в $L(\mathbb{R})$ целой функции $f(z)\varphi(hz)$ экспоненциального типа $(1 + 1/n)\sigma$.

Нам понадобятся следующие известные свойства полиномов Левитана ([5], § 85; [22], § 2):

1. $S_n(f, 0) = f(0)$,
2. $\|S_n(f,\cdot)\| \leqslant \|f\|$,
3. $|S_n(f,x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{\sigma x}{n}\Big)^2\|f\|, \quad x \in \mathbb{R}$,
4. $|S'_n(f,x) - f'(x)| \leqslant \sigma\Big(\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{\sigma x}{n}\Big)^2 + \dfrac{C_1}{n}\Big)\|f\|, \quad x \in \mathbb{R}$.

Обсудим эти свойства. Свойство 1 вытекает из (2.1). Свойство 2 следует из (2.1) и того факта, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi k) = 4\sin^2\frac{x}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+2\pi k)^2} = 1$$

(см., например, гл. 12, § 3, п. 441 книги [24]). Свойства 3 и 4 доказаны в ([22], § 2, Propositions 2.3, 2.4). Свойство 3 с большей константой было доказано ранее в ([5], § 85).

2.2. Вспомогательное утверждение

Лемма 1. *Пусть* $f \in \mathbf{B}_1$, $0 < \alpha < 1$ *и* $\theta \in \mathbb{R}$. *Тогда для полиномов Левитана* $S_n(f,\cdot)$ *справедливо неравенство*

$$|D_\theta^\alpha f(0) - D_\theta^\alpha S_n(f,0)| \leqslant \frac{C}{n^{2\alpha/3}}\|f\|, \tag{2.2}$$

где C *не зависит от* n.

Доказательство. В силу интегральной формулы (1.6) для доказательства леммы нужно оценить интегралы

$$\Big|\int_0^\infty \frac{f(0)-f(-\xi)-S_n(f,0)+S_n(f,-\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi\Big| \quad \text{и} \quad \Big|\int_0^\infty \frac{f(\xi)-f(0)-S_n(f,\xi)-S_n(f,0)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi\Big|.$$

Поскольку оператор $f(x)\mapsto f(-x)$ взаимно однозначно отображает класс $\mathbf{B}_1$ на себя, достаточно рассмотреть последний интеграл. По свойству 1 полиномов Левитана он равен

$$\Big|\int_0^\infty \frac{f(\xi)-S_n(f,\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi\Big|.$$

Возьмем произвольное $\beta > 0$, которое в дальнейшем выберем. Разобьем последний интеграл на два интеграла:

$$\int_0^\infty = I_0 + I_\infty, \quad I_0 = \int_0^{n^\beta}, \quad I_\infty = \int_{n^\beta}^\infty.$$

Обозначим $g_n(\xi) = f(\xi) - S_n(f,\xi)$. По свойству 1 полиномов Левитана имеем $g_n(0)=0$.

Проинтегрируем I_0 по частям:

$$\int_0^{n^\beta}\frac{g_n(\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi = \int_0^{n^\beta} g_n(\xi)d\Big(-\frac{1}{\alpha\xi^\alpha}\Big) = \frac{g_n(\xi)}{\alpha\xi^\alpha}\Big|_{n^\beta}^0 + \int_0^{n^\beta}\frac{g_n'(\xi)}{\alpha\xi^\alpha}d\xi = -\frac{g_n(n^\beta)}{\alpha n^{\alpha\beta}} + \int_0^{n^\beta}\frac{g_n'(\xi)}{\alpha\xi^\alpha}d\xi. \tag{2.3}$$

Оценим первое слагаемое. По свойству 3 полиномов Левитана имеем $|g_n(n^\beta)| \leqslant \dfrac{\|f\|}{6n^{2-2\beta}}$, следовательно,

$$\Big|\frac{g_n(n^\beta)}{\alpha n^{\alpha\beta}}\Big| \leqslant \frac{\|f\|}{6\alpha n^{2-2\beta+\alpha\beta}}. \tag{2.4}$$

Вначале, используя свойство 4, оценим $g_n'(\xi)$ при $\xi \in (0, n^\beta)$:

$$\Big|g_n'(\xi)\Big| \leqslant \Big(\frac{1}{6}\Big(\frac{\xi}{n}\Big)^2 + \frac{C_1}{n}\Big)\|f\| \leqslant \Big(\frac{1}{6}\Big(\frac{n^\beta}{n}\Big)^2 + \frac{C_1}{n}\Big)\|f\| \leqslant C_2\|f\|\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^{2-2\beta}}\Big\}.$$

Оценим теперь последнее слагаемое в (2.3):

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{n^\beta}\frac{g_n'(\xi)}{\alpha\xi^\alpha}d\xi\Big| &\leqslant C_2\|f\|\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^{2-2\beta}}\Big\}\int_0^{n^\beta}\frac{d\xi}{\alpha\xi^\alpha} \leqslant C_2\|f\|\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^{2-2\beta}}\Big\}\frac{\xi^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\Big|_0^{n^\beta} \\ &= C_2\|f\|\max\Big\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^{2-2\beta}}\Big\}\frac{n^{\beta(1-\alpha)}}{\alpha(1-\alpha)} = C_3\|f\|\max\Big\{\frac{1}{n^{1-\beta+\alpha\beta}}, \frac{1}{n^{2-3\beta+\alpha\beta}}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Оценим интеграл I_∞, используя свойство 2:

$$\Big|\int_{n^\beta}^\infty \frac{f(\xi)-S_n(f,\xi)}{\xi^{\alpha+1}}d\xi\Big| \leqslant 2\|f\|\int_{n^\beta}^\infty \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}} = \frac{2\|f\|}{\alpha n^{\alpha\beta}}. \tag{2.6}$$

Из оценок (2.4), (2.5) и (2.6) следует, что

$$|D_\theta^\alpha f(0) - D_\theta^\alpha S_n(f,0)| \leqslant \frac{C_4\|f\|}{n^\gamma}, \quad \gamma = \min\{2-2\beta+\alpha\beta, 1-\beta+\alpha\beta, 2-3\beta+\alpha\beta, \alpha\beta\}.$$

Потребуем, чтобы $\gamma > 0$. Для этого необходимо, чтобы β удовлетворяло условию

$$0 < \beta < \min\left\{\frac{1}{1-\alpha}, \frac{2}{2-\alpha}, \frac{2}{3-\alpha}\right\} = \frac{2}{3-\alpha}.$$

Взяв $\beta = 2/3$, получаем

$$\gamma = \min\left\{\frac{2(1+\alpha)}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}\right\} = \frac{2\alpha}{3},$$

и тем самым лемма доказана.

2.3. Завершение доказательства теоремы 1

Докажем соотношение (1.10). Сначала покажем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha} \geqslant \mathcal{B}(\alpha,\theta). \tag{2.7}$$

Для этого вначале докажем, что для произвольной $f \in \mathbf{B}_1$

$$|D_\theta^\alpha f(0)| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha}\|f\|. \tag{2.8}$$

Оценим сверху $|D_\theta^\alpha f(0)|$: $|D_\theta^\alpha f(0)| \leqslant |D_\theta^\alpha f(0) - D_\theta^\alpha S_n(f,0)| + |D_\theta^\alpha S_n(f,0)|$, поэтому согласно (2.2) имеем

$$|D_\theta^\alpha f(0)| \leqslant \lim_{n\to\infty} |D_\theta^\alpha f(0) - D_\theta^\alpha S_n(f,0)| + \varliminf_{n\to\infty} |D_\theta^\alpha S_n(f,0)| = \varliminf_{n\to\infty} |D_\theta^\alpha S_n(f,0)|.$$

Поскольку $S_n(f,\cdot)$ — полином порядка n с периодом $2\pi n$, то $S_n(f,x) = T_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$, где $T_n \in \mathscr{T}_n$ и $\|T_n\| = \|S_n(f,\cdot)\| \leqslant \|f\|$ (см. свойство 2 полиномов Левитана). Таким образом, $D_\theta^\alpha S_n(f,0) = \dfrac{D_\theta^\alpha T_n(0)}{n^\alpha}$. В итоге имеем

$$|D_\theta^\alpha f(0)| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |D_\theta^\alpha S_n(f,0)| = \varliminf_{n\to\infty} \frac{|D_\theta^\alpha T_n(0)|}{n^\alpha} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha}\|T_n\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha}\|f\|,$$

и тем самым (2.8) доказано.

Применив неравенство (2.8) к функции $g(t) = f(x+t)$, получим

$$|D_\theta^\alpha f(x)| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha}\|f\|.$$

Взяв верхнюю грань $|D_\theta^\alpha f(x)|$ по $x \in \mathbb{R}$, приходим к (2.7).

Осталось доказать, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{B_n(\alpha,\theta)}{n^\alpha} \leqslant \mathcal{B}(\alpha,\theta). \tag{2.9}$$

Поскольку $\mathscr{T}_n \subset \mathbf{B}_n$, для произвольного $f_n \in \mathscr{T}_n$ имеем $\dfrac{\|D_\theta^\alpha f_n\|}{\|f_n\|} \leqslant \mathcal{B}_n(\alpha,\theta) = n^\alpha \mathcal{B}(\alpha,\theta)$. Взяв верхнюю грань по $f_n \in \mathscr{T}_n$, получаем (2.9). Из соотношений (2.7) и (2.9) вытекает предельное соотношение (1.10).

Тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. Bd 62, № 1–2. S. 296–302.
2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
3. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна — Сегё для производных Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 199–207. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-199-207
4. **Бернштейн С.Н.** Об одном свойстве целых функций // Собрание сочинений: Т. 1: Конструктивная теория функций. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 582 с.
5. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
6. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, №1. С. 3–22.
7. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Неравенство Бернштейна — Сегё для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 17–31.
8. **Горбачев Д.В.** Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 5. С. 58–110. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
9. **Соколов Г.Т.** О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. 1935. Вып. 6-7. С. 857–884.
10. **Kozko A.I.** The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikol'skii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 391–416.
11. **Лизоркин П.И.** Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 4, № 3. С. 109–126.
12. **Виноградов О.Л.** Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на классах целых функций конечной степени // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 538–555.
13. **Civin P.** Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. Vol. 8. P. 656–665. doi: 10.1215/S0012-7094-41-00855-4
14. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна для производной Рисса дробного порядка, меньшего единицы, целых функций экспоненциального типа // Докл. РАН. Сер. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Vol. 514. С. 118–121. doi: 10.31857/S2686954323600611
15. **Стечкин С.Б.** К проблеме множителей для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1950. Т. 75, № 2. С. 165–168.
16. **Wilmes G.** On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$ // N. Numer. Funct. Anal. Optim. 1979. Vol. 1, № 1. P. 57–77. doi: 10.1080/01630567908816004
17. **Bang. T.** Une inégalite de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques // Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. 1941. Vol. 19, № 4. P. 1–28.
18. **Гейсберг С.П.** Аналоги неравенств С. Н. Бернштейна для дробной производной // Вопросы прикладной математики и математического моделирования : Краткие содержания докл. 25-й науч. конф. (24 янв. – 4 февр. 1967 г.) / Ленингр. инж.-строит. ин-т. Л., 1967. С. 5–10.
19. **Ganzburg M.I.** Sharp Constants of Approximation Theory. IV. Asymptotic Relations in General Settings Anal. Math. 2023. Vol. 49, no. 1. P. 79–136. doi: 10.1007/s10476-022-0185-z
20. **Горбачев Д.В., Мартьянов И.А.** Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 126–137. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-126-137
21. **Arestov V.V., Deikalova M.V.** On one inequality of different metrics for trigonometric polynomials // Ural Math. J. 2022. Vol. 8, no. 2. P. 27–45. doi: 10.15826/umj.2022.2.003
22. **Ganzburg M.I., Tikhonov S.Yu.** On Sharp Constants in Bernstein-Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45. P. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1
23. **Левитан Б.М.** Об одном обобщении неравенств С. Н. Бернштейна и H. Bohr'а // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 17–19.
24. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 863 с.

Поступила 3.07.2023
После доработки 8.08.2023
Принята к публикации 14.08.2023

Леонтьева Анастасия Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: lao-imm@yandex.ru

REFERENCES

1. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1917, vol. 62, no. 1–2, pp. 296–302.
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon, Gordon and Breach, 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
3. Leont'eva A.O. Bernstein–Szegő inequality for the Weyl derivative of trigonometric polynomials in L_0. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, suppl. 1, pp. 127–134. doi: 10.1134/S0081543820020108
4. Bernstein S.N. On one property of entire functions. In: *Sobranie sochinenii* [Collected works], vol. 1: *Konstruktivnaya teoriya funktsii* [Constructive functions theory]. Moskow, Akad. Nauk SSSR Publ., 1952, 582 p.
5. Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* [Lectures on the Theory of Approximation]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 409 p.
6. Arestov V.V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. USSR Izv.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1070/IM1982v018n01ABEH001375
7. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. The Bernstein-Szegő inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 13–28. doi: 10.1134/S0081543815020030
8. Gorbachev D.V. Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, no. 5, pp. 58–110 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
9. Sokolov G.T. Some extremal properties of trigonometric sums. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. VII series. Branch of mathematics and natural sciences*, 1935, vol. 6–7, pp. 857–884 (in Russian).
10. Kozko A.I. The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikol'skii inequality for trigonometric polynomials. *East J. Approx.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 391–416.
11. Lizorkin P.I. Estimations of trigonometric integrals and Bernstein inequality for fractional derivatives. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1965, vol. 4, no. 3, pp. 109–126 (in Russian).
12. Vinogradov O.L. Sharp error estimates for the numerical differentiation formulas on the classes of entire functions of exponential type. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 3, pp. 430–445. doi: 10.1007/s11202-007-0046-9
13. Civin P. Inequalities for trigonometric integrals. *Duke Math. J.*, 1941, vol. 8, pp. 656–665. doi: 10.1215/S0012-7094-41-00855-4
14. Leont'eva A.O. Bernstein inequality for Riesz derivative of fractional order less than 1 of entire function of exponential type. *Doklady RAN. Seriya "Matem., Inform., Protsessy Upravleniya"*, 2023, vol. 514, pp. 118–121 (in Russian). doi: 10.31857/S2686954323600611
15. Stechkin S. B. On the multipliers problem for trigonometric polynomials. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1950, vol. 75, no. 2, pp. 165–168 (in Russian).
16. Wilmes G. On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$. *N. Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1979, vol. 1, no. 1, pp. 57–77. doi: 10.1080/01630567908816004
17. Bang T. Une inégalite de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques. *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, 1941, vol. 19, no. 4, pp. 1–28.

18. Geysberg S.P. Analogs of S. N. Bernstein inequalities for fractional derivative. In: *Questions of applied mathematics and mathematical modelling. Proceedings of 25th scientific conference (January, 24 – February, 4, 1967)*, Leningrad, Leningrad Engineer. Constr. Inst. Publ., 1967, pp. 5–10.
19. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. IV. Asymptotic relations in general settings. *Anal. Math.*, 2023, vol. 49, no. 1, pp. 79–136. doi: 10.1007/s10476-022-0185-z
20. Gorbachev D.V., Martyanov I.A. Bounds for polynomial Nikol'skii constants in L^p with Gegenbauer weight. *Trudy Inst. Mat. Mekh. URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 126–137 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-126-137
21. Arestov V.V., Deikalova M.V. On one inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Ural Math. J.*, 2022, vol. 8, no. 2, pp. 27–45. doi: 10.15826/umj.2022.2.003
22. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Yu. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, pp. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1
23. Levitan B.M. On one generalization of S. N. Bernstein and H. Bohr inequalities. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1937, vol. 15, pp. 169–172.
24. Fikhtengoltz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus], vol. 2. 8th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 863 p. ISBN: 5-9221-0157-9 .

Received July 3, 2023
Revised August 8, 2023
Accepted August 14, 2023

Funding Agency: This work was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2023-913).

Anastasiya Olegovna Leont'eva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: lao-imm@yandex.ru .

Cite this article as: A. O. Leont'eva. On constants in the Bernstein–Szegő inequality for the Weyl derivative of order less than unity of trigonometric polynomials and entire functions of exponential type in the uniform norm. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 130–139.