ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ[1]

Г. Акишев

В статье рассматривается пространство Лебега со смешанной нормой 2π-периодических функций m переменных. На основе этого пространства Лебега определено пространство со смешанной несимметричной нормой. Основная задача статьи — доказать неравенство разных метрик Никольского для кратных тригонометрических полиномов в пространствах со смешанными несиммеричными нормами. Статья состоит из введения и трех разделов. В первом разделе доказаны несколько вспомогательных утверждений о несимметричной норме кратного тригонометрического полинома. Во втором разделе доказано неравенство разных метрик Никольского для кратных тригонометрических полиномов в пространствах со смешанными несимметричными нормами. В третьем разделе доказана точность неравенства Никольского для кратных тригонометрических полиномов. Построен экстремальный полином.

Ключевые слова: пространство с несимметричной нормой, неравенство разных метрик Никольского, тригонометрический полином.

G. Akishev. Nikol'skii's inequality of different metrics for trigonometric polynomials in a space with mixed asymmetric norm.

A Lebesgue space of 2π-periodic functions of m variables with a mixed norm is considered. Based on this Lebesgue space, a space with a mixed asymmetric norm is defined. The main aim of the paper is to prove Nikol'skii's inequality of different metrics for multiple trigonometric polynomials in spaces with mixed asymmetric norms. The paper consists of an introduction and three sections. In the first section, several auxiliary statements about the asymmetric norm of a multiple trigonometric polynomial are proved. In the second section, Nikol'skii's inequality of different metrics is proved for multiple trigonometric polynomials in spaces with mixed asymmetric norms. In the third section, the accuracy of Nikol'skii's inequality for multiple trigonometric polynomials is established. An extremal polynomial is constructed.

Keywords: space with asymmetric norm, Nikol'skii's inequality of different metrics, trigonometric polynomial.

MSC: 41A17, 42A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-11-26

Введение

В статье используются следующие обозначения:

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ — множество неотрицательных чисел;

$\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1,\dots,x_m)$ с вещественными координатами x_j;

$\mathbb{T}^m = \{\overline{x}\in\mathbb{R}^m\colon -\pi\le x_j\le\pi;\ j=1,\dots,m\}$ — m-мерный тор;

$C(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных функций с нормой $\|f\|_\infty := \max_{\overline{x}\in\mathbb{T}^m}|f(\overline{x})|$;

$L_{\overline{p}}(\mathbb{T}^m)$ (где $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $0<p_j<\infty$, $j=1,\dots,m$) — пространство Лебега со смешанной нормой, состоящее из всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых конечна величина (см. [1, гл. 1, разд. 1, с. 9])

$$\|f\|_{L_{\overline{p}}} = \Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\dots\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}|f(\overline{x})|^{p_1}dx_1\Bigg)^{p_2/p_1}\dots\Bigg)^{p_m/p_{m-1}}dx_m\Bigg)^{1/p_m},$$

[1]Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (проект AP19677486).

в случае $p_1 = \ldots = p_m = p$ вместо $L_{\overline{p}}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{L_{\overline{p}}}$ соответственно будем писать $L_p(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_{L_p}$ (см. [2, гл. 1, разд. 1.1, с. 11]).

Известно, что в случае $1 \le p_j \le \infty$, $j = 1, \ldots, m$, пространство $L_{\overline{p}}(\mathbb{T}^m)$ является нормированным пространством (см. например [1, гл. 1, разд. 1, с. 10]).

Напомним определение пространства с несимметричной нормой.

Определение 1. Пусть L — линейное пространство, θ — нулевой элемент пространства L. Функционал $\|\cdot|: L \to \mathbb{R}_+$ называется несимметричной нормой, если

1) $\|u| > 0$ при $u \ne \theta$;

2) $\|\lambda u| = \lambda \|u|$ для $\lambda \in \mathbb{R}_+$;

3) $\|u_1 + u_2| \le \|u_1| + \|u_2|$ для $u_1, u_2 \in L$.

Название “несимметричная норма” и обозначение “$\|\cdot|$” введены в [3, гл. 3, разд. 5, с. 482].

Функционал $\|u|$ называется несимметричной квазинормой, если в определении 1, вместо условия 3 выполняется неравенство $\|u_1 + u_2| \le C(\|u_1| + \|u_2|)$ для некоторого положительного числа C, не зависящего от $u_1, u_2 \in L$.

Теория пространства с несимметричной нормой более подробно изложена в монографии С. Кобзаша [4]. Различные вопросы теории приближения в пространстве с несимметричной нормой исследовали Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянов [5], А.-Р. К. Рамазанов [6], П. А. Бородин [7], А. Р. Алимов [8], И. Г. Царьков [9].

Мы рассмотрим пространство со смешанной несимметричной нормой. Для функции f положим $f^+ = \max\{f,\ 0\}$, $f^- = \max\{-f,\ 0\}$.

Пусть $\overline{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)})$, $\overline{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \ldots, p_m^{(2)})$ $0 < p_j^{(1)}, p_j^{(2)} < \infty$, $j = 1, \ldots, m$. Через $L_{\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство функций f, для которых $f^+ \in L_{\overline{p}^{(1)}}(\mathbb{T}^m)$ и $f^- \in L_{\overline{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$, и положим

$$\|f|_{L_{\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(2)}}} := \|f^+\|_{L_{\overline{p}^{(1)}}} + \|f^-\|_{L_{\overline{p}^{(2)}}}.$$

Функционал $\|f|_{L_{\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(2)}}}$ называется смешанной несимметричной нормой при $p_j^{(1)} \geqslant 1$, $p_j^{(2)} \geqslant 1$ для всех $j = 1, \ldots, m$ и квазинормой, если для некоторого j выполняется хотя бы одно из неравенств $0 < p_j^{(1)} < 1$, $0 < p_j^{(2)} < 1$.

В случае $p_j^{(1)} = p_1$, $p_j^{(2)} = p_2$ для $j = 1, \ldots, m$ функционал $\|f|_{L_{\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(2)}}}$ определен в [10; 11]. При $p_j^{(1)} = p_1$, $p_j^{(2)} = p_2$ для $j = 1, \ldots, m$ вместо $L_{\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f|_{L_{\overline{p}^{(1)}, \overline{p}^{(2)}}}$ будем писать $L_{p_1,p_2}(\mathbb{T}^m)$ и $\|f|_{L_{p_1,p_2}}$ соответственно.

Пусть $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $n_j \in \mathbb{N}$, — множество натуральных чисел. Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_{\overline{n}}(\overline{x}) = T_{n_1,\ldots,n_m}(\overline{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} c_{\overline{k}} e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle},$$

где $\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle = \sum_{j=1}^m k_j x_j$, $c_{\overline{k}}$ — коэффициенты, вообще говоря, комплексные числа. Множество тригонометрических полиномов $T_{\overline{n}}$ обозначается символом $\mathfrak{T}_{\overline{n}}$.

Для тригонометрического полинома $T_{\overline{n}} \in \mathfrak{T}_{\overline{n}}$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ С. М. Никольским [12] доказано неравенство

$$\|T_{\overline{n}}\|_{L_q} \leqslant 2^m \prod_{j=1}^m n_j^{1/p-1/q} \|T_{\bar{n}}\|_{L_p} \tag{0.1}$$

для $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Это неравенство называют неравенством разных метрик Никольского или неравенством Джексона — Никольского для тригонометрического полинома, и его аналог верен для целых функций экспоненциального типа конечной степени [12].

В одномерном случае при $q = \infty$ и $0 < p < \infty$ неравенство (0.1) доказал Д. Джексон [13], а в пространстве Лебега с весом его доказали Н. К. Бари [14], М. К. Потапов [15], Б. А. Халилова [16], В. И. Иванов [17].

Неравенство Джексона — Никольского имеет многочисленные обобщения (см., например, библиографию в [2; 18; 19]), в частности зависимость неравенства разных метрик для тригонометрического полинома от спектра многочлена установлены в [20; 21].

В неравенстве (0.1) более точная константа установлена И. И. Ибрагимовым [22]. Для $0 < p < q \le \infty$ в случае $m = 1$ в [23] дано простое доказательство неравенства (0.1), основанное на результате Д. Джексона [13]. В. В. Арестовым [23] неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов одной переменной доказано и в случае $p = 0 < q < \infty$ с точной константой.

Проблеме нахождения точной константы в неравенстве Джексона — Никольского для тригонометрического полинома посвящены многие работы, например, Н. И. Черныха [24], совместные работы В. В. Арестова с П. Ю. Глазыриной [25], с А. Г. Бабенко, М. В. Дейкаловой, А. Ховарт [26], с М. В. Дейкаловой [27; 28], в трудах Д. В. Горбачева и И. А. Мартьянова [29], И. А. Мартьянова [30], М. И. Ганзбурга и С. Ю. Тихонова [31]. Более подробная библиография приведена в [19].

Аналог неравенства (0.1) в пространстве Лебега со смешанной нормой доказал А. П. Унинский [32], а Н. М. Сабзиев [33] установил его с дополнительными условиями и другим методом.

В дальнейшем мы будем рассматривать только действительные тригонометрические полиномы такие, где коэффициенты $c_{-\overline{k}} = \bar{c}_{\overline{k}}$ — сопряженные числа к $c_{\overline{k}}$.

А. И. Козко [11] доказал неравенство разных метрик Никольского для тригонометрического полинома в изотропном пространстве $L_{p_1,p_2}(\mathbb{T}^m)$ с несимметричной нормой (в одномерном случае в [10]):

$$\sup_{T_{\overline{n}} \in \mathfrak{T}_{\overline{n}}} \frac{\|T_{\overline{n}}\|_{L_{q^{(1)},q^{(2)}}}}{\|T_{\overline{n}}\|_{L_{p^{(1)},p^{(2)}}}} \asymp \Big(\prod_{j=1}^{m} n_j\Big)^{\psi(p^{(1)},p^{(2)},q^{(1)},q^{(2)},m)}$$

для чисел $p^{(1)}, p^{(2)}, q^{(1)}, q^{(2)} \in (0, \infty]$, где

$$\psi(p^{(1)},p^{(2)},q^{(1)},q^{(2)},m) \\ = \max\left\{\Big(\frac{1}{p^{(1)}} - \frac{1}{q^{(1)}}\Big)_+ \max\Big\{1, \frac{2+m/p^{(2)}}{2+m/p^{(1)}}\Big\},\ \Big(\frac{1}{p^{(2)}} - \frac{1}{q^{(2)}}\Big)_+ \max\Big\{1, \frac{2+m/p^{(1)}}{2+m/p^{(2)}}\Big\}\right\}.$$

Здесь и далее для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A\,(y) \asymp B\,(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A\,(y) \le B\,(y) \le C_2 \cdot A\,(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \ge C_1 A$ или $B \le C_2 A$ часто будем писать $B >> A$ или $B << A$ соответственно. Постоянные $C(p, q, m, \ldots)$ в формулах не зависят от порядка тригонометрического полинома.

Основная задача статьи: пусть $\overline{p}^{(1)} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_m^{(1)})$, $\overline{p}^{(2)} = (p_1^{(2)}, \ldots, p_m^{(2)})$, $\overline{q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, \ldots, q_m^{(1)})$, $\overline{q}^{(2)} = (q_1^{(2)}, \ldots, q_m^{(2)})$ и $0 < p_j^{(1)}, p_j^{(2)}, q_j^{(1)}, q_j^{(2)} \le \infty$ для $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим два пространства $L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ и $L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}(\mathbb{T}^m)$ со смешанными несимметричными квазинормами $\|\cdot|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}$ и $\|\cdot|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}$ соответственно. Нужно найти порядок величины

$$\mathcal{T}_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)},\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}(\overline{n}) = \sup_{T_{\overline{n}} \in \mathfrak{T}_{\overline{n}}} \frac{\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}}.$$

Статья состоит из трех разделов. Первый содержит вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов. Во втором доказано неравенство разных метрик Никольского для тригонометрического полинома в пространстве со смешанной несимметричной нормой. В третьем разделе установлена точность неравенства разных метрик Никольского для тригонометрического полинома в пространстве со смешанной несимметричной нормой. Здесь построен экстремальный полином, и изучены оценки его нормы.

1. Вспомогательные утверждения

В этом разделе приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые мы будем использовать в доказательстве основных результатов.

Лемма 1.1. *Пусть* $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $0 < p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$, *и* $a \in (0, \pi]$,

$$\Omega_m = \Big\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^m\colon \ \sum_{j=1}^{m} n_j |x_j| \leq a\Big\}.$$

Тогда для характеристической функции χ_{Ω_m} *множества* Ω_m *справедливо равенство*

$$\|\chi_{\Omega_m}\|_{L_{\overline{p}}} = \prod_{l=1}^{m}\Big(p_l \sum_{j=1}^{l} 1/p_j\Big)^{-1/p_l} \prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{2a}{n_j}\Big)^{1/p_j}.$$

Доказательство. Для $p_j = 1$, $j = 1, \ldots, m$, утверждение леммы известно (см. [11, лемма 2.1]).

Рассмотрим случай $0 < p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$. Лемму докажем методом математической индукции. Предположим, что утверждение леммы верно для $m - 1$, т. е.

$$\|\chi_{\Omega_{m-1}}\|_{L_{\overline{p}(m-1)}} = \prod_{l=1}^{m-1}\Big(p_l \sum_{j=1}^{l} 1/p_j\Big)^{-1/p_l} \prod_{j=1}^{m-1}\Big(\frac{2a}{n_j}\Big)^{1/p_j}, \tag{1.1}$$

где $\overline{p}(m-1) = (p_1, \ldots, p_{m-1})$. При фиксированном $x_m \in \Big[-\dfrac{a}{n_m}, \dfrac{a}{n_m}\Big]$ рассмотрим множество

$$\Omega_{m-1}(x_m) = \Big\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{T}^{m-1}\colon \ \sum_{j=1}^{m-1} n_j |x_j| \leq a - n_m |x_m|\Big\}.$$

Тогда в предположении (1.1), заменяя число a на $a - n_m|x_m|$, получим

$$\|\chi_{\Omega_{m-1}}\|_{L_{\overline{p}(m-1)}} = \prod_{l=1}^{m-1}\Big(p_l \sum_{j=1}^{l} 1/p_j\Big)^{-1/p_l} \prod_{j=1}^{m-1}\Big(\frac{2}{n_j}(a - n_m|x_m|)\Big)^{1/p_j}$$

при фиксированном x_m.

Теперь в силу этого равенства будем иметь

$$\|\chi_{\Omega_2}\|_{L_{\overline{p}}} = \Bigg(\int_{-a/n_m}^{a/n_m} \|\chi_{\Omega_{m-1}}\|^{p_m}_{L_{\overline{p}(m-1)}} dx_m\Bigg)^{1/p_m} = \prod_{l=1}^{m-1}\Big(p_l \sum_{j=1}^{l} 1/p_j\Big)^{-1/p_l} \prod_{j=1}^{m-1}\Big(\frac{2}{n_j}\Big)^{1/p_j}$$

$$\times \Bigg(\int_{-a/n_m}^{a/n_m} (a - n_m|x_m|)^{p_m \sum_{j=1}^{m-1} 1/p_j} dx_m\Bigg)^{1/p_m} = \prod_{l=1}^{m}\Big(p_l \sum_{j=1}^{l} 1/p_j\Big)^{-1/p_l} \prod_{j=1}^{m}\Big(\frac{2}{n_j}\Big)^{1/p_j} a^{\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}.$$

$\square$

Для полинома $T_{\overline{n}} \in \mathfrak{F}_n$ положим

$$M_{\overline{n}} = \|T_{\overline{n}}\|_\infty, \quad M^+_{\overline{n}} = \|T^+_{\overline{n}}\|_\infty, \quad M^-_{\overline{n}} = \|T^-_{\overline{n}}\|_\infty.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $\overline{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $0 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, *и полином* $T_{\overline{n}} \in \mathfrak{F}_n$.

a) *Если* $M_{\overline{n}}^+ = M_{\overline{n}}$, *то*

$$M_{\overline{n}}^+ \ll \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j} \|T_{\overline{n}}^+\|_{L_{\overline{p}}}. \tag{1.2}$$

b) *Если* $M_{\overline{n}}^+ < M_{\overline{n}}^- = M_{\overline{n}}$, *то*

$$M_{\overline{n}}^+ \ll \Big(\prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j}\Big)^{\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j}} \cdot (M_{\overline{n}}^-)^{\frac{\sum_{j=1}^m 1/p_j}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j}} \cdot \|T_{\overline{n}}^+\|_{L_{\overline{p}}}^{\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j}}. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $\overline{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{T}^m$ такая, что $M_{\overline{n}}^+ = M_{\overline{n}} = T_{\overline{n}}(\overline{x}^0)$. Рассмотрим множество

$$B_1 = \Big\{\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m \colon \sum_{j=1}^m n_j |x_j - x_j^0| \le \frac{1}{2}\Big\}.$$

Согласно лемме 1.1 при $a = 1/2$ имеем

$$\|\chi_{B_1}\|_{L_{\overline{p}}} = C \prod_{j=1}^m n_j^{-1/p_j}. \tag{1.4}$$

В лемме 2.2 [11] показано, что для точек $\overline{x} \in B_1$ выполняется неравенство $T_{\overline{n}}(\overline{x}) \ge \dfrac{M_{\overline{n}}}{2}$. Поэтому, используя формулу (1.4), будем иметь

$$M_{\overline{n}}^+ = M_{\overline{n}} = C \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j} M_{\overline{n}} \|\chi_{B_1}\|_{L_{\overline{p}}} \le C \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j} \|T_{\overline{n}} \chi_{B_1}\|_{L_{\overline{p}}} \ll \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j} \|T_{\overline{n}}^+\|_{L_{\overline{p}}}.$$

Этим неравенство (1.2) доказано.

Для доказательства неравенства (1.3) рассмотрим множество

$$B_2 = \Big\{\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{T}^m \colon \sum_{j=1}^m n_j |x_j - x_j^0| \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_{\overline{n}}^+}{M_{\overline{n}}^-}}\Big\}.$$

Пользуясь п. b) леммы 2.2 [11] и леммой 1.1, при $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{M_{\overline{n}}^+}{M_{\overline{n}}^-}}$ будем иметь

$$M_{\overline{n}}^+ = M_{\overline{n}}^+ \|\chi_{B_2}\|_{L_{\overline{p}}}^{-1} \cdot \|\chi_{B_2}\|_{L_{\overline{p}}} \le 2 \|\chi_{B_2}\|_{L_{\overline{p}}}^{-1} \cdot \|T_{\overline{n}}^+ \chi_{B_2}\|_{L_{\overline{p}}} \ll \Big(\prod_{j=1}^m \Big(\frac{1}{n_j}\sqrt{\frac{M_{\overline{n}}^+}{M_{\overline{n}}^-}}\Big)^{1/p_j}\Big)^{-1} \|T_{\overline{n}}^+\|_{L_{\overline{p}}}.$$

Таким образом,

$$M_{\overline{n}}^+ \ll \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j} \Big(\sqrt{\frac{M_{\overline{n}}^-}{M_{\overline{n}}^+}}\Big)^{\sum_{j=1}^m 1/p_j} \|T_{\overline{n}}^+\|_{L_{\overline{p}}}.$$

Обе части этого неравенства умножим на $(M_{\overline{n}}^+)^{(1/2)\sum_{j=1}^m 1/p_j}$. Тогда

$$(M_{\overline{n}}^+)^{1+(1/2)\sum_{j=1}^m 1/p_j} \ll \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j} (M_{\overline{n}}^-)^{(1/2)\sum_{j=1}^m 1/p_j} \|T_{\overline{n}}^+\|_{L_{\overline{p}}}.$$

Отсюда следует неравенство (1.3). □

Аналогично лемме 1.2 доказывается

Лемма 1.3. *Пусть* $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $0 < p_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$, *и полином* $T_{\overline{n}} \in \mathfrak{F}_n$.

a) *Если* $M_{\overline{n}}^{-} = M_{\overline{n}}$, *то*

$$M_{\overline{n}}^{-} \ll \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j} \|T_{\overline{n}}^{-}\|_{L_{\overline{p}}}.$$

b) *Если* $M_{\overline{n}}^{-} < M_{\overline{n}}^{+} = M_{\overline{n}}$, *то*

$$M_{\overline{n}}^{-} \ll \Big(\prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j}\Big)^{\overline{\frac{2}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}}} \cdot (M_{\overline{n}}^{+})^{\overline{\frac{\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}}} \cdot \|T_{\overline{n}}^{-}\|_{L_{\overline{p}}}^{\overline{\frac{2}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}}}.$$

З а м е ч а н и е 1.1. В случае $p_1 = \ldots = p_m = p$ леммы 1.2 и 1.3 доказаны в [11].

2. Неравенство разных метрик для полиномов в пространстве со смешанной несимметричной нормой

В этом разделе для $a \in \mathbb{R}$ положим $a_+ = \max\{a,\ 0\}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $p_j, q_j^{(1)}, q_j^{(2)} \in [1, \infty)$, $n_j \in \mathbb{N}$ *для* $j = 1, \ldots, m$ *и* $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, \ldots, q_m^{(1)})$, $\overline{q}^{(2)} = (q_1^{(2)}, \ldots, q_m^{(2)})$. *Тогда для полинома* $T_{\overline{n}} \in \mathfrak{F}_{\overline{n}}$ *справедливо неравенство*

$$\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \ll \max\Big\{\prod_{j=1}^{m} n_j^{(1/p_j - 1/q_j^{(1)})_+},\ \prod_{j=1}^{m} n_j^{(1/p_j - 1/q_j^{(2)})_+}\Big\} \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{p}}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для тригонометрического полинома $T_{\overline{n}} \in \mathfrak{F}_{\overline{n}}$ известно следующее неравенство разных метрик Никольского (см. [32, теорема 1; 34, лемма 1]):

$$\|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}}} \leqslant C \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j - 1/q_j} \cdot \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{p}}} \tag{2.1}$$

при $1 \leqslant p_j \leqslant q_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Так как $\|T_{\overline{n}}^{+}\|_{L_{\overline{q}^{(1)}}} \ll \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{(1)}}}$, $\|T_{\overline{n}}^{-}\|_{L_{\overline{q}^{(2)}}} \ll \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{(2)}}}$, то в случае $1 \leq p_j < q_j^{(l)}$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, 2$, согласно неравенству (2.1) получим

$$\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \ll \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{(1)}}} + \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{(2)}}} \ll \Big(\prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j - 1/q_j^{(1)}} + \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j - 1/q_j^{(2)}}\Big) \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{p}}}.$$

Рассмотрим общий случай. Введем обозначения $\omega(l) = \{j\colon 1 \leqslant q_j^{(l)} < p_j < \infty,\ j = 1, \ldots, m\}$ и $\overline{q}^{\omega(l)} = (q_1^{\omega(l)}, \ldots, q_m^{\omega(l)})$, где $q_k^{\omega(l)} = p_k$, если $k \in \omega(l)$ и $q_k^{\omega(l)} = q_k^{(l)}$ для $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \omega(l)$, $l = 1, 2$.

Тогда применяя неравенство Гельдера к интегралу по переменной x_{j_0}, при $\eta = p_{j_0}/q_{j_0}^{(l)}$ для $k \in \omega(l)$, $l = 1, 2$, получим $\|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{(l)}}} \ll \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{\omega(l)}}}$, $l = 1, 2$. Теперь пользуясь этим неравенством и (2.1), будем иметь

$$\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \ll \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{\omega(1)}}} + \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{q}^{\omega(2)}}}$$

$$\ll \Big(\prod_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \omega(1)} n_j^{1/p_j} - 1/q_j^{(1)} + \prod_{j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \omega(1)} n_j^{1/p_j - 1/q_j^{(2)}}\Big) \|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{p}}}$$

при $1 \leqslant p_j < q_j^{(l)} \leqslant \infty$ для $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \omega(1)$, $l = 1, 2$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. В случае $q_j^{(1)} = q_1$, $q_j^{(2)} = q_2$ и $p_j = p$ для $j = 1, \ldots, m$ теорема 2.1 совпадает с теоремой 1 в [11], когда в ней $p_1 = p_2 = p$.

3. О точности неравенства разных метрик для полиномов в пространстве с несимметричной нормой

Как и в [11], рассмотрим тригонометрический полином

$$T_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{t}) = \frac{1}{\sum_{l=1}^{m}(1/(n_l\delta_l))^2\prod_{j=1}^{m}([n_j/k]+2)^{4k}}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\sin^2 t_l/2}{\sin^2\delta_l/2}-1\Big)\prod_{j=1}^{m}\frac{J_{n_j+k,k}(t_j)}{\Big(\cos t_j-\cos\big(\frac{2\pi}{[n/k]+2}\big)\Big)^{2k}},$$

где $\overline{\delta}=(\delta_1,\dots,\delta_m)$, $\delta_l\ge 0$, $k\in\mathbb{N}$, $[a]$ — целая часть числа a и

$$J_{n,k}(t) = \left(\frac{\sin\dfrac{[n/k]+1}{2}t}{\sin(t/2)}\right)^{2k}.$$

Известно, что $T_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{t})\in\mathfrak{F}_{\overline{n}}$ [11]. В следующей лемме и далее $c(m)=\dfrac{(m!)^{-1/m}}{2}$ (см. [11]).

Лемма 3.1. *Для $0\le\delta_j<c(m)/n_j$, $1/(2k)<p_j\le\infty$, $j=1,\dots,m$, справедливо соотношение*

$$\|T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}}\asymp\prod_{j=1}^{m}n_j^{2k-1/p_j}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3.3 [11] справедлива оценка

$$T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{x})\le C\prod_{j=1}^{m}g_j(x_j). \tag{3.1}$$

Здесь $0\le\delta_j<1$, $j=1,\dots,m$, $\overline{x}=(x_1,\dots,x_m)\in[0,\pi]^m$;

$$g_j(x_j)=\begin{cases} J_{n_j+k,k}(x_j), & \text{если } \overline{x}\in A_1^j,\\ n_j^{2k}, & \text{если } \overline{x}\in A_0^j;\end{cases}$$

$$A_0^j=\Big\{\overline{x}=(x_1,\dots,x_m)\in[0,\pi]^m\colon 0\le x_j\le\frac{3\pi}{[n_j/k]+2}\Big\};$$

$$A_1^j=\Big\{\overline{x}=(x_1,\dots,x_m)\in[0,\pi]^m\colon \frac{3\pi}{[n_j/k]+2}\le x_j\le\pi\Big\}.$$

В силу неравенства (3.1) имеем

$$\|T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}}\le C\Big\|\prod_{j=1}^{m}g_j(x_j)\Big\|_{L_{\overline{p}}}=C\prod_{j=1}^{m}\Big(\int_0^{\pi}g_j^{p_j}(x_j)dx_j\Big)^{1/p_j}. \tag{3.2}$$

Для полиномов $J_{n,k}(t)$ одной переменной t известно, что (см. [11]) $\|J_{n,k}\|_{L_p}\asymp n^{2k-1/p}$ при $1/(2k)<p\le\infty$, кроме того,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{[n/k]+2}}n^{2kp}dt\asymp n^{2kp-1}.$$

Следовательно, из (3.2) получим $\|T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}}\ll\prod_{j=1}^{m}n_j^{2k-1/p_j}$ при $\dfrac{1}{2k}<p\le\infty$. С другой стороны, по лемме 3.4 [11] будем иметь

$$\|T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}}\gg\prod_{j=1}^{m}n_j^{2k}\|\chi_{S_{\overline{n},k}}\|_{L_{\overline{p}}}\gg\prod_{j=1}^{m}n_j^{2k-1/p_j},$$

где $\chi_{S_{\overline{n},k}}$ — характеристическая функция множества

$$S_{\overline{n},k} = \Big\{\overline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in [0,\pi]^m \colon \frac{3\pi}{2([n_j/k]+2)} \le x_j \le \frac{5\pi}{2([n_j/k]+2)},\ j = 1,\dots,m\Big\}.$$

$\square$

З а м е ч а н и е. В случае $p_1 = \ldots = p_m = p$ из леммы 3.1 следует лемма 3.5 [11].

Лемма 3.2. *Для полинома* $T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{x})$ *при* $0 < \delta^0 < c(m)$, $\delta_j = \delta^0/n_j$, $0 < p_j < \infty$, $j = 1,\dots,m$, *справедливо соотношение*

$$\|T^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \asymp \prod_{j=1}^{m} n_j^{2k-1/p_j} (\delta^0)^{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в [11], рассмотрим множество

$$G_{\overline{\delta}} = \big\{\overline{x} = (x_1,\dots,x_m) \in [0,\pi]^m \colon T_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{x}) \le 0\big\}.$$

Тогда

$$\|T^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \le M^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) \|\chi_{G_{\overline{\delta}}}\|_{L_{\overline{p}}}, \tag{3.3}$$

где $\chi_{G_{\overline{\delta}}}$ — характеристическая функция множества $G_{\overline{\delta}}$ и $M^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) = \|T^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{\infty}$.

Согласно лемме 3.1 [11] справедливо включение $G_{\overline{\delta}} \subset Q_{\overline{\delta}} = \{\overline{x} = (x_1,\dots,x_m) \in [0,\pi]^m : |x_j| \le \delta_j,\ j = 1,\dots,m\}$. Тогда

$$\|\chi_{G_{\overline{\delta}}}\|_{L_{\overline{p}}} \le \|\chi_{Q_{\overline{\delta}}}\|_{L_{\overline{p}}} = \prod_{j=1}^{m} (2\delta_j)^{1/p_j}. \tag{3.4}$$

Из неравенств (3.3) и (3.4) следует, что

$$\|T^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \le M^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) \prod_{j=1}^{m} (2\delta_j)^{1/p_j}.$$

Теперь, пользуясь леммой 3.7 [11] и учитывая, что $\delta_j = \delta^0/n_j$, отсюда получим

$$\|T^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \ll \prod_{j=1}^{m} n_j^{2k-1/p_j} (\delta^0)^{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j}.$$

Докажем противоположное неравенство.

В силу леммы 3.2 [11] известно, что $M^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) = \|T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{\infty} = \|T_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{\infty} = M_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) \ge M^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta})$.

Поэтому по утверждению b) леммы 1.3 имеем

$$M^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) \Big(\frac{M^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta})}{M^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta})}\Big)^{(1/2)\sum_{j=1}^{m} 1/p_j} \prod_{j=1}^{m} n_j^{-1/p_j} \le \|T^{-}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}}. \tag{3.5}$$

Согласно утверждению a) леммы 1.2 и лемме 3.1 будем иметь

$$\frac{1}{M^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta})} \gg \frac{1}{\|T^{+}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j}} \gg \prod_{j=1}^{m} n_j^{-2k}. \tag{3.6}$$

Далее в силу леммы 3. 7 [11] и (3.6) получим $M^-_{\overline{n},k}(\overline{\delta})/M^+_{\overline{n},k}(\overline{\delta}) \gg (\delta^0)^2$. Поэтому из (3.5) следует, что

$$\|T^-_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \gg M^-_{\overline{n},k}(\overline{\delta})(\delta^0)^{\sum_{j=1}^m 1/p_j}\prod_{j=1}^m n_j^{-1/p_j}. \tag{3.7}$$

Ввиду [11, лемма 3.7] и (3.7) получим $\|T^-_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \gg \prod_{j=1}^m n_j^{2k-1/p_j}(\delta^0)^{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j}$. □

Рассмотрим полином

$$\tilde{T}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{t}) = \Big(\sum_{l=1}^m \frac{\sin^2 t_l/2}{\sin^2\delta_l/2} - 1\Big)\prod_{j=1}^m \frac{J_{n_j+k,k}(t_j)}{\Big(\cos t_j - \cos\big(\dfrac{2\pi}{[n/k]+2}\big)\Big)^{2k}} \tag{3.8}$$

для $k\in\mathbb{N}$, $\overline{n}=(n_1,\ldots,n_m)$, $\overline{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$, $n_j\in\mathbb{N}$, $\delta_j\in\mathbb{R}_+$, $j=1,\ldots,m$. Тогда

$$T_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{t}) = \frac{1}{\sum_{l=1}^m (1/(n_l\delta_l))^2\prod_{j=1}^m([n_j/k]+2)^{4k}}\tilde{T}_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\overline{t}).$$

Лемма 3.3. *Пусть $\overline{n}=(n_1,\ldots,n_m)$, $n_j,k\in\mathbb{N}$, $\delta_j=\delta^0/n_j$, $j=1,\ldots,m$, и $0\le\delta^0<c(m)$. Тогда справедливы соотношения*

$$\|\tilde{T}^+_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \asymp \prod_{j=1}^m n_j^{6k-1/p_j}(\delta^0)^{-2} \tag{3.9}$$

при $1/(2k)<p_j\le\infty$, $j=1,\ldots,m$, и

$$\|\tilde{T}^-_{\overline{n},k}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{p}}} \asymp \prod_{j=1}^m n_j^{6k-1/p_j}(\delta^0)^{\sum_{j=1}^m 1/p_j} \tag{3.10}$$

для $0<p_j\le\infty$, $j=1,\ldots,m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 3.1 и леммы 3.2. □

Теорема 3.1. *Пусть $p_j^{(1)},p_j^{(2)},q_j^{(1)},q_j^{(2)}\in(0,\infty)$, $n_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\ldots,m$, $\overline{p}^{(1)}=(p_1^{(1)},\ldots,p_m^{(1)})$, $\overline{p}^{(2)}=(p_1^{(2)},\ldots,p_m^{(2)})$, $\overline{q}^{(1)}=(q_1^{(1)},\ldots,q_m^{(1)})$, $\overline{q}^{(2)}=(q_1^{(2)},\ldots,q_m^{(2)})$; кроме того,*

1) $p_j^{(1)}\le q_j^{(1)}$, $p_j^{(2)}\le q_j^{(2)}$ для $j=1,\ldots,m$;

2) $p_j^{(1)}\le p_j^{(2)}$ или $p_j^{(2)}\le p_j^{(1)}$ для $j=1,\ldots,m$.

Тогда справедливо неравенство

$$\mathcal{T}_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)},\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}(\overline{n}) = \sup_{T_{\overline{n}}\in\mathfrak{T}_{\overline{n}}}\frac{\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^m n_j^{\max\{\max\{\alpha_{1,j},\beta_{2,j}\},\max\{\alpha_{2,j},\beta_{1,j}\}\}},$$

где $\alpha_{1,j}=\left(\dfrac{1}{p_j^{(1)}}-\dfrac{1}{q_j^{(1)}}\right)_+$, $\beta_{1,j}=\left(\dfrac{1}{p_j^{(2)}}-\dfrac{1}{q_j^{(2)}}\right)_+$ и

$$\alpha_{2,j} = \left(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{q_j^{(2)}}\right)_+ + \left(\frac{1}{p_j^{(1)}}-\frac{1}{p_j^{(2)}}\right)_+\frac{\sum_{j=1}^m(1/p_j^{(2)}-1/q_j^{(2)})}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}},$$

$$\beta_{2,j} = \left(\frac{1}{p_j^{(1)}}-\frac{1}{q_j^{(1)}}\right)_+ + \left(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\right)_+\frac{\sum_{j=1}^m(1/p_j^{(1)}-1/q_j^{(1)})}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(1)}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $k_0 := \Big[\max_{j=1,\dots,m} \dfrac{1}{2\min\{p_j^{(1)}, p_j^{(2)}\}}\Big]+1$, где $[y]$ — целая часть числа $y \geq 0$. Тогда $k_0 > 1/(2\min\{p_j^{(1)}, p_j^{(2)}\})$ для

$$j = 1,\dots,m \Rightarrow 1/(2k_0) < \min_{j=1,\dots,m} \min\{p_j^{(1)}, p_j^{(2)}\}.$$

Пусть $p_j^{(1)} \leq p_j^{(2)}$, $j = 1,\dots,m$. Рассмотрим полином $\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\overline{t})$, определенный по формуле (3.8) при $\delta_l = \delta^0/n_l$, $l = 1,\dots,m$,

$$\delta^0 = c(m)\Big(\prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)}}\Big)^{\frac{1}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}}.$$

Пользуясь соотношениями (3.9) и (3.10) и учитывая значение числа δ^0, получим

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \asymp \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{6k_0}\Big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1/q_j^{(1)}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}\\ +\prod_{j=1}^m n_j^{-1/q_j^{(2)}}\Big(\prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)}}\Big)^{\frac{\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}}\Big).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Так как

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{q_j^{(1)}}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big)\\ &=\frac{1}{q_j^{(2)}}-\frac{1}{q_j^{(1)}}-\frac{1}{q_j^{(2)}}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big);\\ &-\frac{1}{q_j^{(2)}}+\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big)\cdot\frac{\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\\ &=-\frac{1}{q_j^{(2)}}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big)+\frac{2+\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big),\end{aligned}$$

то из соотношения (3.11) следует, что

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \asymp \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{6k_0}\prod_{j=1}^m n_j^{-1/q_j^{(2)}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}\\ \times\Big(\prod_{j=1}^m n_j^{1/q_j^{(2)}-1/q_j^{(1)}}+\prod_{j=1}^m n_j^{\frac{2+\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Далее из (3.12) получим неравенства

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \gg \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{6k_0}\prod_{j=1}^m n_j^{-1/q_j^{(2)}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}\\ \times\prod_{j=1}^m n_j^{\frac{2+\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \gg \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{6k_0}\prod_{j=1}^m n_j^{-1/q_j^{(1)}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}. \qquad (3.14)$$

Оценим $\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}$. В силу соотношений (3.9) и (3.10) будем иметь

$$\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}} \asymp \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{6k_0}\Big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1/p_j^{(1)}}(\delta^0)^{-2}+\prod_{j=1}^m n_j^{-1/p_j^{(2)}}(\delta^0)^{\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\Big).$$

Подставляя значения числа δ^0, отсюда получим

$$\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}} \asymp \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{6k_0}\prod_{j=1}^m n_j^{-1/p_j^{(1)}-\frac{2}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}. \qquad (3.15)$$

Теперь из неравенства (3.13) и соотношения (3.15) следует, что

$$\frac{\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j^{(1)}-1/q_j^{(2)}+\frac{2+\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}. \qquad (3.16)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{p_j^{(1)}}-\frac{1}{q_j^{(2)}}+\frac{2+\sum_{j=1}^m 1/q_j^{(2)}}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big)$$

$$=\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{q_j^{(2)}}+\frac{\sum_{j=1}^m(1/q_j^{(2)}-1/p_j^{(2)})}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot\Big(\frac{1}{p_j^{(2)}}-\frac{1}{p_j^{(1)}}\Big).$$

Поэтому неравенство (3.16) можно написать в следующем виде:

$$\frac{\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j^{(2)}-1/q_j^{(2)}+\frac{\sum_{j=1}^m(1/q_j^{(2)}-1/p_j^{(2)})}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(2)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}. \qquad (3.17)$$

Далее из неравенства (3.14) и соотношения (3.15) получим

$$\frac{\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\|\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j^{(1)}-1/q_j^{(1)}}. \qquad (3.18)$$

Пусть $p_j^{(2)} < p_j^{(1)}$, $j=1,\ldots,m$. Рассмотрим полином $\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\overline{t})$, определенный по формуле (3.8) при $\delta_l=\delta^0/n_l$, $l=1,\ldots,m$,

$$\delta^0=c(m)\Big(\prod_{j=1}^m n_j^{1/p_j^{(1)}-1/p_j^{(2)}}\Big)^{\frac{1}{2+\sum_{j=1}^m 1/p_j^{(1)}}}.$$

Тогда

$$\|-\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}=\|(-\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot))^+\|_{L_{\overline{q}^{(1)}}}+\|(-\tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot))^-\|_{L_{\overline{q}^{(2)}}}$$

$$=\|\tilde{T}^-_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{q}^{(1)}}}+\|\tilde{T}^+_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)\|_{L_{\overline{q}^{(2)}}}.$$

Далее, применяя лемму 3.3, аналогично доказательству неравенств (3.13) и (3.14) получим

$$\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} \gg \Bigl(\prod_{j=1}^{m} n_j\Bigr)^{6k_0} \prod_{j=1}^{m} n_j^{-1/q_j^{(2)} - \frac{2}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j^{(1)}}\cdot(1/p_j^{(1)}-1/p_j^{(2)})}, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}} &\gg \Bigl(\prod_{j=1}^{m} n_j\Bigr)^{6k_0} \prod_{j=1}^{m} n_j^{-1/q_j^{(1)} - \frac{2}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j^{(1)}}\cdot(1/p_j^{(1)}-1/p_j^{(2)})} \\ &\times \prod_{j=1}^{m} n_j^{\frac{2+\sum_{j=1}^{m} 1/q_j^{(1)}}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j^{(1)}}\cdot(1/p_j^{(1)}-1/p_j^{(2)})}\end{aligned} \tag{3.20}$$

Аналогично доказательству соотношения (3.15) с учетом леммы 3.3 можно убедиться, что

$$\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}} \asymp \Bigl(\prod_{j=1}^{m} n_j\Bigr)^{6k_0} \prod_{j=1}^{m} n_j^{-1/p_j^{(2)} - \frac{2}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j^{(1)}}\cdot(1/p_j^{(1)}-1/p_j^{(2)})} \tag{3.21}$$

в случае $p_j^{(2)} < p_j^{(1)}$, $j = 1,\dots,m$.

Таким образом, из неравенств (3.19), (3.20) и соотношения (3.21) получим

$$\frac{\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j^{(2)}-1/q_j^{(2)}}, \tag{3.22}$$

$$\frac{\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\| - \tilde{T}_{\overline{n},k_0}(\overline{\delta},\cdot)|_{L_{\overline{p}^{(1)},\overline{p}^{(2)}}}} \gg \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j^{(1)}-1/q_j^{(1)} + \frac{\sum_{j=1}^{m}(1/p_j^{(1)}-1/q_j^{(1)})}{2+\sum_{j=1}^{m} 1/p_j^{(1)}}\cdot(1/p_j^{(2)}-1/p_j^{(1)})}, \tag{3.23}$$

в случае $p_j^{(2)} < p_j^{(1)}$, $j = 1,\dots,m$.

Теперь из неравенств (3.17), (3.18), (3.22), (3.23) следует утверждение теоремы. □

Докажем точность неравенства разных метрик в теореме 2.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $1 \le p_j < \max\{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\} \le \infty$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\dots,m$, $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $\overline{q}^{(1)} = (q_1^{(1)},\dots,q_m^{(1)})$, $\overline{q}^{(2)} = (q_1^{(2)},\dots,q_m^{(2)})$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\mathcal{T}_{\overline{p},\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}(\overline{n}) = \sup_{T_{\overline{n}}\in\mathfrak{T}_{\overline{n}}} \frac{\|T_{\overline{n}}|_{L_{\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}}}{\|T_{\overline{n}}\|_{L_{\overline{p}}}} \asymp \max\Bigl\{\prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j-1/q_j^{(1)}}, \prod_{j=1}^{m} n_j^{1/p_j-1/q_j^{(2)}}\Bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху величины $\mathcal{T}_{\overline{p},\overline{q}^{(1)},\overline{q}^{(2)}}(\overline{n})$ следует из теоремы 2.1, а оценка снизу — из теоремы 3.1 при $p_j^{(1)} = p_j^{(2)} = p_j$ для $j = 1,\dots,m$. □

З а м е ч а н и е 3.1. В случае $p_j^{(1)} = p^{(1)}$, $p_j^{(2)} = p^{(2)}$, $q_j^{(1)} = q^{(1)}$, $q_j^{(2)} = q^{(2)}$ для $j = 1,\dots,m$, теоремы 3.1 и 3.2, леммы 3.1–3.3 доказаны в [11].

Автор благодарен рецензенту статьи за содержательные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.

3. **Крейн М.Г., Нудельман А.А.** Проблемы моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
4. **Stefan Cobzaş**. Functional analysis in asymmetric normed spaces. Basel et al.: Springer, 2013. 230 p.
5. **Долженко Е.П., Севастьянов Е.А.** Аппроксимация со знакочувствительным весом // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 6. С. 59–102; Т. 63, № 3. С. 77–118.
6. **Рамазанов А.-Р.К.** О прямых и обратных теоремах аппроксимации в метрике знакочувствительного веса // Anal. Math. 1995. Vol. 21, no. 3. С. 191–212. doi: 10.1007/BF01911125
7. **Бородин П.А.** Теорема Банаха — Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 329–337.
8. **Alimov A.R.** Universality theorems for asymmetric spaces // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2023. Vol. 26, no. 2. Article no. 2250017. 11 p. doi: 10.1142/S0219025722500175
9. **Царьков И.Г.** Равномерная выпуклость в несимметричных пространствах // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 5. С. 773–785. doi: 10.4213/mzm13207
10. **Козко А.И.** Аналоги неравенств Джексона — Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 5. С. 687–699. doi: 10.4213/mzm1550.
11. **Козко А.И.** Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 9. С. 85–106.
12. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
13. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906.
14. **Бари Н.К.** Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1954. Т. 18, № 2. С. 159–176.
15. **Потапов М.К.** Некоторые неравенства для полиномов и их производных // Вестн. МГУ. Сер. математика и механика. 1960. № 2. С. 10–20.
16. **Халилова Б.А.** О некоторых оценках для полиномов // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физико-технических наук. 1974. № 2. С. 46–54.
17. **Иванов В.И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.
18. **Буренков В.И.** Теоремы вложения и продолжения для дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1966. С. 71–155.
19. **Горбачев Д.В.**, Точные неравенства Бернштейна — Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2022. Т. 22, № 5. С. 58–110. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
20. **Nessel R. J., Wilmes G.** Nikol'skii–type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type // J. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 25 (Series A). P. 7–18. doi: 10.1017/S1446788700038878
21. **Смаилов Е.С.** О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С. М. Никольского // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1158–1163.
22. **Ибрагимов И.И.** Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, №3. С. 15–417.
23. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 4. С. 539–547.
24. **Черных Н.И.** О некоторых экстремальных задачах для полиномов // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 48–89.
25. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004
26. **Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horv*á*th *Á*.** , Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-Line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1, P. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6.
27. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47.

28. **Арестов В.В., Дейкалова М.В.** Об одном обобщенном сдвиге и соответствующем неравенстве разных метрик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 40 –53. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-40-53
29. **Горбачев Д.В., Мартьянов И.А.** О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 80–89.
30. **Мартьянов И.А.** Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, № 1. С. 247–258. doi: 10.22405/2226-8383-2018-21-1-247-258
31. **Ganzburg M.I., Tikhonov S.Y.** On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45. P. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1
32. **Унинский А.П.** Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени // Теоремы вложения и их приложения: тр. симпозиума по теоремам вложения (Баку, 1966). М: Наука, 1970. С. 212–218.
33. **Сабзиев Н.М.** Об одной экстремальной задаче в классе тригонометрических полиномов // Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций. Изд-во АН Азерб. ССР. 1965. С. 265–272.
34. **Потапов М.К.** Теоремы вложения в смешанной метрике // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 156. С. 143–156.

Поступила 14.08.2023

После доработки 6.11.2023

Принята к публикации 13.11.2023

Акишев Габдолла

д-р физ.-мат. наук, профессор

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Казахстанский филиал, г. Астана;

Институт математики и математического моделирования, г. Алматы

e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Washington, V. H. Winston, 1979, 345 p. ISBN: 9780470265406 . Original Russian text was published in Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M., *Integral'nye predstavleniya funktsii i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1975, 480 p.
2. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 420 p. ISBN: 978-3-642-65713-9 . Original Russian text published in Nikol'skii S.M., *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
3. Krein M.G., Nudel'man A.A. *The Markov moment problem and extremal problems*, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1977, 417 p. ISBN: 978-0-8218-4500-4 . Original Russian text published in Krein M.G., Nudel'man A.A., *Problemy momentov Markova i ekstremal'nye zadachi*, Moscow, Nauka Publ., 1973, 554 p.
4. Cobzaş S. *Functional analysis in asymmetric normed spaces.* Basel, Springer, 2013, 230 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0478-3
5. Dolzhenko E.P., Sevastyanov E.A. Approximations with a sign-sensitive weight: existence and uniqueness theorems. *Izvestiya Math.*, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 1127–1168. doi: 10.1070/im1998v062n06ABEH000221
6. Ramazanov A.-R. K. On direct and converse theorems of the approximation theory in the metric of a sign sensitive weight. *Anal. Math.*, 1995, vol. 21, no. 3, pp. 191–212. doi: 10.1007/BF01911125
7. Borodin P.A. The Banach–Mazur theorem for spaces with asymmetric norm. *Math. Notes*, 2001, vol. 69, no. 3, pp. 298–305. doi: 10.1023/A:1010271105852
8. Alimov A.R. The Banach–Mazur theorem for spaces with an asymmetric distance, *Russian Math. Surveys*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 367–369. doi: 10.1070/rm2003v058n02abeh000615

9. Tsar'kov I.G. Uniform convexity in nonsymmetric spaces, *Math. Notes*, 2021, vol. 110, no. 5–6, pp. 773–783. doi: 10.1134/S0001434621110146
10. Kozko A.I. Analogs of the Jackson–Nikol'skii inequalities for trigonometric polynomials in spaces with nonsymmetric norm. *Math. Notes*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 574–584. doi: 10.1007/BF02355078
11. Kozko A.I. Multidimensional inequalities between distinct metrics in spaces with an asymmetric norm. *Sb. Math.*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1361–1383. doi: 10.1070/SM1998v189n09ABEH000348
12. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables. In: *Thirteen papers on functions of real and complex variables*, Azarin V.S. et al (eds.), Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1969, pp. 1–38. ISBN: 978-1-4704-3291-1 .
13. Jackson D. Certain problems of closest approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 39, no. 12, pp. 889–906. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05759-2
14. Bari N.K. Generalization of inequalities of S. N. Bernstein and A. A. Markov. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).
15. Potapov M.K. Some inequalities for polynomials and their derivatives. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, 1960, no. 2, pp. 10–20 (in Russian).
16. Khalilova B.A. On some estimates for polynomials. *Izv. Akad. Nauk Azerbaijan SSR, series of Physical and technical Sciences*, 1974, no. 2, pp. 46–54 (in Russian).
17. Ivanov V.I. Certain inequalities in various metrics for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 4, pp. 880–885. doi: 10.1007/BF01153038
18. Burenkov V.I. Embedding theorems and extensions for classes of differentiable functions of several variables defined throughout the space. *Itogi Nauki, Ser. Matem., Matem. Analiz*, Moscow: VINITI Publ.,1966, pp. 71–155 (in Russian).
19. Gorbachev D.V. Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, no. 5, pp. 58–110 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-5-58-110
20. Nessel R. J., Wilmes G. Nikol'skii–type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. *J. Austral. Math. Soc.*, 1978, vol. 25 (Series A), no. 1, pp. 7–18. doi: 10.1017/S1446788700038878
21. Smailov E. S. On the influence of the geometric properties of the spectrum of a polynomial on S.M. Nikol'skii inequalities of different metrics. *Siberian Math. J.*, 1998, vol. 39, no. 5, pp. 1000–1006. doi: 10.1007/BF02672923
22. Ibragimov I. I. Extremum problems in the class of trigonometric polynomials. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 121, no. 3, pp. 415–417 (in Russian).
23. Arestov V.V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 4, pp. 265–269. doi: 10.1007/BF01140526
24. Chernykh N.I. On some extremal problems for polynomials. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78. pp. 48–89 (in Russian).
25. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, no. 11, pp. 1501–1512. doi: 10.1016/j.jat.2012.08.004
26. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth *Á*. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-Line, *Anal. Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. doi: 10.1007/s10476-018-0103-6
27. Arestov V.V., Deikalova M.V. Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, no. 1, pp. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023
28. Arestov V.V., Deikalova M.V. On one generalized translation and the corresponding inequality of different metrics. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 4, pp. 40–53 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-40-53
29. Gorbachev D.V. Martyanov I.A. On interrelation of Nikolskii constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type. *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 80–89 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89
30. Martyanov I.A. Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight. *Chebyshevskii Sbornik*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 247–258 (in Russian). doi: 10.22405/2226-8383-2018-21-1-247-258
31. Ganzburg M. I., Tikhonov S. Y. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, no. 3, pp. 449–466. doi: 10.1007/s00365-016-9363-1

32. Uninskii A.P. Inequalities in the mixed norm for trigonometric polynomials and integer functions of finite degree. In: *Embedding theorems and their applications. Proceedings of the symposium on embedding theorems, Baku 1966*, Moscow, Nauka Publ., 1970, pp. 212–218 (in Russian).
33. Sabziev N. M. An extremal problem in the class of trigonometric polynomials. *Studies Contemporary problems constructive theory of functions*, Izdat. Akad. Nauk Azerb. SSR., 1965, pp. 265–272 (in Russian).
34. Potapov M.K. Imbedding theorems in a mixed metric. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1983, vol. 156, pp. 155–171.

Received August 14, 2023
Revised November 6, 2023
Accepted November 13, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP19677486).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow University, Kazakhstan Branch, Astana, 100001 Republic Kazakhstan; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Republic Kazakhstan e-mail: akishev_g@mail.ru .

Cite this article as: G. Akishev. Nikol'skii's inequality of different metrics for trigonometric polynomials in a space with mixed asymmetric norm. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 11–26 .