ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.54

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ π-РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП[1]

Л. С. Казарин

В этой работе исследуются конечные группы, имеющие тройную факторизацию $G = AB = AC = BC$, где сомножители A, B и C являются π-разрешимыми группами для некоторого множества π простых чисел. Эта задача, похоже, впервые сформулирована А. Ф. Васильевым и А. К. Фурсом в 2021 г. на конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А. И. Старостина.

Ключевые слова: конечная группа, подгруппа, характер, представление, факторизация.

L. S. Kazarin. On products of π-solvable finite groups.

In this paper, we study finite groups having a triple factorization $G = AB = AC = BC$, where the factors A, B, and C are π-solvable subgroups of the group G for some set π of primes. This problem seems to have been first formulated by A. F. Vasil'ev and A. K. Furs in 2021 at the conference dedicated to the 90th anniversary of the birth of A. I. Starostin.

Keywords: finite group, subgroup, character, representation, factorization.

MSC: 20D20

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-109-120

Введение

Задача описания конечных групп G, представимых в виде произведения $G = AB = AC = BC$ для своих подгрупп A, B и C с определенными ограничениями на их строение, является классической. Так Х. Виланд в 1960 г. [1] показал, что если A, B и C — разрешимые подгруппы группы G попарно взаимно простых индексов, то G разрешима. Автор в 1992 г. [2] доказал, что условие взаимной простоты индексов можно снять. Е. Пеннингтон в 1973 г. [3] доказала, что если для некоторого множества π простых чисел D_π-группа G является произведением π-замкнутых подгрупп A, B и C, то она также π-замкнута. Дальнейшее развитие тема получила в исследовании [4].

В этой статье, автор которой следует идее, обозначенной в классической работе Х. Виланда [1], исследуются конечные группы, имеющие тройную факторизацию $G = AB = AC = BC$, где сомножители A, B и C являются π-разрешимыми группами для некоторого множества π простых чисел. Естественно предположить, что группа G с такой факторизацией будет π-разрешимой. Эта задача, похоже, впервые сформулирована А. Ф. Васильевым и А. К. Фурсом в 2021 г. на конференции, посвященной 90-летию со дня рождения А. И. Старостина. Цель настоящей работы — нахождение условий, при выполнении которых рассматриваемая конечная группа будет π-разрешимой. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

1. Вспомогательные результаты

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — его дополнение во множестве всех простых чисел. Напомним, что группа G называется π-отделимой, если каждый ее композиционный фактор является либо π'-группой, либо π-группой. Группа G называется π-разрешимой,

[1]Работа выполнена при поддержке программы ВИП-008 ЯрГУ.

если каждый ее композиционный фактор есть либо π'-группа, либо p-группа для некоторого $p \in \pi$.

Лемма 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, а π' — его дополнение во множестве всех простых чисел и $p \in \pi$, $q \in \pi'$. Если G — π-отделимая группа и $\sigma = \{p, q\}$, то G имеет холлову σ-подгруппу.*

Доказательство леммы см. в [5, теорема 6.3.5]. □

Лемма 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, причем $|\pi' \cap \pi(G)| \leq 3$. Если группа $G = AB = AC = BC$ — произведение π-разрешимых подгрупп A, B и C, то G — π-разрешимая группа.*

Доказательство. Все простые неабелевы группы G с $|\pi(G)| = 3$ хорошо известны [6]. Так при $|\pi' \cap \pi(G)| = 3$ все простые неабелевы композиционные факторы G содержатся в списке групп

$$A_5, A_5, L_2(7), L_2(8), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2).$$

Поэтому при $|\pi(G) \cap \pi'| = 3$ лемма доказана. Если же $|\pi' \cap \pi(G)| < 3$, то группы A, B и C разрешимы, и утверждение леммы следует из [2]. □

Для дальнейшего нам понадобится понятие графа разрешимости $\Gamma_{sol}(G)$ конечной группы G, введенное в [7] С. Абе и Н. Йори.

Множество вершин графа $\Gamma_{sol}(G)$ группы G есть множество всех простых делителей ее порядка. При этом различные вершины $p, q \in \pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда существует разрешимая подгруппа группы G, порядок которой делится на pq. Множество всех вершин графа $\Gamma_{sol}(G)$, смежных с каждой вершиной графа, называется центром этого графа (и обозначается через $Z(\Gamma_{sol}(G))$).

Лемма 3. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и пусть группа $G = AB = AC = BC$ — произведение π-разрешимых подгрупп A, B и C. Если $p \in \pi \cap \pi(G)$, то $p \in Z(\Gamma_{sol}(G))$.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi \cap \pi(G), p \neq q \in \pi(G)$. По условию $G = AB = AC = BC$. Поэтому

$$\pi(G) = \pi(A) \cup \pi(B) = \pi(A) \cup \pi(C) = \pi(B) \cup \pi(C).$$

Допустим, что имеются две подгруппы, скажем, A и B, для которых $p \in \pi(A) \cap \pi(B)$. Очевидно, $q \in \pi(A) \cup \pi(B)$. Пусть $\sigma = \{p, q\}$. По лемме 1 подгруппа A или B имеет холлову σ-подгруппу, так что p и q смежны в графе $\Gamma_{sol}(G)$. Если же $p \in \pi(A)$, но $p \notin \pi(B)$, то $p \in \pi(C)$ и мы можем применить рассуждения, приведенные выше, для A и C вместо A и B. Поэтому в любом случае p и q смежны в графе $\Gamma_{sol}(G)$. Отсюда $p \in Z(\Gamma_{sol}(G))$, что и требовалось доказать. □

Лемма 4. *Пусть группа $G = AB = AC = BC$ — произведение подгрупп A, B и C. Тогда*

$$|A \cap B||A \cap C||G : A| = |A||B \cap C|.$$

Доказательство. Очевидно,

$$|G| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|} = \frac{|A||C|}{|A \cap C|} = \frac{|B||C|}{|B \cap C|}.$$

Отсюда

$$|G|^2 = \frac{|A||B|}{|A \cap B|} \frac{|A||C|}{|A \cap C|}.$$

Следовательно,

$$|G||G:A||A\cap B||A\cap C| = |A||G||B\cap C|.$$

Поэтому

$$|A\cap B||A\cap C||G:A| = |A||B\cap C|,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5. *Пусть G — конечная простая группа, изоморфная спорадической группе или исключительной группе лиева типа, отличной от $E_6(q)$ и $E_7(q)$, тогда $Z(\Gamma_{sol}(G))$ не содержит вершины, большей* 3.

Доказательство следует из теорем 1 и 2 в [8]. □

2. Формулировка основной теоремы и общие свойства минимального контрпримера к ней

Основной результат данной работы следующий.

Теорема 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Если $G = AB = AC = BC$ есть произведение собственных π-разрешимых групп A, B и C, то G — π-разрешимая группа.*

Для доказательства рассматриваем конечную группу G, удовлетворяющую условию теоремы, но являющуюся контрпримером к ее заключению, имеющим наименьший возможный порядок. На протяжении всей работы фиксируем эту группу и сохраним все введенные обозначения.

Лемма 6. *Пусть $N \neq 1$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $2 \in \pi'$, а G/N — π-разрешимая группа и $N = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$, где $k \geq 1$ и R_i — попарно изоморфные простые неабелевы группы.*

Доказательство. Очевидно,

$$G/N = (AN/N)(BN/N) = (AN/N)(CN/N) = (BN/N)(CN/N)$$

для π-разрешимых подгрупп, изоморфных $A/(A\cap N), B/(B\cap N)$ и $C/(C\cap N)$ группы G/N. При этом $|G/N| < |G|$. Поэтому G/N — π-разрешимая группа. Следовательно, N — характеристически простая группа. Так как N не является π-разрешимой группой, то из [2] следует, что $2 \in \pi'$ и N — прямое произведение попарно изоморфных простых неабелевых групп.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $N \neq 1$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N не является простой неабелевой π-разрешимой группой при $\pi(N) \subseteq \pi'$.*

Доказательство. Допустим, что N — простая неабелева группа, являющаяся π-разрешимой.

Если $\pi(N) \subseteq \pi'$, то G не является контрпримером.

Если же $\pi \cap \pi(N) \neq \varnothing$, то N не может быть простой неабелевой π'-группой.

Лемма доказана.

Факторизации почти простых групп максимальными подгруппами перечислены в [9]. Здесь имеются различные возможности для заключения теоремы 1, зависящие от определения множества π (и, соответственно, π'). Например, при $\pi' \supseteq \{2,3,5,17\}$ группа $L_2(16)$ является π-разрешимой. Между прочим, $L_2(16) = L_2(4)D_{34} = (2^4 \cdot 15)D_{34}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 будем вести, придерживаясь следующего плана.

1. В силу лемм 6 и 7 мы можем считать, что имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N группы G, являющаяся прямым произведением $k \geq 1$ изоморфных простых неабелевых групп R_i. Случай $k = 1$ — первый важный момент в доказательстве. Так как в этом случае $N = R_1$ — простая неабелева группа и $C_G(N) = 1$, то $N = F^*(G)$ — цоколь группы G. В дальнейшем мы будем его исследовать. При этом в лемме 8 будет рассмотрен случай, когда N — группа лиева типа, а в лемме 9 N — знакопеременная группа.

Благодаря лемме 5 и [9] мы можем считать, что N не может быть исключительной простой группой лиева типа или спорадической простой группой. Таким образом, среди простых групп лиева типа в качестве N надо рассмотреть лишь группы $L_n(q), U_n(q), PSp_{2m}(q), \Omega_{2m+1}(q)$ и $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$. Второй важный случай — это знакопеременные группы степени большей 5. Группы, порядок которых имеет малое количество простых делителей (не более 3), исключаются леммой 2.

В случае групп лиева типа мы будем сначала рассматривать группы, имеющие факторизации "геометрическими" подгруппами (что позволит исключить большую часть указанных групп). Затем, применяя лемму 5 и сведения о центрах графов $\Gamma_{sol}(G)$ для оставшихся типов факторизаций, исключаем и эти простые группы. Львиную долю работы по отсеиванию групп, не отвечающих нужным свойствам, берет на себя лемма 3 (как правило, вместе с леммой 5).

Соответствующие рассуждения проводятся в доказательстве леммы 8. Сначала исследуются факторизации "геометрическими" подгруппами (первая часть доказательства леммы 8), а затем в разд. 3 рассматриваются специальные подслучаи для групп лиева типа.

Наконец, исключаем знакопеременные группы. Во всех случаях используются сведения, изложенные в мемуаре [9].

В частности, имеются следующие важные обозначения, постоянно встречающиеся при работе с группами лиева типа. Если q^m — число элементов конечного поля (как правило, $q = p^e$, где p — характеристика поля), то q_m — это наибольшее простое число, делящее $q^m - 1$ и взаимно простое с $q^i - 1$ для $1 \leq i < m$ (наибольший примитивный простой делитель числа $q^m - 1$). Если $(q, m) \neq (2, 6)$ или $(q, m) \neq (4, 3)$, то число q_m существует (см. [9, p. 38]). Более того, если $m \geq 3$ и $(q, m) \neq (2, 6)$, то q_m не делит $|\mathrm{Out}(L)|$ для простой группы лиева типа над полем $GF(q)$ (см. [9, p. 38]).

2. Случай $k > 1$ после небольшого изучения сводится к ситуации, когда простые неабелевы сомножители R_i подгруппы N обладают следующим свойством: $|R_i|$ делит $|R_i \cap X||R_i \cap Y||\mathrm{Out}(R_i)|$, где в качестве X и Y выступают подгруппы A, B и C. Так что в определенной мере повторяются основные этапы п. 1.

Лемма 8. *Пусть $F^*(G) = N \neq 1$ — конечная простая группа лиева типа. Тогда N является π-разрешимой группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы предполагаем, что подгруппа $A \leq \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ — максимальная подгруппа группы G, а $B \leq \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ — максимальная подгруппа группы G. Вначале мы рассмотрим возможные факторизации максимальными "геометрическими" подгруппами (см. [9]) соответствующей почти простой группы, а затем (в разд. 3 и 4) исключим оставшиеся случаи.

С л у ч а й 1. Группа $N = L_n(q)$.

Мы придерживаемся обозначений, принятых в [9]. Во всех случаях факторизаций группы с цоколем $L_n(q)$ сомножитель $\tilde{A}$ выбран так, чтобы подгруппа $\tilde{A}$ имела порядок, делящийся на q_n, а подгруппа $\tilde{B}$ имела порядок, делящийся на q_{n-1}. В табл. 1 из [9] первый и второй сомножители выбраны в соответствии с указанным правилом.

Пусть $|\tilde{A}|$ делится на q_n и $|\tilde{B}|$ делится на q_{n-1}. Тогда для существования факторизации $G = \tilde{A}\tilde{C}$ необходимо, чтобы порядок $\tilde{C}$ делился одновременно на q_n и q_{n-1}. Если $n \geq 3$, то (q_n, q_{n-1}) делит $q - 1$. Если C — третья π-разрешимая подгруппа группы $G = AB = AC = BC$, где A, B, C — π-разрешимые подгруппы, то существует и максимальная подгруппа $\tilde{C}$ группы G, содержащая C и $\tilde{A}\tilde{C} = G$. Так как $q_n \in \pi(A)$, то $q_{n-1} \in \pi(C)$. При $n \geq 3$ получаем, что $q_{n-1} \in \pi(B)$; также и из $q_n \notin (\pi(B) \cup \pi(C))$ получаем, что $G \neq BC$. Поэтому N не является группой $L_n(q)$ с $n \geq 3$.

С л у ч а й 2. Группа $N = PSp_{2m}(q)(m \geq 3)$ и $m \geq 5$ при $q = 2$. Здесь и далее мы следуем [9], а также описанию Ашбахера максимальных "геометрических" подгрупп группы лиева типа.

Пусть $G = \tilde{A}\tilde{B}$ — произведение максимальных подгрупп группы G, где $N = F^*(G) = PSp_{2m}(q)$. В силу сделанных предположений оба простых числа q_{2m} и q_{2m-2} существуют. Будем предполагать, что подгруппа $A \leq \tilde{A}$ имеет порядок, делящийся на q_{2m}. Из табл. 2.5 [9] следует, что q^*_{2m-2} делит $|\tilde{B}|$. Используя табл. 2.5 из [9], заключаем, что $\tilde{B}$ содержится в $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_6 \cup \mathcal{C}_8$.

Если $\tilde{A} \subseteq \mathcal{C}_3$, то q_{2m-2} делит $|\tilde{B}|$. В этом случае по (3.2.1) в [9] имеем $X_A = PSp_{2a}(q^b).b$ и $\tilde{B}$ либо P_1, либо N_2. Если $\tilde{B} = P_1$, то факторизация существует. Если $\tilde{B} = N_2$, то имеются два подслучая (оба с $q = 2$ или $q = 4$).

Подслучаи $\tilde{B} \in \mathcal{C}_3$ или $\tilde{B} \in \mathcal{C}_6$ невозможны по арифметическим соображениям.

Если $\tilde{B} \in \mathcal{C}_8$, то q четно и $X_B = O^{\epsilon}_{2m}(q)$, а $\tilde{A} = Sp_{2m}(q^b).b$.

Далее, оставшиеся подслучаи $\tilde{A} \in \mathcal{C}_3$ невозможны по (3.2.2) из [9]. Случай $\tilde{A} \in \mathcal{C}_6$ также невозможен по арифметическим соображениям.

Остается случай $\tilde{A} \in \mathcal{C}_8$. Тогда $X_A = O^-_{2m}(q)$, где q четно. Соответствующие подслучаи перечислены в (3.2.4) [9].

Из $G = \tilde{A}\tilde{B}$ и предыдущего обсуждения получаем, что $q_{2m} \in \pi(\tilde{A}), q_{2m-2} \in \pi(\tilde{B})$. Как и в случае 1, получаем, что предположение о существовании факторизаций $G = AB = AC = BC$ приводит к противоречию.

С л у ч а й 3. Группа $N = U_n(q)(n \geq 4)$ и $n \geq 7$ при $q = 2$.

Согласно [9] надо рассматривать случай, когда $n = 2m$. Случаи, когда n нечетно, будут исследованы отдельно в разд. 3. Здесь мы будем рассматривать случай, когда q_{4m-2} делит $\tilde{A}$. Тогда $\tilde{A} \in \mathcal{C}_1$ и $\tilde{A} = N_1$. Отсюда q_{2m} делит $|B|$. Таким образом, строение $\tilde{A}$ определено и в (3.3.3)–(3.3.7) [9] определено строение B. Как и в предыдущих двух случаях, предположение о факторизациях $G = AB = AC = BC$ приводит к противоречию.

С л у ч а й 4. Группа $N = P\Omega_{2m+1}(q)(m \geq 4)$ и q нечетно.

В этом случае q_{2m} делит $|\tilde{A}|$, а $q_m \mid |\tilde{B}|$. Согласно (3.4) в [9] получаем $\tilde{A} = N_1^-$ и $\tilde{B} = P_m$. Так как $G = \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{A}\tilde{C} = \tilde{B}\tilde{C}$ для максимальных подгрупп $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ группы G, то, учитывая полученные ограничения на содержание множества простых делителей их порядков, получаем противоречие.

С л у ч а й 5. Группа $N = P\Omega^-_{2m}(q)(m \geq 4)$ и $m \geq 5$ при $q = 2$.

Будем предполагать, что q_{2m} делит $|\tilde{A}|$. В этом случае q_{2m-2} делит $|\tilde{B}|$. В рассматриваемых случаях $\tilde{B}$ оказывается равным P_1, N_1 или N_2^+. Все подслучаи описаны в разд. (3.5.1) и (3.5.2) [9]. Аналогично рассмотренным выше случаям получаем противоречие.

С л у ч а й 6. Группа $N = P\Omega^+_{2m}(q)(m \geq 5)$.

Будем предполагать, что q_{2m-2} делит $|\tilde{A}|$. Основная часть анализа посвящена случаю $\tilde{A} \in \mathcal{C}_1$. Тогда $\tilde{A} = N_1$ или N_2^-. Соответственно все подслучаи разобраны в разд. (3.6.1)–(3.6.3) работы [9]. Общее заключение то же, что и в случаях 1–5 выше.

Тем самым случай "геометрических" факторизаций в лемме 8 завершен.

3. Специальные подслучаи для групп лиева типа

Мы предполагаем, что подгруппа $A \leq \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ — максимальная подгруппа группы N.

П о д с л у ч а й 1. Группа $N = L_n(q)$.

Пусть $n = 2$ и $q \in \{11, 19, 29, 59\}$. Информация о максимальных подгруппах группы $L_2(q), q = p^m$ содержатся в теореме II.8.27 [10]. Случай, когда N — знакопеременная группа, изоморфная A_6, будет рассмотрен позднее.

Предположим, что q нечетно. Не ограничивая общности, можно считать, что $|\tilde{A}|$ делится на p^b, где $p^b > q^{1/2}$. Тогда $\tilde{A} \cap N$ будет изоморфна либо нормализатору силовской p-подгруппы P_1, либо $PGL_2(q^{1/2})$. Если $\tilde{A} \cap N = PGL_2(q)^{1/2}$, то порядок B должен делиться на $q^{1/2}(q+1)$, что невозможно. Поэтому $\tilde{A} \cap N = P_1$. Учитывая возможности для $\tilde{B}$, получаем, что либо $|\tilde{B}| = q+1$ (простая группа будет иметь факторизацию в этом случае лишь при $q \equiv 3 \pmod 4$), либо $\tilde{B} \simeq A_5$ при $q \in \{11, 19, 29, 59\}$, либо $\tilde{B} = S_4$ при $q \in \{7, 11, 23\}$ и $G = PGL_2(11)$ при $q = 11$. В случае $q = 7$ группа N должна иметь внешний автоморфизм. Предположим, что имеется факторизация с $\tilde{A} = P_1$. В этом случае $Z(\Gamma_{sol}(G)) = 2$, что противоречит лемме 5. Если $|\tilde{B}| = 5$, то либо $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$, либо $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ вопреки лемме 5. Наконец, при $q \in \{7, 11, 23\}$ и $\tilde{B} = S_4$ также имеем противоречие с леммой 5. Если $N = L_2(9) \simeq A_6$, то имеется факторизация $N = AB = AC = BC$, где $A \simeq B \simeq A_5$, а C — нормализатор (порядка 36) в N ее силовской 3-подгруппы, так что N (и G) — π-разрешимая простая группа для $\pi' \supseteq \{2, 3, 5\}$.

Пусть q четно. Из (3.5.1) [9] получаем, что $N = L_2(8)$ с $|\tilde{A} \cap N| = 18$ и $B \cap L = P_1$. Имеется и стандартная факторизация $G = P_1(D_{2(q+1)})$ или $G = L_2(16).4, |\tilde{A} = 17.8|, \tilde{B} = (A_5 \times 2).2$. Во всех случаях получаем противоречие с леммой 5.

Пусть теперь $N = L_3(4)$. Тогда $\tilde{A} \cap N = L_2(7), \tilde{B} = A_6$. Очевидно, вершина 7 графа $\Gamma_{sol}(G)$ смежна лишь с вершиной 3. Поэтому центр графа $\Gamma_{sol}(G)$ не может содержать вершин $p > 3$. По лемме 5 группа G исключается.

Пусть $N \simeq L_5(2)$. Порядок N равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$. По [11] центр графа $\Gamma_{sol}(N)$ пуст, и по лемме 5 эта группа исключена.

П о д с л у ч а й 2. Группа $N = U_n(q)$.

Пусть $N = U_3(3)$. Порядок N равен $2^5 \cdot 3^7 \cdot 7$. Легко видеть, что центр графа $\Gamma_{sol}(N)$ не содержит вершины 7. Поэтому N исключается леммой 5.

Пусть $N = U_3(5)$. Из доказательства леммы 3 в [8] следует, что центр ее графа $\Gamma_{sol}(N)$ пуст; противоречие с леммой 5.

Пусть $N = U_3(8)$. Из доказательства леммы 3 (пункт 13) в [8] следует противоречие с леммой 5.

Пусть $N = U_4(2)$. Порядок N равен $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Из [11, с. 26] следует, что $Z(\Gamma_{sol}(N))$ не содержит вершины 5; противоречие с леммой 5.

Пусть $N = U_4(3)$. Порядок N равен $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$. Согласно п. 15 доказательства леммы 3 в [8] центр графа $\Gamma_{sol}(N)$ состоит из вершины 3; противоречие с леммой 5.

Пусть $N = U_6(2)$. Порядок N равен $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. При этом центр графа $\Gamma_{sol}(N)$ не содержит вершин 5 и 7 (см. [11, с. 115]).

Пусть $N = U_9(2)$. В этом случае имеется факторизация $N = J_3 P_1$, где $|J_3| = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$. Отметим, что $\pi(N) = \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 43\}$. Согласно теореме 3 из [8] центр графа $\Gamma_{sol}(J_3)$ пуст.

Очевидно, группа N не может содержать разрешимой подгруппы порядка $17 \cdot r$ для простого числа $r > 3$. Отсюда видно, что центр графа $\Gamma_{sol}(N)$ не имеет вершины $r > 3$; противоречие с леммой 5.

Пусть $N = U_{12}(2)$. Согласно [9] имеется факторизация $N = N_1 Suz$. При этом $Suz \cap N_1 = 3^5.L_2(11)$. Группа Suz имеет порядок $2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Как в случаях с $U_{2n}(q)$, предполагаем, что $\tilde{A} = N_1$. При этом $13 = (2^6+1)/5$ делит $|B|$, и приходим к противоречию, как и в случае с $U_{2n}(q)$ выше.

П о д с л у ч а й 3. Группа $N = PSp_{2n}(q)$.

Пусть $N = PSp_4(3)$. Порядок N равен $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Из [11, с. 26] следует, что $Z(\Gamma_{sol}(N))$ не содержит вершины 5; противоречие с леммой 5.

Пусть $N = PSp_6(3)$. Порядок N равен $2^9 \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Из [11, с. 110] следует, что $Z(\Gamma_{sol}(N))$ не содержит вершин $5, 7, 11$, что противоречит лемме 5.

Пусть $N = PSp_8(2)$. Порядок N равен $2^{16}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17$. Из [11, с. 123] следует, что $Z(\Gamma_{sol}(N))$ не содержит вершин $5, 7, 17$, что противоречит лемме 5.

Подслучай 4. Группа $N = P\Omega_n(q)$.

Пусть $N = P\Omega_7(3)$. Порядок N равен $2^8 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Используя [11, с. 108], заключаем, что $Z(\Gamma_{sol}(LR))$ не содержит вершин $5, 7, 13$, что противоречит лемме 5.

Подслучай 5. Группа $N = P\Omega^-_{2n}(q)$.

Пусть $N = \Omega^-_{10}(2)$. Согласно (5.2.16) в [9] имеем $N = A_{12}P_1$. При этом 2^{20} делит $|\tilde{A}|$ и 2^{18} делит $|P_1|$. Как и в случае 5 леммы 8, получаем противоречие.

По предложению 4.7 в [9] имеется факторизация $\Omega^+_{24}(2) = Co_1N_1$. Как и в случае 5 леммы 8, получаем противоречие.

Подслучай 6. Группа $N = P\Omega^+_{2n}(q)$.

Пусть $N = \Omega^+_8(2)$. По п. 11 доказательства леммы 3 из [8] имеем $Z(\Gamma_{sol}(N)) = \{2, 3\}$. По лемме 5 получаем противоречие.

Пусть $N = P\Omega^+_8(q)$. Максимальные подгруппы этой группы перечислены П. Клейдманом в статье [12], среди них $GL_4(q).2, GU_4(q).2, \Omega_7(q)$ (см. также разд. 3.10.8 книги Р. А. Уилсона [13] и табл. в [14, с. 381–404]). Простые вычисления с использованием леммы 3 показывают, что $Z(\Gamma_{sol}(N)) \subseteq \{2, 3\}$. По лемме 5 получаем противоречие. Заметим, что группа N обладает факторизацией $N = X_1X_2 = X_2X_3 = X_1X_3$, где $X_i \simeq P\Omega_7(q)$ (см. [9]).

Лемма 8 (специальные подслучаи) доказана.

4. Группы подстановок

Согласно теореме D из [9] группа G с цоколем $N = A_n (n \geq 5)$ имеет факторизацию $G = AB$ с подгруппами A и B, не содержащими N, только в одном из следующих случаев: (i) $A_k \leq A \leq S_k \times S_{n-k}$ для некоторого $k \leq 5$ и $B - k$ — однородная группа либо (ii) $n = 5, 8$ или 10.

Напомню, что группа подстановок множества Ω называется k-однородной, если она действует транзитивно на k-элементных подмножествах множества Ω.

Лемма 9. *Пусть $F^*(G) = N \neq 1$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, где N — простая неабелева группа, изоморфная знакопеременной группе A_n с $n \geq 5$. Тогда N является π-разрешимой группой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай (ii) теоремы D из [9]. В случае $n \leq 6$ группа G будет либо произведением разрешимых подгрупп и потому не будет контрпримером, либо два сомножителя будут изоморфны A_5, и необходимо считать, что группы A_5 и A_6 входят в список π-разрешимых групп (по определению). При $7 \leq n \leq 10$ по теореме 3 в [8] граф $Z(\Gamma_{sol}(L)) \subseteq \{2, 3\}$. По лемме 5 получаем противоречие.

Пусть теперь N является группой типа (i) теоремы D. В этом случае (по вышеуказанному) можно считать, что $n \geq 11$. Если N — простая 4-транзитивная группа подстановок степени n, то N — либо знакопеременная группа A_n, либо одна из групп Матье степени 11, 12, 23 или 24 (см. [15], § 38, теорема 3).

В перечисленных случаях $n \in \{11, 12, 23, 24\}$ и N не является контрпримером к теореме 1 по лемме 5. Если N не является 4-транзитивной группой, то по результату В. М. Кантора [16, замечание XII.6.17, п. с.)] группа N изоморфна одной из групп $PGL_2(8)$, $P\Gamma L_2(8)$ или $P\Gamma L_2(32)$ в ее естественном представлении. Группы $PGL_2(8)$ и $P\Gamma L_2(8)$ не могут быть π-разрешимыми, ибо имеют лишь один нечетный простой делитель, больший 3. Аналогично группа $P\Gamma L_2(32)$ не является π-разрешимой при $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$. По лемме Виланда (лемма XII.6.3 в [16]), если группа k-однородна, $k \geq 2$ и для всякого примарного делителя p^a числа k выполнено $k + p^a - 1 \leq n$, то группа $k-1$-однородна. Поэтому сказанное выше для $k = 4$ верно и для $k = 5$.

В п. b) замечания XII.6.17 из [16] утверждается, что 3-однородная группа H, не являющаяся 3-транзитивной, обладает следующими свойствами: либо $L_2(q) \leq H \leq P\Gamma L_2(q)$, где

$n = q+1$, либо H — группа линейных или полулинейных подстановок поля $GF(8)$ или $GF(32)$. Применение теоремы Диксона (теорема II.8.27 в [10]) исключает эти возможности.

Согласно лемме XII.6.2 из [16] 2-однородная группа четного порядка 2-транзитивна.

По обобщению С. Рамануржаном теоремы Бертрана — Чебышева для любого $n \geq 11$ существует два простых числа между $n/2$ и n. С другой стороны, если $G = AB = AC = BC$, где A, B и C — максимальные подгруппы знакопеременной группы A_n, то A обязана быть изоморфна группе вида $A_{n-k} \leq A \trianglelefteq (S_{n-k} \times S_k)$ $(k \leq 5)$, тогда как B и C должны быть k-однородными. Последнее, очевидно, исключено.

В самом деле, если $G = AB$, где $A_{n-k} \leq A \trianglelefteq S_{n-k} \times S_k$, то подгруппа B обязана быть k-однородной при $k \leq 5$. С другой стороны, из факторизации $G = AC$ следует, что и C должна быть k-однородной при $k \leq 5$.

Рассмотренные выше случаи показывают, что подгруппы B и C обязаны быть 2-транзитивными. Список 2-транзитивных групп содержится в [18].

Единственными известными простыми 4-транзитивными группами, кроме симметрических и знакопеременных групп, являются группы Матье $M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}$. Из леммы 5 и работы [8] следует, что эти случаи исключены. Поэтому можно считать, что группа N не является ни 4-транзитивной, ни 5-транзитивной. Используя теоремы XII.6.3, XII.6.7 и XII.6.11 из [16], заключаем, что для $3 \leq k \leq 5$ группа N является k-однородной и $k-1$ однородной. Так как она является $k-2$-транзитивной, то $n = 5$, $n = 6$ или $n = 9$ исключаются по лемме 5. Если $k = 3$ и N не является 2-транзитивной, но является 3-однородной и 2-однородной, то опять можно применить теорему XII.6.11 из [16] и лемму 3 в [8]. Если же N является 3-однородной, но не 3-транзитивной, то по замечанию XII.6.17 из [16] имеем $L_2(q) \leq P\Gamma L_2(q)$ или R — группа линейных перестановок поля $GF(8)$, либо группа полулинейных отображений поля $GF(8)$ или $GF(32)$. Обе возможности исключаются с помощью теоремы II.8.27 Л. Е. Диксона из [10].

Заметим, что для простого числа $r > n/2$ из того, что группа A_n является π-разрешимой и $r \in \pi$, следует, что A_n имеет холлову $\{r, p\}$-подгруппу H. По лемме 5 в [19] эта подгруппа является r-замкнутой для r, не являющегося простым числом Мерсенна (существование такого гарантировано для $n \geq 12$). Но простая группа $A_n (n \geq 12)$ не содержит холловых r-замкнутых $\{r, p\}$-подгрупп с указанным свойством, что легко следует из формулы (5.9.3) в [20]. На самом деле можно исключить уже группы A_{n-k} при $n-k \geq 7$. Например, при $n = 8$, $n = 9$ или $n = 10$ имеется простое число $r = 5$. Поэтому подгруппа A_{n-k}, содержащаяся в A по теореме D из [9], должна удовлетворять соотношению $n - k \leq 7$. Следовательно, $n \leq 12$. Использование списка 2-транзитивных групп в [18] и леммы 5 позволяет исключить эти группы.

Таким образом, лемма 9 доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Лемма 10. *Пусть π — множество простых чисел и группа $G = AB = AC = BC$ — произведение π-разрешимых подгрупп A, B и C, являющееся минимальным контрпримером к теореме 1, и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда*

$$N = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k, \quad k > 1,$$

где $R_i \simeq L$ — простая неабелева группа, G/N — π-разрешимая группа, причем $|R_i|$ делит $|A \cap R_i||B \cap R_i||\mathrm{Out}(R_i)|$ для каждого i.

Доказательство. Пусть $A = X_1, B = X_2$, и пусть L_{ij} — проекция $N \cap X_i$ на R_j для $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots k$. Очевидно, L_{ij} является π-разрешимой группой для любых $i \leq 2$ и $j \leq k$. Поэтому $L_i = L_{i1} \times L_{i2} \times \cdots \times L_{ik}$ является π- разрешимой подгруппой N, содержащей $N \cap X_i$ и являющейся X_i-допустимой для $i = 1, 2$. По выбору X_i имеем $L_i = N \cap X_i$ и $L_{ij} = R_j \cap X_i$ для всех $i \leq 2, j \leq k$. Заметим также, что если $R_r^a = R_l$ для некоторых $r, l \leq k$ и $a \in X_i$, то $L_{ir}^a = L_{il}$.

Зафиксируем $R_j = R$ для некоторого $j \le k$ и выберем наименьшие подгруппы U, V в X_1, X_2 соответственно, для которых $R \cap X_1 \le U, R \cap X_2 \le V$ и $UV = VU \ge R$.

Покажем сначала, что $S = R^U = R^V$. Предположим, что $S = R^U$ не содержится в R^V. Так как U и V перестановочны, то по закону Дедекинда получим $M = SU = (M \cap V)U$. Очевидно, $R \le M \le UV$ и $R \cap V = (M \cap V) \cap R$. Так как $S = R^M = R^U$ не содержит R^V, то $|M \cap V| < |V|$, что противоречит выбору U и V.

Теперь мы можем предполагать, что $S = R^U = R^V = R^T$, где $T = UV = SU = SV$. Ясно, что S — минимальная нормальная подгруппа в T и может быть представлена в виде $S = M_1 \times M_2 \cdots \times M_t (t \le k)$; здесь $R = M_1, M_2, \ldots, M_t$ есть изоморфные простые неабелевы группы. Легко видеть, что $U \cap M_i$ сопряжена с $U \cap M_j$ для любых $1 \le i, j \le t$.

Более того, $T/S \simeq U/(U \cap S)$ является π-разрешимой. Поэтому $C = C_T(S)$ — тоже π-разрешимая нормальная подгруппа в T и $T/C \simeq \mathrm{Aut}(SC/C) \le \mathrm{Aut}(S)$. Используя стандартные соглашения о “крышках”, имеем $\bar{T} \le \mathrm{Aut}(\bar{S}), \bar{T} = \bar{U}\bar{V} = \bar{S}\bar{U} = \bar{S}\bar{V}$ и $\bar{S} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 \cdots \times \bar{M}_t$. Очевидно, что $\bar{T}$ вкладывается в $\mathrm{Aut}(\bar{M}_1) \wr \Gamma$, где Γ — π-разрешимая транзитивная группа подстановок степени t.

Пусть K — такая наибольшая подгруппа $\bar{T}$, что $\bar{M}_l^x = \bar{M}_l$ для всякого $l \le t$ и $x \in K$. Очевидно, $K \le \Pi_{i=1}^t \mathrm{Aut}(\bar{M}_i)$. Поэтому можно считать, что $\bar{T}/K \subseteq \Gamma$, и заключить по лемме 4, что $|\bar{M}_1|^t = |R|^t$ делит

$$|\bar{T} : K||K : \bar{S}||\bar{S} \cap \bar{U}||\bar{S} \cap \bar{V}|.$$

Так как $|\bar{S} \cap \bar{U}| = |\bar{R} \cap \bar{U}|^t = |\bar{R} \cap \bar{X}_1|^t$, то отсюда следует, что $|R|^t$ делит

$$|\mathrm{Out}(R)|^t |R \cap X_1|^t |R \cap X_2|^t |\Gamma|.$$

Достаточно показать, что если простое число r делит $|R|^t$, то оно делит

$$|\mathrm{Out}(R)|^t |R \cap X_1|^t |R \cap X_2|^t = m^t.$$

Мы можем предположить, что $|R| = ab$, где a^t делит m^t и $(b, m/a) = 1$. Допустим, что $r \in \pi(b)$. Тогда r^t делит $|\Gamma|$. По известным свойствам групп подстановок (формула (5.9.3) в [20]) это неверно.

Лемма 10 доказана.

Закончим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

1) Пусть $L \simeq R_1$ — группа, изоморфная $L_n(q)$. По лемме 10 имеем, что $|L|$ делит $|A \cap R_1||B \cap R_1||\mathrm{Out}(L)|$. По тем же соображениям $|L|$ делит $|A \cap R_1||C \cap R_1||\mathrm{Out}(L)|$ и $|C \cap R_1||B \cap R_1||\mathrm{Out}(L)|$.

Не ограничивая общности, можно считать, что q_n делит $|A \cap R_1|$, q_{n-1} делит $|B \cap R_1|$. Тогда, учитывая факторизацию $G = AB = AC = BC$, получаем, что либо q_n не делит $|C \cap R_1|$, либо q_{n-1} не делит $|A \cap R_1||C \cap R_1|$, что противоречиво. В любом случае $|\mathrm{Out}(L)|$ взаимно прост с $q_n q_{n-1}$.

Специальные случаи $L_2(q), L_3(4)$ и $L_5(2)$ исключаются, как в лемме 8.

2) Рассмотрим случай $L \simeq PSp_{2m}(q), m \ge 3$ и $m \ge 2$ при $q = 2$. Как и при доказательстве леммы 8, имеем $q_{2m} \in \pi(A \cap R_1), q_{2m-2} \in \pi(B \cap R_1)$. Но предположение о существовании факторизации $G = AB = AC = BC$ (как и в доказательстве леммы 8) приводит к противоречию. Специальные случаи $PSp_4(3), PSp_6(3)$ и $PSp_8(2)$ исключаются, как в лемме 8.

3) Группа $L = U_n(q)$ $(n \ge 4)$ и $n \ge 7$ при $q = 2$.

Согласно [9] надо рассматривать случай, когда $n = 2m$. Мы будем рассматривать случай, когда q_{4m-2} делит $\tilde{A}$. Тогда $\tilde{A} \in \mathcal{C}_1$ и $\tilde{\mathcal{A}} = N_1$ (см. [9], (3.3.3)). Отсюда q_{2m} делит $|B|$. Таким образом, строение $\mathcal{A}$ определено, и в (3.3.3)–(3.3.7) определено строение B. Как и в предыдущих двух случаях, предположение о факторизациях $G = AB = AC = BC$ приводит к противоречию.

Специальные случаи $U_3(q) (q = 3, 5, 8), U_4(2), U_4(3), U_6(2), U_9(2)$ и $U_{12}(2)$ исключаются, как в лемме 8.

4) Группа $L = P\Omega_{2m+1}(q) (m \geq 4)$ и q нечетно.

В этом случае q_{2m} делит $|A \cap R_1|$, а $q_m \mid |B \cap R_1|$. Согласно (3.4) в [9] получаем $A \cap R_1 = N_1^-$ и $B \cap R_1 = P_m$. Так как $G = AB = AC = BC$ для максимальных подгрупп A, B, C группы G, то, учитывая полученные ограничения на содержание множества простых делителей их порядков, получаем противоречие.

Пусть $L = P\Omega_7(3)$. В этом случае центр группы $G \cap R_1$ не содержит вершин $5, 7, 13$, что приводит к противоречию.

5) Группа $L = P\Omega_{2m}^-(q)$ $(m \geq 4)$ и $m \geq 5$ при $q = 2$. Будем предполагать, что q_{2m} делит $|\tilde{A}|$. В этом случае q_{2m-2} делит $|\tilde{B}|$. В рассматриваемых случаях $\tilde{B}$ оказывается равным P_1, N_1 или N_2^+. Все подслучаи описаны в (3.5.1) и (3.5.2) в [9]. Аналогично рассмотренным выше случаям получаем противоречие. Специальный случай $L = \Omega_{10}^-(2)$ исключается по арифметическим соображениям и тройной факторизацией $G = AB = AC = BC$.

6) Группа $L = P\Omega_{2m}^+(q)$ $(m \geq 5)$.

Будем предполагать, что q_{2m-2} делит $|A \cap R_1|$. Основная часть анализа посвящена случаю $A \cap R_1 \in \mathcal{C}_1$. Тогда $A \cap R_1 = N_1$ или N_2^-. Соответственно все подслучаи разобраны в разд. (3.6.1)–(3.6.3) из [9].

Случай $L \simeq \Omega_8^+(2)$ исключен по лемме 5. Рассмотрим группу $P\Omega_8^+(q)$. Ее порядок равен $q^{12}(q^6-1)(q^4-1)^2(q^2-1)$. Пусть $q > 3$. Тогда элементы порядков $r \in \pi(q^6-1)$ и $s \in \pi(q^4-1)$, отличные от 2 и 3 и не содержащиеся в $\pi(L_2(q))$, не могут определять ребро в графе $\Gamma_{sol}(P\Omega_8^+(q))$. Поэтому подгруппы $P\Omega_7(q)$, являющиеся сомножителями в группе $P\Omega_8^+(q)$, не являются π-разрешимыми группами для любого $\pi \subseteq \pi(P\Omega_8^+(q))$.

7) Знакопеременные группы. Случай (ii) теоремы D в [9] исключается, как и в лемме 9.

Рассмотрим случай (i) теоремы D из [9]. Не ограничивая общности, можно считать, что группа $A \cap N$ содержится в группе, имеющей нормальную подгруппу, изоморфную A_{n-k}, и содержащейся в $A_{n-k} \times S_k$, где $k \leq 5$. При этом $A \cap N$ должна быть π-разрешимой группой. В частности, для всякого простого числа $r > (n-k)/2$, не являющегося простым числом Мерсенна, и $p \in \pi(A) \cap \pi \setminus \{r\}$ должна существовать холлова $\{r, p\}$-подгруппа H группы $A \cap N$. По лемме 5 из [19] подгруппа H обязана быть r-замкнутой. По формуле (5.9.3) из [20] получаем противоречие, ибо такой подгруппы в группе S_n нет, если $r > 3$ и $n - k > 7$. Поэтому $n \leq 12$. Как и в лемме 9, эта возможность исключается.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wielandt H.** Uber die Normalstructur von mehrfach factorizierten Gruppen // J.Austral. Math.Soc. 1960. Vol. 1. P. 143–146.
2. **Kazarin L.S.** Factorizations of finite groups by solvable subgroups // Ukrainian Math. J. 1992. Vol. 43. P. 883–886.
3. **Pennington E.** Trifactorisable groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1973. Vol. 8. P. 461–469.
4. **Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.** Finite trifactorized groups and π-decomposable groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2018. Vol. 97, no. 2. P. 218–228. doi: 10.1017/S0004972717001034
5. **Gorenstein D.** Finite groups. NY: Harper and Row, 1968. 642 p.
6. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
7. **Abe S., Iiyori N.** A generalization of prime graphs of finite groups // Hokkaido Math. J. 2000. Vol. 29. P. 391–407.
8. **Kazarin L.S., Tutanov V.N.** On centers of soluble graph // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Vol. 18, no. 2. P. 1517–1530. doi: 10.33048/semi.2021.18.114

9. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. 151 p. (Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 86, no. 432).
10. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; NY: Springer Verlag, 1967. 793 p. (Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; Band 134). doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
11. **Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A. , Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
12. **Kleidman P.** The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1987. Vol. 110, no. 1. P. 173–242. doi: 10.1016/0021-8693(87)90042-1
13. **Wilson R.A.** The finite simple groups. Berlin; London: Springer, 2009. 298 p. (Ser. Grad. Texts in Math.) doi: 10.1007/978-1-84800-988-2
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Douglas C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576
15. **Супруненко Д.А.** Группы подстановок. Мн.: Навука і тэхника, 1996. 266 с.
16. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups III. Berlin; Heidelberg; NY: Springer Verlag, 1982. 454 p. (Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; Band 243). doi: 10.1007/978-3-642-67997-1
17. **Ramanujan S.** A proof of Bertrand's postulate // J. Indian Math. Soc . 1919. Vol. 11. P. 181–182.
18. **Kantor W.M.** Homogeneous designs and geometric lattices // J. Combinatorian Theory. Ser. A. 1985. Vol. 38. P. 66–74.
19. **Hauck P., Kazarin L., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D.** Thompson-like characterization of solubility for products of finite groups // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 2021. Vol. 200 (1). P. 337–362. doi: 10.1007/s10231-020-00998-z
20. **Холл М.** Холл М. Теория групп. М.: Изд. иностр. лит., 1962. 468 p.

Поступила 15.04.2023
После доработки 16.08.2023
Принята к публикации 28.08.2023

Казарин Лев Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
профессор кафедры алгебры и мат. логики
Ярославский университет имени П. Демидова
г. Ярославль
e-mail: lsk46@mail.ru

REFERENCES

1. Wielandt H. Uber die Normalstructur von mehrfach factorizierten Gruppen. *J.Austral. Math.Soc.*, 1960, vol. 1, pp. 143–146.
2. Kazarin L.S. Factorizations of finite groups by solvable subgroups. *Ukrainian Math. J.*, 1992, vol. 43, pp. 883–886.
3. Pennington E. Trifactorisable groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1973, vol. 8, pp. 461–469.
4. Kazarin L.S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D. Finite trifactorized groups and π-decomposable groups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2018, vol. 97, no. 2, pp. 218–228. doi: 10.1017/S0004972717001034
5. Gorenstein D. *Finite groups.* NY: Harper and Row, 1968, 642 p.
6. Herzog M. On finite simple groups of order divisible by three primes only. *J. Algebra*, 1968, vol. 10, no. 3, pp. 383–388.
7. Abe S., Iiyori N. A generalization of prime graphs of finite groups. *Hokkaido Math. J.*, 2000, vol. 29, pp. 391–407.
8. Kazarin L.S., Tutanov V.N. On centers of soluble graph. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 1517–1530. doi: 10.33048/semi.2021.18.114
9. Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J. *The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups*, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990, 151 p., Ser. Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 86, no. 432.

10. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg; NY: Springer Verlag, 1967, Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 134, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3
11. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A. , Wilson R.A. *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
12. Kleidman P. The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+(q)$ and their automorphism groups. *J. Algebra*, 1987, vol. 110, no. 1, pp. 173–242. doi: 10.1016/0021-8693(87)90042-1
13. Wilson R.A. *The finite simple groups.* Berlin; London: Springer, 2009. 298 p., Ser. Grad. Texts in Math. doi: 10.1007/978-1-84800-988-2
14. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Douglas C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576
15. Suprunenko D.A. *Gruppy podstanovok* [Groups of substitutions]. Minsk, Navuka i Tjehnika Publ., 1996, 366 p.
16. Huppert B., Blackburn N. *Finite groups III.* Berlin; Heidelberg; NY: Springer Verlag, 1982, 454 p., Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; Band 243. doi: 10.1007/978-3-642-67997-1
17. Ramanujan S. A proof of Bertrand's postulate. *J. Indian Math. Soc.*, 1919, vol. 11, pp. 181–182.
18. Kantor W.M. Homogeneous designs and geometric lattices. *J. Combinatorian Theory. Ser. A.*, 1985, vol. 38, pp. 66–74.
19. Hauck P., Kazarin L., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M.D. Thompson-like characterization of solubility for products of finite groups. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 2021, vol. 200 (1), pp. 337–362. doi: 10.1007/s10231-020-00998-z
20. Hall M. *The theory of groups.* NY, The Macmillan Co., 1959, 434 p. Translated to Russian under the title Teoriya grupp, Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1962, 468 p.

Received April 15, 2023
Revised August 16, 2023
Accepted August 28, 2023

Funding Agency: This work was supported by Yaroslavl State University (program no. VIP-008).

Lev Sergeevich Kazarin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Yaroslavl P. Demidov State University, Yaroslavl, 150001 Russia, e-mail: lsk46@mail.ru .

Cite this article as: L. S. Kazarin. On products of π-solvable finite groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 109–120 .