ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.863

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПО ЯНГУ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ. ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СЕТЯХ[1]

Н. К. Обросова, А. А. Шананин

В статье разрабатывается математический аппарат двойственных по Янгу вариационных неравенств, с помощью которых моделируется рыночное равновесие в сети неоднородных с технологической точки производственных кластеров. Рассматриваются две постановки задачи: для замкнутой системы с заданным ограничением на ресурсы и для открытой системы, в которой ресурсы могут поставляться извне по заданным ценам. Доказана теорема о существовании решения вариационного неравенства, соответствующего рыночному равновесию в открытой системе.

Ключевые слова: производственная сеть, неоднородность, вариационное неравенство, двойственность по Янгу, рыночное равновесие, задача распределения ресурсов.

N. K. Obrosova, A. A. Shananin. Young duality of variational inequalities. An application for the analysis of interactions in production networks.

We develop a mathematical technique of Young dual variational inequalities, which are used to model market equilibrium in a network of production clusters that are heterogeneous from a technological point of view. Two formulations of the problem are considered: for a closed system with a given constraint on resources and for an open system in which resources can be supplied from outside at given prices. A theorem is proved on the existence of a solution to the variational inequality corresponding to market equilibrium in an open system.

Keywords: production network, heterogeneity, variational inequality, Young duality, market equilibrium, resource allocation problem.

MSC: 91B32, 90C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-88-105

Введение

С 80-х годов прошлого века в производственных системах развитых стран произошло существенное усложнение технологий. Это привело к смещению акцента в технологических укладах в сторону производства промежуточных товаров и услуг. Поэтому современные производственные системы представляют собой сложные сети экономических агентов, связанных цепочками потоков промежуточных факторов производства. В такой сети традиционная конкуренция за монопольное положение на рынке трансформируется в конкурентную борьбу за формирование устойчивой ниши в сети поставок. В экономической теории новое мировоззрение отражено в математических моделях Диксита — Стиглица [1] и монополистической конкуренции [2]. В [3; 4] предложена концепция экономического развития в сетевых экономических моделях, в которой расширение влияния экономических агентов за счет развития технологий и снижения себестоимости производства приводит к росту экономической эффективности в сети поставок.

Институциональные проблемы взаимодействия экономик разных стран обсуждаются с середины XX в. и связаны с формированием институтов, регулирующих финансовые потоки в мировой сети поставок. Так, введенная в рамках Бреттон — Вудского соглашения валютная система предполагала фиксированные валютные курсы европейских стран по отношению к доллару США, который, в свою очередь, предполагался полностью обеспеченным запасами

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 23-21-00429), https://rscf.ru/project/23-21-00429/ .

золота в США по фиксированному курсу. Система расширяла рынки сбыта для США, а также открывала американские рынки для европейских товаров. Жесткая привязка национальных валют к доллару обеспечила поток долгосрочных кредитных ресурсов в страны Европы, которые аккумулировал созданный для этих целей Международный банк реконструкции и развития (МБРР), что способствовало восстановлению европейских экономик после Второй мировой войны. Гарантом отсутствия краткосрочных проблем с ликвидностью национальных валют и покрытия дефицита их торгового баланса выступал Международный валютный фонд (МВФ). Восстановление экономик европейских стран привело к отказу от жесткой связи их валют с долларом. В середине 70-х годов под воздействием энергетического кризиса произошел отказ от золотого стандарта и переход к плавающим курсам с несколькими основными видами валют (Ямайские соглашения). Такая система позволяла европейским странам вести самостоятельную денежно-кредитную политику и контролировать уровень инфляции. При этом в условиях сформировавшихся к тому времени экономических связей стран Европы был запущен процесс европейской интеграции, который завершился созданием единой еврозоны на рубеже 2000-х годов. Евро быстро начал играть роль второй по значимости мировой валюты. Однако экономика еврозоны оказалась существенно неоднородной, объединив страны с разным уровнем технологического развития: более развитые “северные” страны во главе с Германией и отстающие в технологическом плане “южные” страны (например, Греция, Испания, Италия, Португалия). Переход на единую валюту стимулировал рост потребления “южных” стран и повышение уровня жизни. Однако систематическое превышение расходов над доходами привело к концу первого десятилетия существования еврозоны к постоянному дефициту бюджета и росту зависимости от немецких кредитных ресурсов. Не имея рычагов регулирования, основанных на девальвации национальной валюты, эти страны столкнулись с ростом безработицы и снижением производства [5; 6]. Все это свидетельствует о том, что проблема эффективного взаимодействия производственных кластеров крупной экономической сети нуждается в дополнительном анализе. Естественным инструментом для такого анализа является аппарат математических моделей, позволяющий описывать взаимодействие агентов с несовпадающими интересами и анализировать эффективность методов регулирования расчетов между ними с учетом целей агентов.

Ввиду описанных выше проблем ряда стран еврозоны, при изучении неоднородной производственной сетевой системы необходимо учитывать специфичекую проблему регулирования платежного баланса ее подсистем (кластеров), которые, по сути, являются открытыми. Если в замкнутой производственной сети можно считать производственные ресурсы ограниченными, а цены могут формироваться на требуемом для выполнения баланса уровне, то в открытой системе цены на первичные ресурсы являются заданными, например, мировым рынком и возможно изменение предложения этих ресурсов при изменении цен во внешней по отношению к кластеру системе.

В цикле работ авторов [7–14] начаты исследования, связанные с моделированием межотраслевых связей на основе решения задачи распределения ресурсов и двойственной по Янгу задачи для равновесных цен, в которых описание производственных технологий предполагает возможность замещения факторов производства. Такие модели являются более общими по сравнению с традиционными линейными моделями межотраслевого баланса В. В. Леонтьева (см. [15; 16]). Потребность развития таких моделей существенно выросла на фоне кризисов двух последних десятилетий в экономиках со сложной сетевой структурой [17–22].

В данной работе мы продолжаем эти исследования и предлагаем использовать математический аппарат вариационных неравенств для построения моделей межотраслевого баланса, позволяющих учитывать различные интересы кластеров крупной производственной сети. В разд. 1 дается определение вариационного неравенства и обсуждаются его возможности для моделирования рационального поведения экономических агентов. Во втором разделе в терминах вариационных неравенств строится и исследуется модель производственного кластера как элемента сети поставок. В разд. 3 в терминах двойственного по Янгу вариационного неравенства исследуется задача о регулировании (в том числе валютными курсами) распределения производственных ниш в результате изменения цен первичных ресурсов. В разд. 4 решается задача идентификации построенной модели межотраслевого баланса с производственными функциями Кобба — Дугласа на основе данных системы национальных счетов стран еврозоны 2000–2014 гг. Обсуждаются примеры расчетов по модели, демонстрирующие кластеризацию производственной сети еврозоны.

1. Двойственные вариационные неравенства

Пусть E — пространство Банаха, $A \subset E$, $f\colon A \to 2^{E^*}$, где E^* — пространство линейных непрерывных функционалов на E. Вариационным неравенством назовем пару (A, f).

Определение 1. Будем говорить, что $\hat{x} \in A$ является решением вариационного неравенства (A, f), если существует $p \in f(\hat{x})$ такой, что для любого $x \in A$ справедливо $(p, \hat{x}) \geq (p, x)$.

Теорема 1 (О существовании решения [23], с. 158, теорема 9.9). *Предположим, что A — выпуклый компакт и f — полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными непустыми значениями. Тогда вариационное неравенство (A, f) имеет решение.*

Обсудим содержательное значение введенного понятия на примерах.

Задача выпуклого программирования. Пусть A — выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — вогнутая функция. Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\max_{x \in A} F(x). \tag{1.1}$$

Предложение 1. *Для того чтобы $\hat{x} \in A$ был решением задачи выпуклого программирования* (1.1)*, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{x}$ был решением вариационного неравенства $(A, \partial F)$.*

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что $\hat{x}$ — решение вариационного неравенства $(A, \partial F)$, т. е. существует $p \in \partial F(\hat{x})$ такой, что $\langle p, \hat{x}\rangle \geq \langle p, x\rangle$ для любого $x \in A$. По определению супердифференциала имеем, что $F(x) - F(\hat{x}) \leq \langle p, x - \hat{x}\rangle$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, что $F(x) - F(\hat{x}) \leq \langle p, x - \hat{x}\rangle \leq 0$ для любого $x \in A$.

Необходимость. Предположим, что $\hat{x} \in A$ — решение задачи выпуклого программирования (1.1). Рассмотрим сначала случай, когда $F(x) \leq F(\hat{x})$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $0 \in \partial F(\hat{x})$ и $\hat{x}$ является решением вариационного неравенства $(A, \partial F)$. Предположим теперь, что множество $B = \{x \,|\, F(x) > F(\hat{x})\} \neq \varnothing$. В силу вогнутости функции $F(x)$ множество B открытое и выпуклое. Поскольку $\hat{x}$ — решение задачи (1.1), то по первой теореме отделимости множества A и B можно отделить, т. е. существует линейный непрерывный ненулевой функционал q такой, что для любых $x \in A$, $y \in B$ справедливо неравенство $\langle q, x\rangle \leq \langle q, \hat{x}\rangle \leq \langle q, y\rangle$. Значит, $\hat{x}$ есть решение вспомогательной задачи выпуклого программирования

$$\max_x \{F(x) \,|\, \langle q, x\rangle \leq \langle q, \hat{x}\rangle\}.$$

По теореме Каруша — Куна — Таккера существует множитель Лагранжа $\lambda \geq 0$ такой, что в точке $\hat{x}$ достигается максимум функции Лагранжа $L(x, \lambda) = \max_x \{F(x) + \lambda(\langle q, \hat{x}\rangle - \langle q, x\rangle)\}$. Поэтому с учетом теоремы Моро — Рокафеллара следует, что

$$0 \in \partial_x L(\hat{x}, \lambda) = \partial F(\hat{x}) - \lambda q,$$

т. е. $\lambda q \in \partial F(\hat{x})$.

Кроме того, для любых $x \in A$ справедливо неравенство $\langle \lambda q, x \rangle \le \langle \lambda q, \hat{x} \rangle$. Следовательно, $\hat{x}$ — это решение вариационного неравенства $(A, \partial F)$. $\square$

Равновесие по Нэшу в игре в нормальной форме. Игры в нормальной форме моделируют достижение компромиссов между интересами различных экономических агентов. Рассмотрим игру в нормальной форме:

$$\Gamma = \left\{ N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\left(x_i, x_{-i}\right)\}_{i \in N} \right\}.$$

Здесь $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, X_i — множество стратегий i-го игрока, которое будем предполагать выпуклым компактом. Пусть задана функция выигрыша i-го игрока $u_i\left(x_i, x_{-i}\right)$, которая оценивает исход игры $\left(x_i, x_{-i}\right)$ с точки зрения i-го игрока. Будем предполагать, что для каждого игрока $i \in N$ функция выигрыша $u_i\left(x_i, x_{-i}\right)$ вогнута по стратегии i-го игрока на множестве X_i при любых фиксированных стратегиях остальных игроков x_{-i} из множества $X_{-i} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$. Множество $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ является множеством возможных исходов игры Γ. В качестве устойчивого компромисса интересов будем рассматривать равновесие по Нэшу, т. е. такой исход игры $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in X$, что для любого игрока $i \in N$ и любой его стратегии $x_i \in X_i$ справедливо $u_i\left(x_i, \hat{x}_{-i}\right) \le u_i\left(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i}\right)$, где $\hat{x}_{-i} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i-1}, \hat{x}_{i+1}, \ldots, \hat{x}_n) \in X_{-i}$. Построим многозначное отображение

$$G\left(x\right) = \partial_{x_1} u_1\left(x_1, x_{-1}\right) \times \ldots \times \partial_{x_n} u_n\left(x_n, x_{-n}\right).$$

Предложение 2. *Исход $\hat{x}$ игры $\Gamma = \left\{ N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\left(x_i, x_{-i}\right)\}_{i \in N} \right\}$ является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда $\hat{x} \in A$ — решение вариационного неравенства (X, G).*

Доказательство. Для того чтобы исход игры $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in X$ был равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы для любого игрока $i \in N$ его стратегия $\hat{x}_i$ была решением задачи выпуклого программирования

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \hat{x}_{-i}). \tag{1.2}$$

В силу предложения 1 $\hat{x}_i$ является решением задачи выпуклого программирования (1.2) тогда и только тогда, когда $\hat{x}_i$ есть решение вариационного неравенства

$$\left(X_i, \partial_{x_i} u_i\left(x_i, \hat{x}_{-i}\right)\right). \tag{1.3}$$

Если $\hat{x}_i$ — это решением вариационного неравенства (1.3), то существует $p_i \in \partial_{x_i} u_i\left(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i}\right)$ такой, что для любого $x_i \in X_i$ справедливо $\langle p_i, \hat{x}_i \rangle \ge \langle p_i, x_i \rangle$. Поэтому

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \in G\left(\hat{x}\right) = \partial_{x_1} u_1\left(\hat{x}_1, \hat{x}_{-1}\right) \times \ldots \times \partial_{x_n} u_n\left(\hat{x}_n, \hat{x}_{-n}\right)$$

и для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ верно

$$\sum_{i=1}^{n} \langle p_i, \hat{x}_i \rangle \ge \sum_{i=1}^{n} \langle p_i, x_i \rangle, \tag{1.4}$$

т. е. $\hat{x}$ есть решение вариационного неравенства (X, G). Обратно, если $\hat{x}$ является решением вариационного неравенства (X, G), то существует

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \in G\left(\hat{x}\right) = \partial_{x_1} u_1\left(\hat{x}_1, \hat{x}_{-1}\right) \times \ldots \times \partial_{x_n} u_n\left(\hat{x}_n, \hat{x}_{-n}\right)$$

такой, что для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ справедливо неравенство (1.4). Отсюда следует, что для любого $i \in N$ $p_i \in \partial_{x_i} u_i\left(\hat{x}_i, \hat{x}_{-i}\right)$ и $\hat{x}_i$ суть решения вариационного неравенства $\left(X_i, \partial_{x_i} u_i\left(x_i, \hat{x}_{-i}\right)\right)$. Значит, исход игры $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in X$ является равновесием по Нэшу. $\square$

Задача дополнительности в модели конкурентного равновесия. Предложенная Л. Вальрасом концепция конкурентного равновесия описывает идеальные механизмы согласования интересов экономических агентов на основе рыночных отношений. Концепция вальрасовского равновесия предполагает, что экономические агенты, разбитые по функциональным ролям на потребителей и производителей товаров и услуг, принимают решения, исходя из своих интересов с учетом ресурсных ограничений, зависящих от рыночных цен. Проблема корректности концепции связана с исследованием условий существования равновесных цен, при которых спрос на товары и услуги согласован с их предложением. Модель Эрроу — Дебре [24] является базовой моделью конкурентного равновесия. В ней при условии равенства стоимости платежеспособного спроса и предложения товаров и услуг (закон Вальраса в узком смысле слова) вопрос о существовании равновесных цен сводится к существованию решения задачи дополнительности, т. е. вариационного неравенства (A, f), в котором множество A — выпуклый конус.

Предложение 3. *Пусть множество A является выпуклым конусом. Для того чтобы $\hat{x} \in A$ был решением вариационного неравенства (A, f)необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный функционал $p \in (-A^*) \cap f(\hat{x})$ такой, что $\langle p, \hat{x} \rangle = 0$. Здесь A^* есть сопряженный конус к конусу A.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{x} \in A$ — решение вариационного неравенства (A, f). Тогда существует $p \in f(\hat{x})$ такой, что для любого $x \in A$ выполняется неравенство $\langle p, \hat{x} \rangle \geq \langle p, x \rangle$. Поскольку A — конус, то для любого $x \in A$ справедливо $\langle p, \hat{x} \rangle = 0 \geq \langle p, x \rangle$, т. е. $p \in (-A^*) \cap f(\hat{x})$ и $\langle p, \hat{x} \rangle = 0$.

Достаточность. Пусть $\hat{x} \in A$, $p \in (-A^*) \cap f(\hat{x})$ и $\langle p, \hat{x} \rangle = 0$. Тогда для любого $x \in A$ справедливо $\langle p, \hat{x} \rangle = 0 \geq \langle p, x \rangle$, т. е. по определению $\hat{x}$ является решением вариационного неравенства (A, f). □

Закон Вальраса в узком смысле слова предполагает жесткое выполнение финансовых ограничение, отсутствие сбережений и кредита. Поэтому в модели Эрроу — Дебре не моделируются денежные рынки, а вектор равновесных цен определяется с точностью до умножения на положительный множитель.

Рассмотрим вариационные неравенства для построения вектора равновесных цен в случае отказа от обязательного выполнения закона Вальраса в узком смысле слова. Обозначим через A множество векторов предложения конечных товаров и услуг в экономике, а через $g(p)$, вообще говоря, многозначное отображение суммарного спроса потребителей в зависимости от вектора цен p. Пусть $g^{-1}(x) = \{p \,|\, x \in g(p)\}$ — обратное отображение спроса. Если $\hat{x} \in A$ — решение вариационного неравенства $\left(A, g^{-1}\right)$, то по определению найдется $p \in g^{-1}(\hat{x})$ такой, что $\langle p, \hat{x} \rangle \geq \langle p, x \rangle$ для любого $x \in A$. Тогда p есть вектор равновесных цен. Вектор равновесных цен является аналогом множителей Лагранжа в оптимизационных моделях. Традиционно экономическая интерпретация множителей Лагранжа к балансовым ограничениям по ресурсам как цен на эти ресурсы основывается на построении и анализе двойственной задачи. В работах [8;25] построено двойственное вариационное неравенство $\left(A^0, g\right)$ и доказана теорема двойственности, которая обобщает теорему двойственности для задачи выпуклого программирования. Здесь A^0 — поляра множества A.

2. Модель производственного кластера в сети поставок

Опишем суммарное множество векторов предложения конечных товаров и услуг на основе модели межотраслевого баланса. Рассмотрим производственный кластер из множества $J = \{1, \ldots, m\}$ чистых отраслей, каждая из которых производит уникальный однородный продукт. Будем описывать технологию производства j-й отрасли с помощью производственной функции $F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right)$, аргументами которой являются

— вектор товаров и услуг $X^j = \left(X_i^j \,|i \in J\right)$, производимых отраслями, входящими в кластер,

— Z^j, вектор затрат, производимых отраслями, не входящими в кластер и имеющий длину k (т. е. будем считать, что в кластер не вхродят k отраслей),

— l^j, вектор затрат первичных ресурсов размерности n.

Предположим, что функции $F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right)$ удовлетворяют неоклассическим требованиям и являются не равными тождественно нулю, положительно однородными первой степени, вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными, неотрицательными на неотрицательном ортанте функциями. Будем предполагать, что каждая технология использует хотя бы один вид первичных ресурсов, например труд. Двойственным описанием технологии производства j-й отрасли является функция себестоимости [7]

$$q_j\left(p, \pi, s\right) = \inf\left\{\frac{pX^j + \pi Z^j + sl^j}{F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right)} \,|X^j \geq 0, Z^j \geq 0, l^j \geq 0, F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) > 0\right\}.$$

Здесь p — вектор цен на затраты, производимые в кластере; π — вектор цен на производственные факторы, полученные из отраслей, не входящих в кластер; s — вектор цен на первичные ресурсы. Функция себестоимости $q_j\left(p, \pi, s\right)$ есть преобразование Янга производственной функции $F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right)$. Будем считать, что рассматриваемая группа отраслей продуктивна, т. е. существуют $\hat{X}^1 \geq 0, \ldots, \hat{X}^m \geq 0,\ \hat{Z}^1, \ldots, \hat{Z}^m,\ \hat{l}^1 \geq 0, \ldots, \hat{l}^m \geq 0$ такие, что

$$F_j\big(\hat{X}^j, \hat{Z}^j, \hat{l}^j\big) > \sum_{i=1}^{m} \hat{X}_j^i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Обозначим через $X^0 = \left(X_1^0, \ldots, X_m^0\right)$ вектор объемов поставок производимой рассматриваемыми отраслями продукции внешним потребителям, через $l = (l_1, \ldots, l_n) \geq 0$ вектор суммарных затрат первичных ресурсов в производственном кластере, а через $Z = (Z_1, \ldots, Z_k) \geq 0$ вектор суммарных затрат производственных факторов, производимых отраслями, не входящими в кластер. Спрос конечных потребителей продукции кластера $X^0\left(p, \pi\right)$ складывается из внутреннего конечного спроса $X^{int}\left(p, \pi\right) > 0$ и экспорта в другие производственные кластеры $X^{exp}\left(p, \pi\right) \geq 0$, т. е. $X^0\left(p, \pi\right) = X^{int}\left(p, \pi\right) + X^{exp}\left(p, \pi\right)$. Предположим, что $\hat{p} > 0$ — вектор цен, по которым продукция кластера продается конечным потребителям. Рассмотрим задачу распределения ресурсов $l = (l_1, \ldots, l_n) > 0$ и $Z = (Z_1, \ldots, Z_k) > 0$:

$$\left\langle \hat{p}, X^0 \right\rangle \to \max, \tag{2.1}$$

$$F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} Z^j \leq Z, \quad \sum_{j=1}^{m} l^j \leq l, \tag{2.3}$$

$$X^0 \geq 0, \quad X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \quad Z^1 \geq 0, \ldots, Z^m \geq 0, \quad l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0. \tag{2.4}$$

Оптимальное значение функционала в задаче (2.1)–(2.4) $H\left(\hat{p}, Z, l\right)$ на векторе цен $\hat{p}$ равно значению опорной функции множества $\Gamma\left(Z, l\right)$ возможных векторов конечных выпусков X^0. Заметим, что $H\left(\hat{p}, Z, l\right)$ выпукла по $\hat{p}$ как опорная функция и вогнута по Z, l как агрегированная производственная функция.

Предложение 4. *Для того чтобы набор векторов* $\tilde{X}^0 \geq 0, \tilde{X}^1 \geq 0, \ldots, \tilde{X}^m \geq 0, \tilde{Z}^1 \geq 0, \ldots, \tilde{Z}^m \geq 0,\ \tilde{l}^1 \geq 0, \ldots, \tilde{l}^m \geq 0$ *был решением задачи* (2.1)–(2.4), *необходимо и достаточно, чтобы существовали* $p \geq \hat{p}, \pi \geq 0, s \geq 0$ *такие, что*

$$\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{p_j F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - pX^j - \pi Z^j - sl^j \,|\, X^j \geq 0, l^j \geq 0\right\}, \quad j \in J,$$

$$\left\langle \pi, Z - \sum_{j=1}^{m} \tilde{Z}^j \right\rangle = 0, \quad \left\langle s, l - \sum_{j=1}^{m} \tilde{l}^j \right\rangle = 0, \quad \langle p - \hat{p}, \tilde{X}^0 \rangle = 0.$$

При этом

$$(\pi, s) \in \partial_{Z,l} H(\hat{p}, Z, l), \quad q_j(p, \pi, s) \geq p_j \quad (j = 1, \ldots, m)$$

и если $F_j\big(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\big) > 0$, *то* $q_j(p, \pi, s) = p_j$, *где* $\partial_{Z,l} H(\hat{p}, Z, l)$ *— супердифференциал* $H(\hat{p}, Z, l)$ *по* Z, l *при фиксированном* $\hat{p}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача выпуклого программирования (2.1)–(2.4) удовлетворяет условию Слейтера. Действительно, в силу положительной однородности функции F_j имеем, что если для набора $\hat{X}^1 \geq 0, \ldots, \hat{X}^m \geq 0, \hat{Z}^1, \ldots, \hat{Z}^m, \hat{l}^1 \geq 0, \ldots, \hat{l}^m \geq 0$, выполняется условие продуктивности

$$F_j\big(\hat{X}^j, \hat{Z}^j, \hat{l}^j\big) > \sum_{i=1}^{m} \hat{X}^i_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

то за счет выбора достаточно малого положительного множителя для всего набора можно добиться выполнения неравенств (2.3) при сохранении продуктивности набора.

Полагая

$$X^0_j = F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - \sum_{i=1}^{m} X^i_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

заметим, что задача (2.1)–(2.4) эквивалентна задаче

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\hat{p}_j F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - \left\langle \hat{p}, X^j \right\rangle\right) \to \max,$$

$$F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) \geq \sum_{i=1}^{m} X^i_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} Z^j \leq Z, \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l^j \leq l, \tag{2.7}$$

$$X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, \quad Z^1 \geq 0, \ldots, Z^m \geq 0, \quad l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0.$$

Обозначим через $\tilde{p}_i, \pi, s$ множители Лагранжа к ограничениям (2.5), (2.6) и (2.7) соответственно. Рассмотрим функцию Лагранжа этой задачи

$$L\left(X^1, \ldots, X^m, Z^1, \ldots, Z^m, l^1, \ldots, l^m, \tilde{p}, \pi, s\right) = \sum_{j=1}^{m} \left\langle \hat{p}, F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - \sum_{i=1}^{m} X^i_j \right\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \left\langle \tilde{p}, F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - \sum_{i=1}^{m} X^i_j \right\rangle + \left\langle \pi, Z - \sum_{j=1}^{m} Z^j \right\rangle + \left\langle s, l - \sum_{j=1}^{m} l^j \right\rangle$$

$$= \langle \pi, Z \rangle + \langle s, l \rangle + \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\hat{p}_j + \tilde{p}_j\right) F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - \left\langle \hat{p} + \tilde{p}, X^j \right\rangle - \left\langle \pi, Z^j \right\rangle - \left\langle s, l^j \right\rangle\right).$$

Полагая $p = \tilde{p} + \hat{p}$, получаем с учетом теорем Каруша — Куна —Таккера и Демьянова — Данскина предложение 4. □

В задаче распределения ресурсов (2.1)–(2.4) были фиксированы векторы суммарных затрат производственных факторов отраслями кластера Z и l. Такая постановка задачи соответствует замкнутой экономической системе, контролирующей внешние связи. Другая постановка задачи соответствует открытой экономической системе, в которой производственные факторы Z и l не фиксированы, а покупаются по фиксированным ценам π и s. Связь между производственными факторами Z, l и ценами π,s описывается соотношением $(\pi, s) \in \partial_{Z,l} H(\hat{p}, Z, l)$. Заметим, что функция $H(\hat{p}, Z, l)$ есть ненулевая, положительно однородная первой степени, вогнутая, непрерывная, неотрицательна на неотрицательном ортанте функция переменных Z, l. Двойственное описание кластера как открытой экономической системы можно получить из анализа преобразования Янга функции $H(\hat{p}, Z, l)$ по переменным Z, l:

$$h(\hat{p}, \pi, s) = \inf\left\{\frac{\langle \pi, Z\rangle + \langle s, l\rangle}{H(\hat{p}, Z, l)}\Big| Z \geq 0, l \geq 0, H(\hat{p}, Z, l)\right\}.$$

Функция $h(\hat{p}, \pi, s)$ является ненулевой, положительно однородной первой степени, вогнутой, непрерывной, неотрицательной на неотрицательном ортанте функцией переменных π и s, а из инволютивности преобразования Янга (см. [16], с. 232, теорема 1.2) следует, что

$$H(\hat{p}, Z, l) = \inf\left\{\frac{\langle \pi, Z\rangle + \langle s, l\rangle}{h(\hat{p}, \pi, s)}\Big| \pi \geq 0, s \geq 0, h(\hat{p}, \pi, s) > 0\right\}.$$

Предложение 5. *Справедливо равенство*

$$h(\hat{p}, \pi, s) = \max_p \left\{\min_{1\leq i\leq m} \frac{p_i}{\hat{p}_i}\Big| q_j(p, \pi, s) \geq p_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, m\right\}.$$

Доказательство. Преобразованием Янга линейной функции $\langle \hat{p}, X^0\rangle$ является функция с постоянными пропорциями $\min\limits_{1\leq i\leq m} \dfrac{p_i}{\hat{p}_i}$. Предложение 5 есть следствие теоремы 1 из [8]. □

Замечание 1. Для того чтобы кластер производил j-й продукт, необходимо, чтобы себестоимость его производства $q_j(p, \pi, s)$ не превышала его цену p_j. Производственный кластер, выбирая из доступных ему технологий производства I, принимает решение о своей "производственной нише", т. е. о том, какие товары $J \subseteq I$ будут в нем производится, а какие производственные факторы $I \backslash J$ будут импортироваться из других производственных кластеров.

Определение 2. Будем говорить, что набор $\{J, p\}$ является производственной нишей кластера J с равновесными ценами p, если $J \subset I$, $p \in \operatorname{int}\mathbb{R}^J$ и существуют векторы затрат $\{\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j | j \in J\}$ такие, что

$$\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{p_j F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - pX^j - \pi Z^j - sl^j \big| X^j \geq 0, Z^j \geq 0, l^j \geq 0\right\}, \quad j \in J,$$

$$X_j^0(p, \pi) = F_j\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right) - \sum_{i=1}^m \tilde{X}_j^i, \quad j \in J.$$

Теорема 2. *Для того чтобы набор $\{J, p\}$ являлся производственной нишей кластера с равновесными ценами p, необходимо и достаточно, чтобы вектор p удовлетворял условию $q_j(p, \pi, s) = p_j > 0\,, j \in J$.*

Доказательство. Условие $\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{p_j F_j\left(X^j, Z^j, l^j\right) - pX^j - \pi Z^j - sl^j \big| X^j \geq 0, Z^j \geq 0, l^j \geq 0\right\}$, $F_j\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right) > 0$, выполняется тогда и только тогда, когда

$$q_j(p, \pi, s) = p_j > 0,$$

$$\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right) \in Y_j \partial q_j(p, \pi, s)\,, \quad Y_j = F_j\left(\tilde{X}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{l}^j\right). \tag{2.8}$$

Функция $q_j(p,\pi,s)$ является положительно однородной первой степени. В силу тождества Эйлера (см., например, [26]) имеем

$$q_j(p,\pi,s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\tilde{X}_i^j}{Y_j}p_i+\sum_{t=1}^{k}\frac{\tilde{Z}_t^j}{Y_j}\pi_t+\sum_{\tau=1}^{n}\frac{\tilde{l}_\tau^j}{Y_j}s_\tau,\quad j=1,\ldots,m. \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\lambda_{ji}(p,\pi,s)=\frac{\tilde{X}_i^j}{Y_j}\geq 0,\quad \alpha_j(p,\pi,s)=\sum_{t=1}^{k}\frac{\tilde{Z}_t^j}{Y_j}\pi_t+\sum_{\tau=1}^{n}\frac{\tilde{l}_\tau^j}{Y_j}s_\tau>0,\quad i,j=1,\ldots,m. \tag{2.10}$$

В этих обозначениях из (2.8) и (2.10) получаем

$$p_j=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ji}(p,\pi,s)p_i+\alpha_j(p,\pi,s),\quad j=1,\ldots,m.$$

Следовательно, неотрицательная матрица $\Lambda(p,\pi,s)=(\lambda_{ji}(p,\pi,s))_{i,j=1,\ldots,m}$ является продуктивной (см. [24]), а значит, продуктивна ее транспонированная матрица $\Lambda^*(p,\pi,s)$. Выполнение условия

$$X_j^0(p,\pi)=F_j\big(\tilde{X}^j,\tilde{Z}^j,\tilde{l}^j\big)-\sum_{i=1}^{m}\tilde{X}_j^i,\quad j\in J,$$

с учетом (2.9) эквивалентно существованию объемов выпуска отраслей $(Y_1,\ldots,Y_m)>0$ таких, что

$$Y_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}(p,\pi,s)Y_i=X_j^0(p,\pi),\quad j=1,\ldots,m.$$

Последнее требование выполняется в силу продуктивности матрицы $\Lambda^*(p,\pi,s)$. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы следует, что если $\{J,p\}$ является производственной нишей кластера J с равновесными ценами p, то

$$\langle p,X^0(p,\pi)\rangle=\sum_{j\in J}p_j\Big(F_j\left(X^j,Z^j,l^j\right)-\sum_{i=1}^{m}X_j^i\Big)$$

$$=\sum_{j\in J}\left(p_jF_j\left(X^j,Z^j,l^j\right)-\langle p,X^j\rangle\right)=\sum_{j\in J}\langle\pi,Z^j\rangle+\langle s,l^j\rangle,$$

т. е. стоимость первичных ресурсов равняется стоимости выпускаемой кластером конечной продукции. Производственные факторы Z импортируются из других производственных кластеров. В качестве производственных факторов используются также первичные ресурсы l производственного кластера. Аналогично конечная продукция $X^0(p,\pi)$ складывается из экспорта в другие производственные кластеры $X^{exp}(p,\pi)$ и внутреннего спроса $X^{int}(p,\pi)$. Сальдо торгового баланса производственного кластера равно $\langle p,X^{exp}(p,\pi)\rangle-\sum_{j\in J}\left\langle\pi,Z^j\right\rangle$, соответственно, $\sum_{j\in J}\langle s,l^j\rangle-\left\langle p,X^{int}(p,\pi)\right\rangle$ является оценкой сбережений и текущего вывоза капитала. В международной торговле торговый баланс регулируется курсами валют.

3. Двойственность по Янгу в модели сети производственных связей

Рассмотрим сеть из M производственных кластеров. Обозначим через $F_j^\alpha\left(X^{j\alpha},l^{j\alpha}\right)$ производственную функцию j-й отрасли из кластера α, где $X^{j\alpha}$ — затраты производственных факторов, выпускаемых в сети кластеров, $l^{j\alpha}$ — затраты первичных ресурсов. Как и ранее, будем предполагать, что производственные функции положительно однородны, удовлетворяет неоклассическим требованиям и положительные выпуски возможны лишь при затратах первичных ресурсов. Будем также предполагать, что производственная система продуктивна. Функция себестоимости j-й отрасли из кластера α

$$q_{j\alpha}(p,s^\alpha)=\inf_{X^{j\alpha},l^{j\alpha}}\left\{\frac{\left\langle p,X^{j\alpha}\right\rangle+\left\langle s^\alpha,l^{j\alpha}\right\rangle}{F_{j\alpha}\left(X^{j\alpha},l^{j\alpha}\right)}\middle|X^{j\alpha}\geq 0,l^{j\alpha}\geq 0,F_{j\alpha}\left(X^{j\alpha},l^{j\alpha}\right)>0\right\}$$

зависит от вектора p цен на продукцию отраслей и вектора s^α цен на первичные ресурсы в кластере α. Множество достижимости $\Gamma\left(L^1,\ldots,L^M\right)$ конечных выпусков X^0 определяется соотношениями

$$\sum_{\alpha=1}^{M}F_{j\alpha}\left(X^{j\alpha},l^{j\alpha}\right)\geq\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}X_j^{i\alpha}+X_j^0,\quad j=1,\ldots,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n}l^{j\alpha}\leq L^\alpha,\quad \alpha=1,\ldots,M,$$

$$X^0\geq 0,\quad X_j^{i\alpha}\geq 0,\quad l^{j\alpha}\geq 0,\quad j,i=1,\ldots,m,\quad \alpha=1,\ldots,M;$$

здесь L^α — вектор предложения первичных ресурсов в кластере α.

Рассмотрим опорную функцию $H\left(\hat p,L^1,\ldots,L^M\right)$ множества $\Gamma\left(L^1,\ldots,L^M\right)$. Ее преобразование Янга по переменным $L^1,\ldots,L^M$ имеет вид

$$h\left(\hat p,s^1,\ldots,s^M\right)=\inf\left\{\frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{M}\left\langle s^\alpha,L^\alpha\right\rangle}{H\left(\hat p,L^1,\ldots,L^M\right)}\middle|L^1\geq 0,\ldots,L^M\geq 0,H\left(\hat p,L^1,\ldots,L^M\right)>0\right\}$$

$$=\max_p\min_j\left\{\frac{p_j}{\hat p_j}\middle|\min_{1\leq\alpha\leq M}q_{i\alpha}(p,s^\alpha)\geq p_i>0,i=1,\ldots,m\right\}.$$

Обозначим через $X^0(p)=\left(X_1^0(p),\ldots,X_m^0(p)\right)$ функции спроса конечных потребителей на продукцию отраслей производственных кластеров.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что $p>0$ является вектором равновесных цен в сети производственных кластеров в открытой экономической системе с ценами первичных ресурсов $\{s^\alpha\,|\alpha=1,\ldots,M\}$, если существуют

$$\left\{\left(\tilde X^{j\alpha},\tilde l^{j\alpha}\right)|j=1,\ldots,m,\alpha=1,\ldots,M\right\}$$

такие, что

$$\left(\tilde X^{j\alpha},\tilde l^{j\alpha}\right)\in\operatorname*{Arg\,max}_{X^{j\alpha}\geq 0,l^{j\alpha}\geq 0}\left\{p_jF_{j\alpha}\left(X^{j\alpha},l^{j\alpha}\right)-pX^{j\alpha}-s^\alpha l^{j\alpha}\right\},\quad j=1,\ldots,m,\quad \alpha=1,\ldots,M,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{M}F_{j\alpha}\left(\tilde X^{j\alpha},\tilde l^{j\alpha}\right)-\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{n}\tilde X_j^{i\alpha}=X_j^0(p),\quad j=1,\ldots,m.$$

Следствие 1. *Вектор $p>0$ является вектором равновесных цен в сети производственных кластеров в открытой экономической системе с ценами первичных ресурсов $\left\{s^\alpha|\alpha=1,\ldots,M\right\}$ тогда и только тогда, когда он является решением системы уравнений*

$$\min_{1\leq\alpha\leq M}q_{i\alpha}(p,s^\alpha)=p_i,\quad i=1,\ldots,m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия повторяет доказательство теоремы 2. □

З а м е ч а н и е 3. В производственном кластере β могут производится лишь те продукты, себестоимость которых не больше, чем цена продукта. Поэтому множество

$$J_\beta=\left\{i|q_{i\beta}\left(p,s^\beta\right)=p_i=\min_{1\leq\alpha\leq M}q_{i\alpha}\left(p,s^\alpha\right)\right\}$$

есть производственная ниша кластера β.

4. Пример расчетов по модели. О проблеме кластеризации производственной сети еврозоны

Модель равновесия в сети производственных кластеров, описанная в предыдущем разделе, предполагает установившимся режим, в котором сформированы устойчивые экономические ниши в производственной сети на основе минимальной себестоимости выпускаемых продуктов. Однако формирование эффективных производственных ниш может быть затруднено в связи с технологической неоднородностью кластеров сети. Такие проблемы характерны, например, для ряда южных стран Европы (Италия, Испания, Греция, Португалия), продукция которых в условиях единой зоны евро в период 2000–2014 гг. стала проигрывать в конкуренции более качественным товарам, производимым в странах северного блока (Германия, Австрия, Финляндия, Бельгия) [5]. При условии отсутствия возможности девальвации национальной валюты это привело к торговому дисбалансу, закредитованности экономики и дефициту бюджета стран южного европейского блока [5; 6].

В данном разделе в терминах разработанной модели межотраслевого баланса с производственными функциями Кобба — Дугласа мы проведем анализ экономических особенностей производственных кластеров объединенной европейской сети. Отметим, что технологии Кобба — Дугласа допускают замещение производственных факторов в рамках предположения о постоянстве пропорций финансовых затрат производителями продукции.

Входными данными для задачи идентификации модели распределения ресурсов производственного кластера являются симметричные таблицы “затраты — выпуск” Z продукции, производимой в локальной экономике (кластере) в году t, за некоторый период времени. Таблицы “затраты — выпуск” являются основой системы национальных счетов и регулярно публикуются статистическими службами большинства развитых стран. Системы таблиц “затраты — выпуск” традиционно являются основой для анализа межотраслевых связей в региональной и мировой экономике [27–29].

Таблица Z содержит три квадранта.

I *квадрант* содержит элементы Z_i^j, $i, j = 1, \dots, m$, соответствующие сумме платежей, которые отрасль i получила от отрасли j за промежуточный продукт, произведенный в i и потребленный при производстве продукции отраслью j.

II *квадрант* — это вектор-столбец $Z^0 = \left(Z_1^0, \dots, Z_m^0\right)$, каждая компонента которого соответствует совокупному финансовому потоку в отрасль i за конечное потребление ее продукции агентами (домашними хозяйствами, госорганами, экспортерами и т. д.)

III *квадрант* описывает промежуточное потребление первичных ресурсов в экономике и включает в нашем случае две строки ($n = 2$), отражающие промежуточное потребление внутреннего первичного ресурса — труда (его мы оцениваем величиной валовой добавленной стоимости) $Z_{m+1}^j = l_1^j$ и промежуточного импорта $Z_{m+2}^j = l_2^j$, $j = 1, \dots, m$, который поступает извне.

В силу симметричности таблицы Z суммарные затраты всех ресурсов каждой отраслью j совпадают с суммарным потреблением продукции отрасли j, т.е. справедливы равенства

$$A_j = \sum_{i=1}^{m+2} Z_i^j = \sum_{i=1}^{m} Z_j^i + Z_j^0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^{m} \left(Z_{m+1}^j + Z_{m+2}^j\right) = \sum_{i=1}^{m} Z_i^0 = A_0.$$

Обозначим

$$a_{ij} = \frac{Z_i^j}{\sum_{k=1}^{m+n} Z_k^j}, \quad b_{kj} = \frac{Z_{m+k}^j}{\sum_{k=1}^{m+n} Z_k^j}, \quad a_{i0} = \frac{Z_i^0}{\sum_{i=1}^{m} Z_i^0}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i0} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} b_{kj} = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} b_{kj} > 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Заметим, что матрица $A = \|a_{ij}\| \geq 0$ по построению является продуктивной матрицей коэффициентов прямых затрат В. Леонтьева [16], так как $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} < 1$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому существует корректно определенная матрица полных затрат $(E - A)^{-1} = \|\omega_{ij}\|_{i,j=1,\ldots,m} \geq 0$, где E — единичная матрица $(m \times m)$. Введем $(n \times m)$-матрицу $B = \|b_{kj}\| \geq 0$.

Для построения модельных оценок на основе статистических таблиц "затраты — выпуск" рассмотрим частный случай модели производственного кластера, описанной в разд. 2. Предположим, что для каждой национальной экономики еврозоны конечный спрос является заданным, существует ограничение на внутренние первичные и поставляемые извне (импорт) ресурсы, — ограничение, задаваемое в квадранте III таблицы "затраты — выпуск" Z в базовом году, а задача распределения ресурсов решается с целью максимизации функции полезности Кобба — Дугласа

$$F_0(X) = X_1^{a_{10}} \ldots X_m^{a_{m0}}.$$

Исследование такого частного случая модели и решение задачи ее идентификации с производственными функциями Кобба — Дугласа на основе официальной государственной статистики национальных счетов подробно обсуждается, например, в [10; 12].

Предположим, что производственные технологии отраслей каждой национальной экономики описываются функциями Кобба — Дугласа вида

$$F_j(X, l) = \alpha_j X_1^{a_{1j}} \ldots X_m^{a_{mj}} l_1^{b_{1j}} \ldots l_n^{b_{nj}}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.11}$$

где

$$\alpha_j = \frac{A_j}{\prod_{i=1}^{m} (Z_i^j)^{a_{ij}} \prod_{k=1}^{n} (Z_{m+k}^j)^{b_{kj}}} > 0.$$

Тогда (см. [10]) для выбранного базового года с таблицей "затраты — выпуск" Z набор

$$\{\hat{X}_i^0 = Z_i^0,\ \hat{X}_i^j = Z_i^j,\ \hat{l}_k^j = Z_{m+k}^j,\ i, j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n\}$$

является решением задачи распределения ресурсов с технологиями Кобба — Дугласа (4.11) для заданного вектора ограничений $l = (l_1, \ldots, l_n)$ на первичные ресурсы, где $l_k = \sum_{j=1}^{m} Z_{m+k}^j$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, задача распределения ресурсов объясняет официально публикуемую симметричную таблицу "затраты — выпуск" Z в базовом году. Напомним, что мы рассматриваем два первичных ресурса (труд и промежуточный импорт), поэтому $n = 2$.

Решение двойственной по Янгу задачи к задаче распределения ресурсов с производственными функциями Кобба — Дугласа позволяет вычислить в явном виде равновесные индексы цен $(p_1, \ldots, p_m)$ на производимую в экономике продукцию при заданных индексах цен на первичные ресурсы $(s_1, \ldots, s_n)$

$$p_j = s_1^{c_{1j}} \ldots s_n^{c_{nj}}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.12}$$

где $C = \|c_{kj}\| = B(E - A)^{-1}$. Функционалом в двойственной задаче является двойственный по Янгу к функции полезности индекс потребительских цен

$$q_0(p) = \frac{1}{F_0(a_{10}, \ldots, a_{m0})} p_1^{a_{10}} \ldots p_m^{a_{m0}},$$

оптимальное значение которого на наборе цен (4.12) соответствует расчетной величине индекса потребительских цен Конюса — Дивизиа для рассматриваемой экономики [26], который при проведении дальнейших расчетов мы будем обозначать через q_0. В [10; 12] показано, что

$$q_0(s) = s_1^{\gamma_1} \ldots s_n^{\gamma_n}, \tag{4.13}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T = C \cdot (a_{10}, \ldots, a_{m0})^T$, $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 1$.

Таким образом, задавая в качестве сценарных условий для выбранного года вектор конечного спроса $\hat{Z}^0$ и вектор индексов цен на первичные ресурсы $s = (s_1, s_2)$, мы можем построить прогноз I и III квадранта симметричной таблицы затраты выпуски в текущих ценах на основе решения задачи распределения ресурсов с заданными функциями Кобба — Дугласа, считая коэффициенты этих функций стабильными на рассматриваемом горизонте прогнозирования

$$\hat{Z}_i^j = a_{ij}\hat{Y}^j, \quad \hat{Z}_{m+t}^j = b_{tj}\hat{Y}^j, \quad i, j = 1, \ldots, m, \quad t = 1, \ldots, n,$$

где вектор валового выпуска $\hat{Y}$ описывается формулой $\hat{Y} = (E - A)^{-1}\,\hat{Z}^0$. Далее, решая двойственную задачу, мы можем найти равновесный вектор индексов цен на производимую в экономике продукцию (4.12) и соответствующий ему индекс цен Конюса — Дивизиа (4.13).

Идентификация модели для 9 крупных экономик северного и южного блока стран еврозоны проведена на основе базы данных [30]. База данных содержит симметричные таблицы “затраты — выпуск” внутреннего продукта за 2000–2014 гг. и таблицы потребления импортных ресурсов отраслями 28 стран Европы и 56 отраслей для каждой экономики. Данные представлены в долларах США, которые были переведены в евро по среднегодовому курсу 2000–2014 гг.

Идентификация параметров производственных функций Кобба — Дугласа для каждой страны проведена сначала по каждому году (который считался базовым) из диапазона 2000–2014 гг. на основе изложенного выше алгоритма. Далее оценки по модели для каждого расчетного года строились с использованием функций Кобба — Дугласа, коэффициенты которых оценены методом скользящего среднего. Точнее, параметры функции Кобба — Дугласа усреднялись для симметричного пятилетнего интервала вокруг расчетного года. Если пятилетний период выходил за границы рассматриваемого интервала 2000–2014 гг., то параметры недостающих лет заменялись параметрами граничного года: 2000-го или 2014-го.

Для каждого расчетного года в интервале 2000–2014-й и для каждой из 9 рассматриваемых стран еврозоны была решена двойственная задача, найдены индексы равновесных цен (4.12) в отраслях экономики и индекс потребительских цен Конюса — Дивизиа (4.13), оценены межотраслевые потоки (I квадрант), а также величина добавленной стоимости и промежуточного потребления импорта в отраслях экономики (III квадрант). В качестве входных данных для сценарных расчетов в каждом году в интервале 2000–2014 гг. использованы данные о конечном потреблении и цены на первичные ресурсы:

— цена на труд (внутренний первичный ресурс) формировалась как среднегодовая номинальная оплата труда в экономике (в евро) в рассматриваемом году, деленная на округленную медианную среднегодовую заработную плату рассматриваемой группы стран в 2000 г. (25000 евро) (https://stats.oecd.org);

— цена на импортные ресурсы предполагалась равной единице для всех стран в целях учета свободного перетока товаров между странами зоны евро.

На рис. 1 представлены величины отклонения расчетных значений суммарного промежуточного импорта по странам еврозоны от статистики, которые подтверждают адекватность модельных оценок.

На основе результатов расчетов по модели для каждой экономики за период 2000–2014 гг. построен скорректированный показатель реальной среднегодовой заработной платы $Q(t)$, учитывающий структуру конечного потребления отечественной и импортной продукции (рис. 2). Вычисление величины $Q(t)$ проводилось в каждом году t по формуле

$$Q_t = \alpha(t) * \frac{S_t}{(q_0(s))_t},$$

где S_t — номинальная среднегодовая заработная плата (в евро) в году t; $(q_0(s))_t$ — расчетный индекс потребительских цен Конюса — Дивизиа (4.13); $\alpha(t)$ — поправочный коэффициент, учитывающий структуру потребления внутренних и импортных товаров конечными потребителями. Величина поправочного коэффициента для каждого года t рассчитана на основе

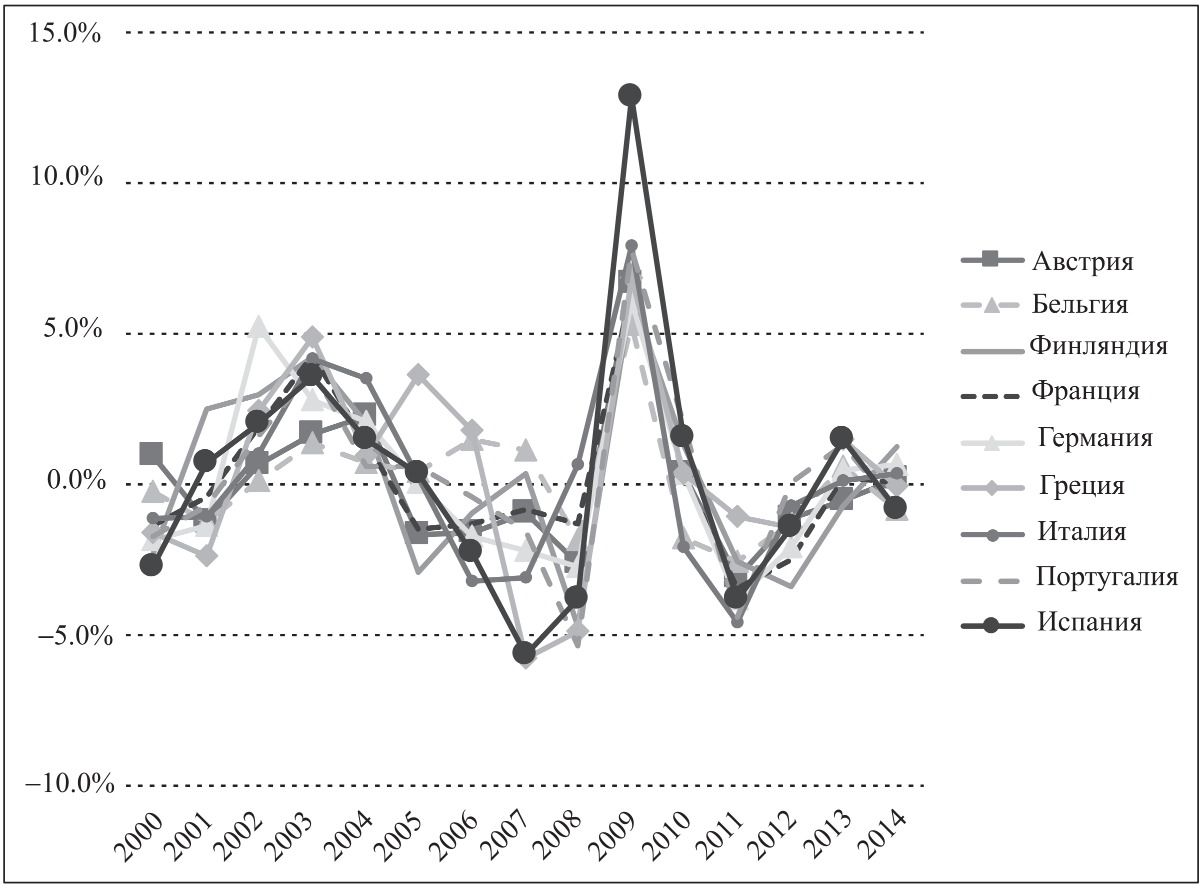

Рис. 1. Отклонение оценки импорта от статистики.

статистических данных каждой страны следующим образом:

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{Cons}_H(t) + \mathrm{Cons}_G(t) + EXP(t) - IMP(t)}{\mathrm{Cons}_H(t) + \mathrm{Cons}_G(t)},$$

где $\mathrm{Cons}_H(t)$, $\mathrm{Cons}_G(t)$ — суммарное конечное потребление домашних хозяйств и государства, а $EXP(t) - IMP(t)$ — сальдо экспорта и импорта в году t (https://stats.oecd.org). Заметим, что в случае положительного сальдо торгового баланса страны коэффициент $\alpha(t) > 1$, что увеличивает оценку показателя реальной заработной платы, а в случае отрицательного $\alpha(t) < 1$, что приводит к уменьшению этого показателя. Из расчетов следует (см. рис. 2), что за первые 15 лет существования еврозоны сложились устойчивые экономические отношения между кластерами, но сохранилась неоднородность производственной системы. Входящие в еврозону национальные экономики разделяются на две подсистемы. Это северные страны, имеющие положительное сальдо торгового баланса, более высокий уровень заработной платы и более высокие цены на товары, и южные страны с низким уровнем оплаты труда, низкими ценами, отрицательным торговым балансом и высоким уровнем безработицы. При этом, несмотря на разницу цен, выравнивание торгового баланса в рассматриваемом периоде 2000–2014 гг. не произошло. Такая неоднородность означает, что северный блок стран дотирует потребление в южном блоке в указанном периоде времени. Проблема урегулирования балансов связана с тем, что повышение конкурентоспособности за счет девальвации национальной валюты в условиях единой зоны евро невозможно, а повышение конкурентоспособности отраслей экономики за счет снижения реальной заработной платы увеличивает социальную напряженность.

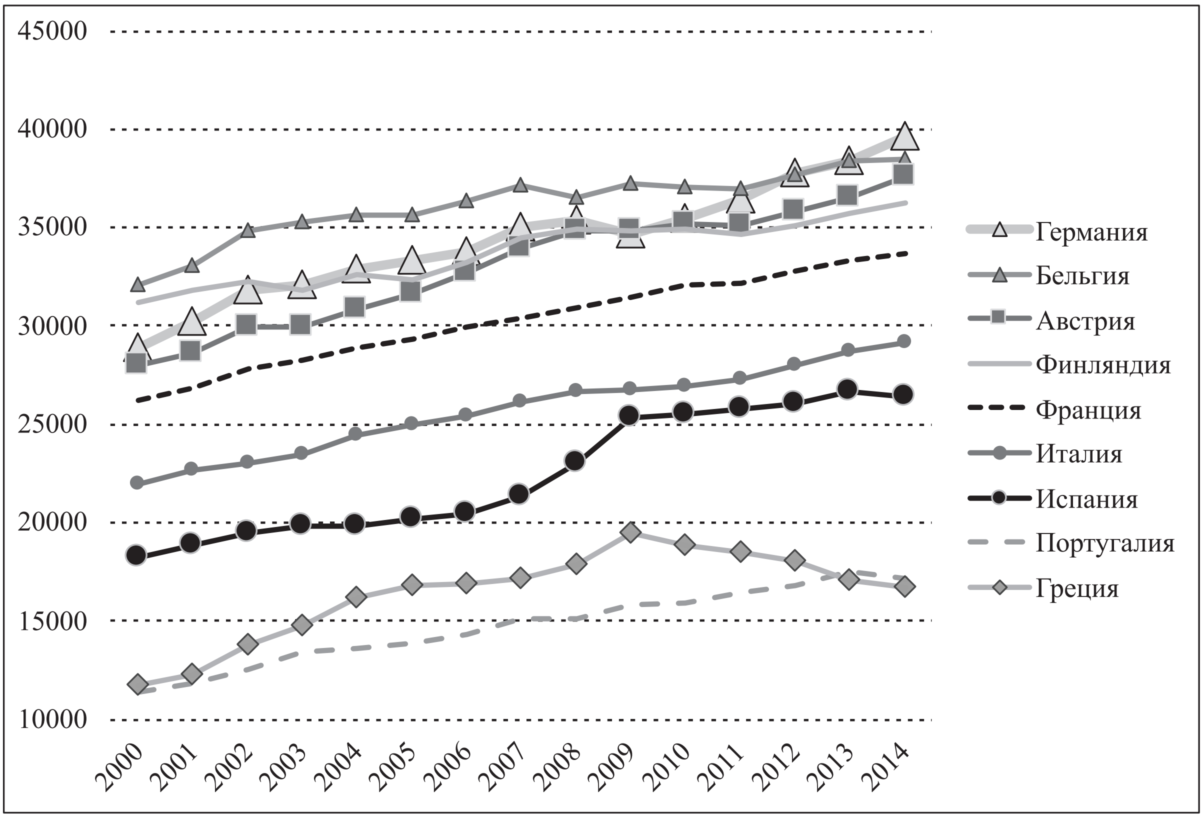

Рис. 2. Скорректированный показатель реальной заработной платы
в странах объединенной Европы (евро).

Заключение

В работе развивется математический аппарат двойственных по Янгу вариационных неравенств, который позволяет анализировать конкурентное равновесие в открытых экономическаих системах.

В результате проведенного с помощью разрабортанного математического аппарата анализа экономик стран еврозоны в период 2000–2014 гг. подтверждены неоднократно высказываемые в экономических публикациях (см., например, [5]) опасения, связанные с технологической неоднородностью производственных кластеров объединенной Европы. В качестве варианта решения проблемы в такой ситуации предлагалось наряду с единым евро ввести национальные валюты с плавающими курсами к евро, которые бы позволили контролировать торговые балансы производственных кластеров (см. [5]). Однако такое решение кажется неэффективным, так как на основании закона Грешама в экономических системах с несколькими платежными средствами постепенно отбирается всегда одно платежное средство. Альтернативным вариантом решения проблемы является согласование бюджетного процесса в системе кластеров. Такой процесс согласования на уровне Европейского парламента и был фактически запущен после 2014 гг. в объединенной Европе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. Cambridge; London: MIT Press., 2004.
2. **Чемберлин Э.** Теория монополистической конкуренции (Реориентация теории стоимости) / пер. с англ. Э.Г. Лейкина, Л.Я. Розовского. М.: Экономика, 1996, 351 с. (Сер. “Экономическое наследие”).
3. **Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.** The network origins of aggregate fluctuations // Econometrica. 2012. Vol. 80, no. 5. P. 1977–2016. doi: 10.3982/ECTA9623

4. **Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.** Networks, shocks, and systemic risk // The Oxford Handbook of the Economics of Networks / eds. Yann Bramoulé et al. NY: Oxford Univ. Press, 2016. P. 569–607. doi: 10.3386/w20931
5. **Саррацин Т.** Европе не нужен евро. М.: АСТ, 2015. 512 с.
6. **Шавенман Ж.-П.** 1914–2014: Европа выходит из истории. М.: АСТ, 2015. 352 с.
7. **Шананин А.А.** Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 81–85. doi: 10.31857/S2686954320040177
8. **Шананин А.А.** Задача агрегирования межотраслевого баланса и двойственность // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Т. 61, № 1. С. 162–176. doi: 10.31857/S0044466921010087
9. **Boranbayev S., Obrosova N., Shananin A.** Production network centrality in connection to economic development by the case of Kazakhstan statistics // Optimization and Applications: 12th Internat. Conf. (OPTIMA 2021): Proc. / eds. Nicholas N. Olenev et al. 2021. Ser. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13078. P. 321–335. doi: 10.1007/978-3-030-91059-4_23
10. **Obrosova N., Shananin A., Spiridonov A.** On the comparison of two approaches to intersectoral balance analysis // J. Physics: Conf. Ser. 2021. Vol. 2131, no. 2. doi: 10.1088/1742-6596/2131/2/022112
11. **Рассоха А.В., Шананин А.А.** Обратные задачи анализа межотраслевых балансов // Мат. моделирование. 2021. Т. 33, № 3. С. 39–58. doi: 10.20948/mm-2021-03-03
12. **Kerimkhulle S., Obrosova N., Shananin A., Azieva G.** The nonlinear model of intersectoral linkages of Kazakhstan for macroeconomic decision-making processes in sustainable supply chain management // Sustainability. 2022. Vol. 14, no. 21. doi: 10.3390/su142114375
13. **Boranbayev A., Obrosova N., Shananin A.** Nonlinear input-output balance and Young duality: analysis of Covid-19 macroeconomic impact on Kazakhstan // Sib. Electron. Math. Reports. 2022. Vol. 19, no. 2. P. 835–851. doi: 10.33048/semi.2022.19.070
14. **Obrosova N., Shananin A., Spiridonov A.** Nonlinear input-output model with nested CES technologies for the analysis of macroeconomic effects of a foreign trade shock // Lobachevskii J. Math. 2023. Vol. 4, no. 1. P. 401–417. doi: 10.1134/S1995080223010304
15. **Leontief W.W.** The Structure of American economy, 1919–1939: An empirical application of equilibrium analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 1951. 264 p.
16. **Ашманов С.А.** Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 293 с.
17. **Acemoglu D., Akcigit U., Kerr W.** Networks and the macroeconomy: An empirical exploration // NBER Macroeconomics Annual. 2016. Vol. 30. no. 1. P. 273-335.
URL: http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:17527693 .
18. **Barauskaite Kristina, Nguyen Anh D.M.** Global intersectoral production network and aggregate fluctuations // Economic Modelling. 2021. Vol. 102(C). doi: 10.1016/j.econmod.2021.105577
19. **Acemoglu D., Azar P.D.** Endogenous production networks // Econometrica, 2020, Vol. 88, no. 1. P. 33–82. doi: 10.3982/ECTA15899
20. **Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.** Microeconomic origins of macroeconomic tail risks // Am. Econ. Rev. 2017. Vol. 107, no. 1. P. 54–108. doi: 10.1257/aer.20151086
21. **Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.** Systemic risk and stability in financial networks // Am. Econ. Rev. 2015. Vol. 105, no. 2. P. 564–608. doi: 10.1257/aer.20130456
22. **Baqaee D.R.** Cascading failures in production networks // Econometrica. 2018. Vol. 86, no. 5. P. 1819–1838. doi: 10.3982/ECTA15280
23. **Обен Ж.-П.** Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
24. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 520 с.
25. **Шананин А.А.** Двойственность для задач обобщенного программирования и вариационные принципы в моделях экономического равновесия // Докл. АН. 1999. Т. 366, № 4. С. 462–464.
26. **Шананин А.А.** Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса // Труды МФТИ. 2009. Т. 1, № 4. С. 84–98.
27. **Miller R.E., Blair P.D.** Input-output analysis: Foundations and extensions. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. P. 1–750.
28. **Wixted B., Yamano N., Webb C.** Input-output analysis in an increasingly globalised world: Applications of OECDs harmonised international tables // OECD Science, Technology and Industry: working papers. 2006. No. 2006/07. Paris: OECD Publ., 2006. doi: 10.1787/303252313764
29. **O'Mahony Mary, Timmer Marcel P.** Output, input and productivity measures at the industry level: The EU KLEMS database // Economic J. 2009. Vol. 119, no. 538. P. F374–F403.
doi: 10.1111/j.1468-0297.2009.02280.x

30. **Timmer M.P. [et al.]** An Illustrated user guide to the world input-output database: The Case of global automotive production // Review of International Economics. 2015. Vol. 23. P. 575–605. doi: 10.1111/roie.12178

Поступила 11.05.2023
После доработки 19.06.2023
Принята к публикации 26.06.2023

Обросова Наталия Кирилловна
канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий науч. сотрудник
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН
г. Москва
e-mail: nobrosova@ya.ru

Шананин Александр Алексеевич
д-р. физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
главный науч. сотрудник
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН
г. Москва
e-mail: alexshan@ya.ru

REFERENCES

1. Barro R.J., Sala-i-Martin X. *Economic growth*. Cambridge, London, MIT Press., 2004.
2. Chamberlin E.H. *The theory of monopolistic competition. Harvard economic studies*, 1969, Cambridge, Harvard Univ. Press. Translated to Russian under the title: Teoriya monopolisticheskoi konkurentsii (Reorientatsiya teorii stoimosti), Moscow: Ekonomika, 1996, 351 p.
3. Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. The network origins of aggregate fluctuations. *Econometrica*, 2012, vol. 80, no. 5, pp. 1977–2016. doi: 10.3982/ECTA9623
4. Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. Networks, shocks, and systemic risk. In: *The Oxford Handbook of the Economics of Networks*, eds. Yann Bramoulé et al, NY: Oxford Univ. Press, 2016, pp. 569–607. doi: 10.3386/w20931
5. Sarrazin T.*Europa braucht den Euro nicht*. München: Deutsche Verlags-Anstalt (DVA), 2012. Translated to Russian under the title: Evrope ne nuzhen evro, Moscow: AST Publ., 2015, 512 p.
6. Chevènement J.-P. *1914–2014 : l'Europe sortie de l'histoire?*, 2013, Editions Fayard, 350 p. Translated to Russian under the title: 1914–2014: Evropa vykhodit iz istorii, Moscow: AST Publ., 2015, 352 p.
7. Shananin A. Young duality and aggregation of balances. *Dokl. Math.*, 2020, vol. 102, no. 1, pp. 330–333. doi: 10.1134/S1064562420040171
8. Shananin A. Problem of aggregating of an input-output model and duality. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2021, vol. 61, no. 1, pp. 153–166. doi: 10.1134/S0965542521010085
9. Boranbayev S., Obrosova N., Shananin A. Production network centrality in connection to economic development by the case of Kazakhstan statistics. In: *Optimization and Applications: 12th Internat. Conf. (OPTIMA 2021): Proc.*, eds. Nicholas N. Olenev et al., 2021, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 13078, pp. 321–335. doi: 10.1007/978-3-030-91059-4_23
10. Obrosova N., Shananin A., Spiridonov A. On the comparison of two approaches to intersectoral balance analysis. *J. Physics: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2131, no. 2. doi: 10.1088/1742-6596/2131/2/022112
11. Rassokha A., Shananin A. Inverse problems of the analysis of input-output balances. *Math. Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 13, no. 6, pp. 943–954. doi: 10.1134/S2070048221060193
12. Kerimkhulle S., Obrosova N., Shananin A., Azieva G. The nonlinear model of intersectoral linkages of Kazakhstan for macroeconomic decision-making processes in sustainable supply chain management. *Sustainability*, 2022, vol. 14, no. 21. doi: 10.3390/su142114375
13. Boranbayev A., Obrosova N., Shananin A. Nonlinear input-output balance and Young duality: Analysis of Covid-19 macroeconomic impact on Kazakhstan. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2022, vol. 19, no. 2, pp. 835–851. doi: 10.33048/semi.2022.19.070
14. Obrosova N., Shananin A., Spiridonov A. Nonlinear input-output model with nested CES technologies for the analysis of macroeconomic effects of a foreign trade shock. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 4, no. 1, pp. 401–417. doi: 10.1134/S1995080223010304

15. Leontief W.W. *The Structure of American economy, 1919–1939: An empirical application of equilibrium analysis*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1951, 264 p.
16. Ashmanov S.A. *Vvedenie v matematicheskuyu ekonomiku* [Introduction to mathematical economics]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 293 p.
17. Acemoglu D., Akcigit U., Kerr W. Networks and the macroeconomy: An empirical exploration. *NBER Macroeconomics Annual*, 2016, vol. 30, no. 1, pp. 273–335. Available on: http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:17527693 .
18. Barauskaite Kristina, Nguyen Anh D.M. Global intersectoral production network and aggregate fluctuations. *Economic Modelling*, 2021, vol. 102(C). doi: 10.1016/j.econmod.2021.105577
19. Acemoglu D., Azar P.D. Endogenous production networks. *Econometrica*, 2020, vol. 88, no. 1, pp. 33–82. doi: 10.3982/ECTA15899
20. Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. Microeconomic origins of macroeconomic tail risks. *Am. Econ. Rev.*, 2017, vol. 107, no. 1, pp. 54–108. doi: 10.1257/aer.20151086
21. Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A. Systemic risk and stability in financial networks. *Am. Econ. Rev.*, 2015, vol. 105, no. 2, pp. 564–608. doi: 10.1257/aer.20130456
22. Baqaee D.R. Cascading failures in production networks. *Econometrica*, 2018, vol. 86, no. 5, pp. 1819–1838. doi: 10.3982/ECTA15280
23. Aubin J.P. *L'analyse Non Linéaire et ses Motivations Economiques*. Paris: Masson, 1984, 214 p. Translated to Russian under the title: Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya. Moscow: Mir Publ., 1988, 264 p.
24. Nikaido H. *Convex structures and economic theory*. NY: Acad. Press, 1968, 405 p. ISBN: 9781483230030. Translated to Russian under the title: Vypuklye struktury i matematicheskaya ekonomika, Moscow: Mir Publ., 1972, 520 p.
25. Shananin A.A. Duality for generalized programming problems, and variational principles in models of economic equilibrium. *Doklady Akademii Nauk*, 1999, vol. 366, no. 4, pp. 462–464 (in Russian).
26. Shananin A.A. Integrability problem and the generalized nonparametric method for the consumer demand analysis. In: *Proceedings of Moscow Inst. Phys. Technol.*, 2009, vol. 4, no. 1, pp. 84–98 (in Russian).
27. Miller R.E., Blair P.D. *Input-output analysis: Foundations and extensions*. 2nd ed, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, pp. 1–750.
28. Wixted B., Yamano N., Webb C. Input-output analysis in an increasingly globalised world: Applications of OECDs harmonised international tables. In: *OECD Science, Technology and Industry: working papers*, 2006, no. 2006/07, Paris: OECD Publ., 2006. doi: 10.1787/303252313764
29. O'Mahony Mary, Timmer Marcel P. Output, input and productivity measures at the industry level: The EU KLEMS database. *Economic J.*, 2009, vol. 119, no. 538, pp. F374–F403. doi 10.1111/j.1468-0297.2009.02280.x
30. Timmer M.P. [et al.] An Illustrated user guide to the world input-output database: The Case of global automotive production. *Review of International Economics*, 2015, vol. 23, pp. 575–605. doi 10.1111/roie.12178

Received May 11, 2023
Revised June 19, 2023
Accepted June 26, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00429, https://rscf.ru/project/23-21-00429/) .

Nataliia Obrosova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia, e-mail: nobrosova@ya.ru .

Alexander Shananin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RAS Academician, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia, e-mail: alexshan@ya.ru .

Cite this article as: N. K. Obrosova, A. A. Shananin. Young duality of variational inequalities. An application for the analysis of interactions in production networks. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 88–105.