

УДК 517.977.5

**ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ОБХОДА НЕСКОЛЬКИХ ТОЧЕК
МАШИНОЙ ДУБИНСА¹****А. М. Майер, А. А. Галяев**

В статье исследуется задача быстродействия последовательного обхода машиной Дубинса трех целевых точек на плоскости. Используется модель машины Дубинса для описания движения объекта в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью и ограниченной маневренностью. Рассматривается как фиксированная, так и нефиксированная очередность обхода управляемым объектом целевых точек. Задача является дискретно-непрерывной и содержит три целевых множества. Сложность нахождения решения заключается в невозможности разбить рассматриваемую задачу на ряд двухточечных, так как необходимо учитывать информацию о всех целях для того, чтобы минимизировать время обхода. В исследовании сформулированы необходимые условия оптимальности, с помощью которых разработан алгоритм построения оптимальной траектории в дальней зоне. Получен явный вид оптимального программного управления, решена задача синтеза оптимального управления. Для задачи с фиксированной последовательностью обхода разработан алгоритм построения оптимальной траектории обхода трех и двух целевых точек. Проведено сравнение результатов работы двух алгоритмов. Наиболее интересные результаты моделирования траекторий при различных случаях взаимного расположения целевых точек представлены в статье графически. Для задачи с нефиксированной последовательностью обхода построен алгоритм решения и найдены границы областей, где меняется последовательность обхода точек.

Ключевые слова: машина Дубинса, задача быстродействия, оптимальная траектория, неподвижные цели, алгоритм обхода целей.

A. M. Mayer, A. A. Galyaev. The time-optimal control problem of sequential traversal of several points by a Dubins car.

A time-optimal control problem of sequential traversal of three target points on the plane by a Dubins car is considered. The Dubins car model is used to describe the motion of an object in a horizontal plane with a constant speed and limited maneuverability. Fixed and unfixed sequences of traversal of target points are considered. The problem is discrete-continuous and contains three target sets. The difficulty of finding a solution lies in the impossibility to divide the problem into a series of tasks with two target points since it is necessary to consider information about all target points to minimize the traversal time. Necessary optimality conditions are formulated and used to develop an algorithm for constructing an optimal trajectory in the far zone. An explicit form of an optimal program control is obtained, and the problem of optimal control synthesis is solved. For a problem with a fixed traversal sequence, an algorithm for constructing an optimal trajectory for visiting three and two target points is developed. The results of the two algorithms are compared. The most interesting results of trajectory modeling for various cases of mutual position of target points are presented graphically. For a problem with an unfixed traversal sequence, a solution algorithm is constructed and the boundaries of the regions where the traversal sequence changes are found.

Keywords: Dubins car, time-optimal control problem, optimal trajectory, fixed targets, target traversal algorithm.

MSC: 49XXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-42-61

Введение

С начала XXI в. широкое применение автономных и беспилотных систем, действующих в различных средах, потребовало развития интеллектуальных алгоритмов планирования траекторий движения этих объектов. Особенностью данных алгоритмов является возможность оптимизации критерия миссии и выработки решения в условиях реального времени. Зачастую

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (проект 23-19-00134).

даже простые по своей формулировке задачи оптимального управления не имеют аналитического решения, поэтому ценность разработки алгоритма выбора и синтеза оптимальной или субоптимальной траектории существенно возрастает.

Необходимость решения подобных задач оптимального управления возникает при исследовании различных приложений науки и техники. В частности, в работе [1] изучается задача построения оптимального маршрута с целью осуществления листовой резки деталей известного контура. Эта задача связана с совместным исследованием дискретного множества возможных точек врезки и непрерывной динамики инструмента. Еще одним примером является задача управления работой автономных сельскохозяйственных машин, решение которой может быть применено для мониторинга урожайности, дифференциального внесения удобрений или опрыскивания, сбора урожая [2]. Задача заключается в обходе всех непрерывных рядов поля с учетом разворота машины за минимальное время. Среди прочего временной критерий необходимо оптимизировать по дискретному параметру — числу точек разворота. Механизм Аккермана в рулевом управлении ограничивает кривизну траектории движения сельскохозяйственной машины, что позволяет использовать модель машины Дубинса для исследования задачи и создать алгоритм планирования траекторий. Работа [3] посвящена построению траекторий роботизированных складских погрузчиков, используемых в складской логистике, и синтезу алгоритмов управления при различных ограничениях. В том числе рассматривается задача перемещения погрузчика из начального положения в конечное при наличии промежуточной точки, которую также необходимо обойти (переместить груз из одной точки склада в другую). В [4] предложен алгоритм построения оптимальной траектории перемещения БПЛА из начального положения в заданное и возвращение обратно с изменением скорости движения БПЛА до требуемой. Этот алгоритм позволяет повысить эффективность сканирования местности и качество работы приборов, находящихся на борту.

В данной работе исследуется проблема последовательного обхода нелинейным управляемым объектом группы неподвижных объектов (целевых точек) по критерию быстрогодействия и ставится задача разработки алгоритма синтеза траекторий обхода в ближней и дальней зонах. В качестве динамического управляемого объекта выбрана машина Дубинса, имеющая простейшую модель движения в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Рассматривается как фиксированная, так и нефиксированная очередность обхода управляемым объектом целевых точек.

Следует отметить, что впервые задача о соединении двух точек кратчайшей линией при условии, что радиус кривизны кривой ограничен, была решена А. А. Марковым в рамках задачи проектирования прокладки полотна железной дороги [5]. В [6] Р. Айзекс рассмотрел игровую задачу, в которой автомобиль с постоянной скоростью и ограниченным радиусом поворота сближается с уклоняющимся “пешеходом”. При этом задача, исследованная А. А. Марковым, является частным случаем задачи, рассмотренной Р. Айзексом, — случаем, когда “пешеход” неподвижен. Л.Э. Дубинс в [7] решил задачу поиска среди кривых ограниченной кривизны линии наименьшей длины, соединяющей две точки при условии, что направления выхода из начальной точки и прихода в конечную точку заданы.

Решение задачи с двумя неподвижными целями полностью исследовано Ю.И. Бердышевым в ряде работ, например в [8]. Настоящее исследование отличается от рассмотренных ранее постановок наличием не двух целевых точек, а трех. Сложность нахождения решения заключается в невозможности разбить указанную задачу на ряд двухточечных, так как необходимо учитывать информацию о всех целях для того, чтобы минимизировать время обхода. В этом можно убедиться, рассмотрев мотивирующий пример в [9]. Для решения двухточечной задачи Ю.И. Бердышевым в [10] была сформулирована и доказана теорема, выражающая необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума и условий выравнивания. Теорема позволяет получить вид оптимального управления исследуемого управляемого объекта и сами условия выравнивания. Принцип максимума при этом применяется на каждом интервале движения между заданными точками, но учитывает

информацию о последующих целях через касательный вектор траектории.

В [11] предложен алгоритм построения траектории в задаче быстрого действия обхода двух целевых точек W_1, W_2 с заданными в них направлениями скорости. В работе [12] были разработаны алгоритмы решения задачи коммивояжера для машины Дубинса, дополняющие друг друга при различном количестве точек обхода (“городов”). В. С. Пацко и А. А. Федотов построили и проанализировали множество достижимости машины Дубинса, в том числе в [13] авторы получили необходимые и достаточные условия для траекторий, ведущих на его границу.

В недавних исследованиях [14–16] предложен оптимальный синтез траекторий перехвата под нефиксированным и фиксированным углами для движущихся целей, где получены аналитические формулы для нахождения критерия задачи, которые могут быть использованы и в случае неподвижных точек для формирования сквозной траектории обхода.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе описывается математическая постановка оптимизационной задачи и приводится разбиение исследуемой задачи на частные случаи. Второй раздел посвящен исследованию необходимых условий экстремума и их адаптации к существованию исходной задачи. В третьем разделе выписывается известное решение задачи в дальней зоне, которое систематизируется на основе предложенного алгоритма и моделируется в пятом разделе. В четвертом разделе разрабатываются алгоритмы построения оптимальной траектории в ближней зоне, которые иллюстрируются примерами в разд. 6. Моделирование завершается в седьмом разделе, где исследуются границы областей смены очередности обхода. В заключении приводятся основные результаты работы и предлагаются направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Движение управляемого объекта описывается следующей нелинейной системой уравнений, которая является моделью машины Дубинса, движущейся с постоянной скоростью, равной единице:

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = u. \end{cases} \quad (1.1)$$

В этой системе x, y — декартовы координаты управляемого объекта на плоскости, φ — угол между скоростью объекта и осью x , u — управление, которое является скоростью изменения угла φ и удовлетворяет ограничению $|u| \leq 1$.

Начальные условия считаются заданными

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0.$$

Без потери общности в рассматриваемой задаче можем считать $t_0 = 0$.

Декартовы координаты точек W_i ($i = \overline{1, 3}$), которые необходимо обойти, также заданы и равны (x_i, y_i) соответственно.

Задача состоит в поиске оптимального управления и минимизации критерия качества

$$J[u] = \int_0^T dt \rightarrow \min_{u(\cdot)},$$

где $T \in R_0^+$, при условии $K_i(t_i) = 0$. В данном случае K_i — двумерные функции, компоненты которых определяются как $K_{ix} = x - x_i, K_{iy} = y - y_i$ ($i = \overline{1, 3}$).

Существенными параметрами задачи построения оптимальной траектории являются расстояния между точками обхода W_{i-1}, W_i . Пусть r_i ($i = \overline{1, 3}$) — расстояние между точками

W_{i-1}, W_i, R — минимально возможный радиус поворота (для выбранного объекта $R = 1$), обход точек осуществляется в порядке возрастания их номеров. Тогда такой случай взаимного расположения целевых точек, как

$$r_1 \geq 4R, \quad r_2 \geq 4R, \quad r_3 > 2R$$

назовем *случаем задачи классификации дальней зоны*. Остальные случаи назовем *случаями задачи классификации ближней зоны*.

Предложенная классификация может быть расширена выделением в дальней зоне множества случаев, связанных с направлением движения автомобиля. Тогда возможны следующие случаи:

- (а) поворот машины происходит в одном направлении (например, по часовой стрелке);
- (б) поворот машины происходит в разных направлениях;
- (в) комбинация случаев (а) и (б), состоящая из 28 различных вариантов, которые, в свою очередь, можно разбить еще на несколько подслучаев (например, при обходе первых двух точек поворот осуществляется по часовой стрелке, а далее — против).

2. Необходимые условия оптимальности

Для построения траекторий нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $D_u(t) = (x_u(t), y_u(t), \varphi_u(t))$ — движение, порожденное управлением u , система уравнений движения (1.1) дополнена уравнением

$$\dot{z} = 1, \quad z(t_0) = z_0,$$

а функции Φ_i ($i = \overline{1, 3}$) определяются как $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = z - t_0$.

Тогда в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения:

1. Принцип максимума эквивалентен условию

$$u(t) = \text{sign } \Psi_{i3}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.1)$$

2. Условия выравнивания принимают вид

$$(\lambda_{k1} \quad \lambda_{k2}) \times \begin{pmatrix} \cos \varphi_u(t_k) \\ \sin \varphi_u(t_k) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

где λ_k — двумерные векторы вида $(\lambda_{k1}, \lambda_{k2})^T$, задающие нормали к окружностям, в t_k — в моменты встречи управляемого объекта с целевыми точками W_k ($k = 1, 2$).

Геометрический смысл условий выравнивания (2.2) состоит в том, что в момент времени t_k вектор скорости

$$V(t_k) = (\cos \varphi_u(t_k), \sin \varphi_u(t_k))$$

перпендикулярен вектору λ_k .

Доказательство. Необходимые условия оптимальности для случая трех целей можно получить, воспользовавшись теоремой 6.1 [10]. В силу теоремы 6.1 из [10] оптимальное управление исследуемого управляемого объекта удовлетворяет принципу максимума и условиям выравнивания. Чтобы воспользоваться теоремой введем дополнительное уравнение

$$\dot{z} = 1, \quad z(t_0) = z_0 \quad (2.3)$$

и положим функции Φ_i ($i = \overline{1,3}$), равными $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = z - t_0$; тогда основная задача из [6] превращается в задачу на быстроедействие.

В соответствии с теоремой векторы l_i ($i = \overline{1,3}$) принимают вид

$$l_1 = -\frac{\partial K_1}{\partial \bar{x}} \lambda_1, \quad l_2 = -\frac{\partial K_2}{\partial \bar{x}} \lambda_2, \quad l_3 = -\frac{\partial K_3}{\partial \bar{x}} \lambda_3 - \frac{\partial \Phi_3}{\partial \bar{x}};$$

здесь λ_i — двумерные векторы вида $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})^T$, $\bar{x} = (x, y, \varphi, z)$ — фазовый вектор системы (1.1) с дополнительным уравнением (2.3).

Тогда $l_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, 0, 0)^T$, $l_2 = (\lambda_{21}, \lambda_{22}, 0, 0)^T$, $l_3 = (\lambda_{31}, \lambda_{32}, 0, -1)^T$.

Систему в вариациях и фундаментальную матрицу ее решений запишем как

$$\dot{\delta x} = -\sin \varphi_u(t) \delta \varphi, \quad \dot{\delta y} = \cos \varphi_u(t) \delta \varphi, \quad \dot{\delta \varphi} = 0, \quad \dot{\delta z} = 0,$$

$$S(t, t_0|u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_0 - y_u(t) & 0 \\ 0 & 1 & x_u(t) - x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $D_u(t) = (x_u(t), y_u(t), \varphi_u(t))$ — движение, порожденное управлением u .

Следовательно, компоненты $\Psi_{ij}(t)$ ($j = \overline{1,4}$) векторных функций $\Psi_i(t)$, которые являются результатом произведения вектора-строки l_i^T на матрицу $S(t, t_0|u)$ ($i = \overline{1,3}$), принимают вид

$$\begin{cases} \Psi_{11} = \lambda_{11}, & \Psi_{12} = \lambda_{12}, & \Psi_{13} = \lambda_{11}(y_1 - y_u) - \lambda_{12}(x_u - x_1), & \Psi_{14} = 0; \\ \Psi_{21} = \lambda_{21}, & \Psi_{22} = \lambda_{22}, & \Psi_{23} = \lambda_{21}(y_2 - y_u) - \lambda_{22}(x_u - x_2), & \Psi_{24} = 0; \\ \Psi_{31} = \lambda_{31}, & \Psi_{32} = \lambda_{32}, & \Psi_{33} = \lambda_{31}(y_3 - y_u) - \lambda_{32}(x_u - x_3), & \Psi_{34} = -1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Пусть $\tilde{\Psi}_k(t)$ — функции, определяемые формулами

$$\tilde{\Psi}_k(t) = \sum_{i=k}^3 \Psi_i(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1,3}.$$

Тогда компоненты $\tilde{\Psi}_{kj}(t)$ функций $\tilde{\Psi}_k(t)$ представимы в виде

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{31} = \lambda_{31}; \\ \tilde{\Psi}_{32} = \lambda_{32}; \\ \tilde{\Psi}_{33} = \lambda_{31}(y_3 - y_u) - \lambda_{32}(x_u - x_3); \\ \tilde{\Psi}_{34} = -1. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{21} = \lambda_{21} + \lambda_{31}; \\ \tilde{\Psi}_{22} = \lambda_{22} + \lambda_{32}; \\ \tilde{\Psi}_{23} = \lambda_{21}(y_2 - y_u) - \lambda_{22}(x_u - x_2) + |\tilde{\Psi}_{33}|; \\ \tilde{\Psi}_{24} = -1. \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{11} = \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31}; \\ \tilde{\Psi}_{12} = \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32}; \\ \tilde{\Psi}_{13} = \lambda_{11}(y_1 - y_u) - \lambda_{12}(x_u - x_1) + |\tilde{\Psi}_{23}| + |\tilde{\Psi}_{33}|; \\ \tilde{\Psi}_{14} = -1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Аналогично равенству (6.7) [10, с. 1459] далее для систем (2.5), (2.6) и (2.6), (2.7) получаем

$$(\lambda_{21} + \lambda_{31}) \cos \varphi_u + (\lambda_{22} + \lambda_{32}) \sin \varphi_u + |\tilde{\Psi}_{23}| - 1 = \lambda_{31} \cos \varphi_u + \lambda_{32} \sin \varphi_u + |\tilde{\Psi}_{33}| - 1,$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31}) \cos \varphi_u + (\lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32}) \sin \varphi_u + |\tilde{\Psi}_{13}| - 1 \\
 & = (\lambda_{21} + \lambda_{31}) \cos \varphi_u + (\lambda_{22} + \lambda_{32}) \sin \varphi_u + |\tilde{\Psi}_{23}| - 1.
 \end{aligned}$$

С учетом равенств (2.4) получаем $\lambda_{21} \cos \varphi_u + \lambda_{22} \sin \varphi_u = 0$, $\lambda_{11} \cos \varphi_u + \lambda_{12} \sin \varphi_u = 0$. В рассматриваемом случае принцип максимума эквивалентен условию

$$u(t) = \text{sign } \Psi_{i3}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Лемма доказана.

Утверждение 1 [17, теорема 1]. *Оптимальная траектория состоит из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых, соединяющих их (2.1). В точках стыковки участки траектории гладко переходят друг в друга, так как направление движения объекта не меняется скачкообразно.*

Лемма 2. *Если в момент времени t_k встречи управляемого объекта с целевой точкой W_k ($k = 1, 2$) вектор скорости $V(t_k)$ перпендикулярен вектору λ_k , то целевая точка W_k делит соответствующую ей дугу пополам.*

Доказательство этой леммы может быть проведено по схеме из [10, с. 1460].

3. Построение оптимальной траектории в дальней зоне

Доказанных в разд. 2 необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума (2.1) и выравнивания (2.2) для трехточечной задачи, приведенного утверждения 1, определяющего качественный вид оптимальной траектории обхода целевых точек, и леммы 2 оказывается достаточно для построения алгоритма нахождения оптимальной траектории обхода целевых точек в дальней зоне для случая (а), отмеченного на с. 45.

В качестве неизвестных выберем углы α и β между осью абсцисс и лучами, исходящими из точек W_1, W_2 и проходящими через центры $M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$ окружностей C_M, C_N (см. рис. 1). Легко заметить, что

$$x_M = x_1 + R \cos \alpha, \quad y_M = y_1 + R \sin \alpha,$$

$$x_N = x_2 + R \cos \beta, \quad y_N = y_2 + R \sin \beta.$$

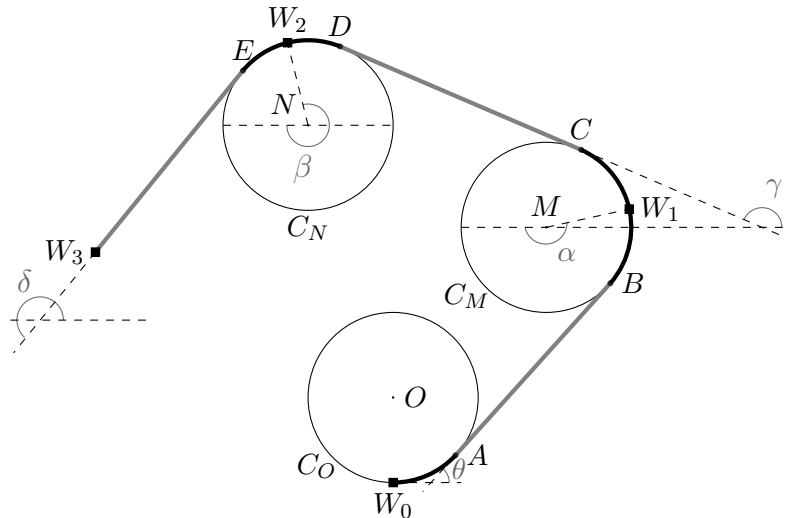


Рис. 1. Пример траектории обхода трех целевых точек W_1, W_2, W_3 в дальней зоне.

Зная углы α и β , можно найти углы θ, γ, δ , которые определяют прямолинейные участки движения AB, CD, EW_3 . Если $x_M \neq 0$, то $\theta = \arctan(y_M - R)/x_M$, иначе $\theta = \pi/2$. Если $x_M \neq x_N$, то $\gamma = \arctan(y_N - y_M)/(x_N - x_M)$, иначе $\gamma = \pi/2$. Последний угол определяется равенством $\delta = 2 \arctan q$, где q — решение квадратного уравнения

$$(R + y_3 - y_N)q^2 + 2q(x_3 - x_N) + (R - y_3 + y_N) = 0.$$

Уравнения для определения α и β имеют вид

$$\theta + \gamma + \pi = 2\alpha, \quad \gamma + \delta + \pi = 2\beta$$

и отражают дополнительное условие, состоящее в том, что точки W_1 и W_2 делят соответствующие им дуги BC и DE пополам. Длины d_i ($i = \overline{1, 3}$) прямолинейных участков траектории определяются по формулам

$$d_1 = |x_M \cos \theta + (y_M - R) \sin \theta|, \quad d_2 = |(x_2 - x_M) \cos \gamma + (y_2 - y_M) \sin \gamma|,$$

$$d_3 = |(x_3 - x_N) \cos \delta + (y_3 - y_N) \sin \delta|.$$

В качестве начального приближения α_0 и β_0 разумно выбрать

$$\alpha_0 = (\theta_0 + \gamma_0 + \pi)/2, \quad \beta_0 = (\gamma_0 + \delta_0 + \pi)/2,$$

где $\theta_0, \gamma_0, \delta_0$ находим по формулам

$$\theta_0 = \begin{cases} \arctan y_1/x_1, & x_1 \neq 0; \\ \pi/2, & \text{если } x_1 = 0. \end{cases} \quad \gamma_0 = \begin{cases} \arctan(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1), & x_1 \neq x_2; \\ \pi/2, & \text{если } x_1 = x_2. \end{cases}$$

$$\delta_0 = \begin{cases} \arctan(y_3 - y_2)/(x_3 - x_2), & x_2 \neq x_3; \\ \pi/2, & \text{если } x_2 = x_3. \end{cases}$$

4. Построение оптимальной траектории в ближней зоне

Для задачи классификации ближней зоны фактов, сформулированных в разд. 2, оказывается недостаточно для построения оптимальной траектории. Поэтому переформулируем задачу как задачу минимизации функционала времени по параметрам φ_1, φ_2 , т. е. по углам между вектором скорости объекта и осью абсцисс в моменты встречи машины с точками W_1 и W_2 соответственно. Углы φ_1, φ_2 связаны с углами α, β соотношениями

$$\varphi_1 = \begin{cases} \alpha + 3\pi/2, & \alpha \in [0, \pi/2); \\ \alpha - \pi/2, & \alpha \in [\pi/2, 2\pi), \end{cases} \quad \varphi_2 = \begin{cases} \beta + 3\pi/2, & \beta \in [0, \pi/2); \\ \beta - \pi/2, & \beta \in [\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Аналитические выражения для времени движения от одной точки к другой можно получить из выражений для оптимального времени перехвата подвижной цели, которые найдены в работах [15; 16], если учесть независимость координат целевых точек от времени. Поскольку ранее было получено, что оптимальная траектория состоит из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых, соединяющих их, то для именования классов траекторий будем пользоваться известными обозначениями [17]: CC — класс траекторий, состоящий из двух дуг разных окружностей единичного радиуса, CS — класс траекторий, состоящий из дуги окружности единичного радиуса и отрезка. В работе [17] также показано, что траекторий из классов CC и CS достаточно для осуществления оптимального обхода. Аналогичный результат получен в работе [7] для CCC и CSC траекторий.

Функция двух параметров, подлежащая минимизации, принимает следующий вид:

$$T(x_0, y_0, \varphi_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \min_{\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]} [T_1(x_0, y_0, \varphi_0, x_1, y_1, \varphi_1) + T_2(x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2) + T_3(x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3)], \quad (4.1)$$

где T_i — время, движения объекта из точки W_{i-1} в точку W_i ($i = \overline{1, 3}$).

Функция T в задаче оптимизации (4.1) имеет наиболее общий вид и позволяет дополнительно исследовать ее на экстремум как по углу φ_0 , так и по пространственным координатам точек обхода.

Рассмотрим более простую вспомогательную задачу. Пусть целевых точек всего две: W_i ($i = 1, 2$) и W_2 совпадает с W_0 . Тогда функцию T можно записать следующим образом:

$$T(x_0, y_0, \varphi_0, x_1, y_1) = \min_{\varphi_1 \in [0, 2\pi]} [T_1(x_0, y_0, \varphi_0, x_1, y_1, \varphi_1) + T_2(x_1, y_1, \varphi_1, x_0, y_0)]. \quad (4.2)$$

Выражения, позволяющие определить время движения вдоль траекторий классов CSC и CCC при начальных условиях $x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = \pi/2$ в точку (x, y) под углом φ , приведены в [15, с. 5]. Аналогичные выражения для траекторий классов CS и CC представлены в [16, с. 13].

Пусть начальные условия считаются заданными: $W_0(0, 0, \pi/2)$. Тогда выражения из [15, с. 5] позволяют записать функцию T_1 с неизвестным параметром φ_1 . Далее движение объекта осуществляется из точки W_1 обратно в точку W_0 , поэтому необходимо вывести уравнение для определения T_2 (4.2) при произвольных начальных условиях $W_1(x_1, y_1, \varphi_1)$. Не ограничивая общности, будем считать, что объект начинает движение из точки $W_0(x_0, y_0, \varphi_0)$, а целевой является точка с координатами (x, y) .

В соответствии с системой уравнений движения (1.1) и видом управления вдоль траекторий класса CS

$$u_{CS} = \begin{cases} s, & t \in [0, \tau); \\ 0, & t \in [\tau, T_{CS}), \end{cases}$$

где $s \in \{-1; 1\}$, имеем, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0, & t < 0; \\ \varphi_0 + st, & t \in [0, \tau); \\ \varphi_0 + s\tau, & t \in (\tau, T_{CS}]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Проинтегрируем первые два уравнения движения (1.1), учитывая полученную систему для $\varphi(t)$ вида (4.3)

$$x = x_0 + \frac{\sin(\varphi_0 + s\tau)}{s} - \frac{\sin(\varphi_0)}{s} + \cos(\varphi_0 + s\tau)(T_{CS} - \tau), \quad (4.4)$$

$$y = y_0 - \frac{\cos(\varphi_0 + s\tau)}{s} + \frac{\cos(\varphi_0)}{s} + \sin(\varphi_0 + s\tau)(T_{CS} - \tau). \quad (4.5)$$

Умножая уравнения (4.4) и (4.5) на s , получаем следующую систему

$$\begin{cases} sx - sx_0 + \sin(\varphi_0) = \sin(\varphi_0 + s\tau) + s \cos(\varphi_0 + s\tau)(T_{CS} - \tau), \\ sy - sy_0 - \cos(\varphi_0) = -\cos(\varphi_0 + s\tau) + s \sin(\varphi_0 + s\tau)(T_{CS} - \tau). \end{cases} \quad (4.6)$$

Еще раз умножая первое уравнение системы (4.6) на s и преобразуя второе уравнение, имеем

$$\begin{cases} (x - x_0) + \sin(s\varphi_0) = \sin(s\varphi_0 + \tau) + \cos(s\varphi_0 + \tau)(T_{CS} - \tau), \\ s(y - y_0) - \cos(s\varphi_0) = -\cos(s\varphi_0 + \tau) + \sin(s\varphi_0 + \tau)(T_{CS} - \tau). \end{cases} \quad (4.7)$$

Упростим правые части уравнений системы (4.7), применяя преобразование поворота на угол $s\varphi_0$, которому соответствует следующая матрица-оператор

$$\begin{pmatrix} \sin(s\varphi_0) & -\cos(s\varphi_0) \\ \cos(s\varphi_0) & \sin(s\varphi_0) \end{pmatrix}.$$

Первое уравнение системы (4.7) принимает вид

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \sin(s\varphi_0) + (\sin(s\varphi_0))^2 - s(y - y_0) \cos(s\varphi_0) + (\cos(s\varphi_0))^2 \\ & = \sin(s\varphi_0 + \tau) \sin(s\varphi_0) + \cos(s\varphi_0 + \tau) \sin(s\varphi_0)(T_{CS} - \tau) + \cos(s\varphi_0 + \tau) \cos(s\varphi_0) \\ & \quad - \sin(s\varphi_0 + \tau) \cos(s\varphi_0)(T_{CS} - \tau). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Второе уравнение системы (4.7) записывается в форме

$$\begin{aligned} & s(y - y_0) \sin(s\varphi_0) - \cos(s\varphi_0) \sin(s\varphi_0) + (x - x_0) \cos(s\varphi_0) + \sin(s\varphi_0) \cos(s\varphi_0) \\ & = -\cos(s\varphi_0 + \tau) \sin(s\varphi_0) + \sin(s\varphi_0 + \tau) \sin(s\varphi_0)(T_{CS} - \tau) + \sin(s\varphi_0 + \tau) \cos(s\varphi_0) \\ & \quad + \cos(s\varphi_0 + \tau) \cos(s\varphi_0)(T_{CS} - \tau). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Простыми преобразованиями уравнения (4.8) и (4.9) можно записать в более компактном виде

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \sin(s\varphi_0) - s(y - y_0) \cos(s\varphi_0) + 1 = \cos(\tau) - \sin(\tau)(T_{CS} - \tau), \\ & (x - x_0) \cos(s\varphi_0) + s(y - y_0) \sin(s\varphi_0) = \sin(\tau) + \cos(\tau)(T_{CS} - \tau). \end{aligned}$$

В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & s[(x - x_0) \sin(\varphi_0) - (y - y_0) \cos(\varphi_0)] + 1 = \cos(\tau) - \sin(\tau)(T_{CS} - \tau), \\ & (x - x_0) \cos(\varphi_0) + (y - y_0) \sin(\varphi_0) = \sin(\tau) + \cos(\tau)(T_{CS} - \tau). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обозначая выражение в квадратных скобках в левой части первого уравнения (4.10) через X и левую часть второго уравнения (4.10) через Y , получаем систему

$$\begin{cases} X = (x - x_0) \sin(\varphi_0) - (y - y_0) \cos(\varphi_0), \\ Y = (x - x_0) \cos(\varphi_0) + (y - y_0) \sin(\varphi_0). \end{cases} \quad (4.11)$$

В терминах (4.11) система уравнений (4.10) приобретает итоговый вид

$$\begin{cases} sX + 1 = \cos(\tau) - \sin(\tau)(T_{CS} - \tau), \\ Y = \sin(\tau) + \cos(\tau)(T_{CS} - \tau). \end{cases} \quad (4.12)$$

Теперь можно воспользоваться тем фактом, что система уравнений (4.12) совпадает с системой уравнений, полученной в работе [16] при интегрировании уравнений движения с начальными условиями $(0, 0, \pi/2)$ при управлении u_{CS} . Тогда замена (4.11) позволяет находить функцию T_{CS} при произвольных начальных условиях, используя следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_C &= \frac{1 - |X| + Y \sqrt{(1 - |X|)^2 + Y^2 - 1}}{(1 - |X|)^2 + Y^2}, \\ \alpha_S &= \frac{Y - (1 - |X|) \sqrt{(1 - |X|)^2 + Y^2 - 1}}{(1 - |X|)^2 + Y^2}, \\ \tau &= \begin{cases} \arccos \alpha_C, & \alpha_S \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \alpha_C, & \alpha_S < 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$T_{CS} = \tau + \sqrt{(1 - |X|)^2 + Y^2 - 1}.$$

Приведенные выше выкладки можно произвести и для нахождения времени движения вдоль траекторий класса CC при произвольных начальных условиях. Получим ту же замену (4.11). Зная выражения для нахождения $T_{CS}, T_{CC}, T_{CSC}^{s,\sigma}, T_{CCC}^s$, построим алгоритм нахождения оптимальной траектории в каждом классе траекторий, где T_{CC} — время движения вдоль траекторий класса CC , $T_{CSC}^{s,\sigma}$ — время движения вдоль траекторий класса CSC , T_{CCC}^s — время движения вдоль траекторий класса CCC , а s и σ указывают направления движения объекта вдоль дуг окружностей единичного радиуса.

А л г о р и т м 1. Нахождение оптимальных значений $\varphi_1^{**}, T_{CSC,CS}^{**}$ для CSC, CS .

Пусть $s = 1, \sigma = 1$.

1. Инициализировать параметры $\varphi_0, x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$.
2. Для $\varphi_1 = 0 : 0.01 : 2\pi$ вычислить $T_{CSC}^{s,\sigma}, T_{CS}$ и $T = T_{CSC}^{s,\sigma} + T_{CS}$.
3. Найти $T_{\min} = \min_{\varphi_1 \in [0, 2\pi]} \{T\}, \varphi_1 = \varphi_{1\min}$.
4. Если такое решение существует, то $\varphi_1^* = \varphi_{1\min}, T^* = T_{\min}$. Иначе траектория данного класса не реализует оптимальной обход.
5. Повторить пп. 1–4 для всевозможных комбинаций $s = \{-1; 1\}, \sigma = \{-1; 1\}$.
6. Найти $T_{CSC,CS}^{**} = \min_{s,\sigma} \{T^*\}$ и соответствующий угол $\varphi_1^{**}(T_{CSC,CS}^{**})$. □

В ходе этой работы мы разработали алгоритмы, аналогичные данному, для нахождения оптимальных значений времени обхода двух целевых точек в каждом классе траекторий и определения соответствующих углов прохождения целевых точек, реализующих оптимальный обход. Для краткости изложения их не приводим. Далее необходимо найти оптимальное время обхода по всевозможным классам траекторий:

$$T^{**} = \min\{T_{CSC,CS}^{**}, T_{CCC,CS}^{**}, T_{CSC,CC}^{**}, T_{CCC,CC}^{**}\}.$$

Зная T^{**} , соответствующий угол $\varphi_1^{**}(T^{**})$ и оптимальное управление, восстанавливаем траекторию оптимального обхода объектом двух целевых точек.

Алгоритм 1, а также три других аналогичных ему алгоритма позволяют находить оптимальную траекторию обхода двух целевых точек.

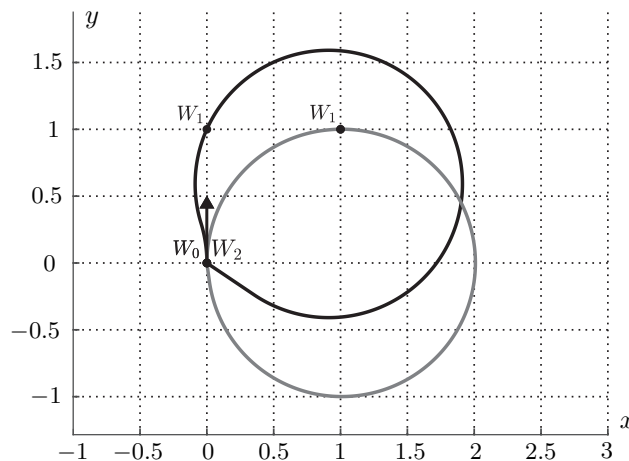


Рис. 2. Оптимальные траектории сближения машины Дубинса с целевыми точками $W_1(0, 1)$ и $W_1(1, 1)$ (ближняя зона)

Пусть заданы декартовы координаты точек обхода как

$$W_0(0,0), \quad W_1(0,1), \quad W_2(0,0); \quad W_0(0,0), \quad W_1(1,1), \quad W_2(0,0).$$

Результаты работы алгоритма приведены на рис. 2.

Для $W_1 = (0,1)$ найдены значения $T^{**} = 6.3314$, $\varphi_1^{**} = 1.15$. Для $W_1 = (1,1)$ получено, что $T^{**} = 6.2924$, $\varphi_1^{**} = 0.01$.

По аналогии с двухточечной вспомогательной задачей понятно, что при обходе трех целей необходимо вывести уравнение для определения времени движения T_2 (4.1) при произвольных начальных условиях $W_1(x_1, y_1, \varphi_1)$. Не ограничивая общности, будем считать, что объект начинает движение из точки $W_0(x_0, y_0, \varphi_0)$, а целевой является точка с координатами (x, y) .

В соответствии с системой уравнений движения (1.1) и следующим видом управления u_{CSC} вдоль траекторий класса CSC ($s \in \{-1; 1\}$, $\sigma \in \{-1; 1\}$):

$$u_{CSC} = \begin{cases} s, & t \in [0, \tau_1); \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2); \\ \sigma, & t \in [\tau_2, T_{CSC}^{s,\sigma}), \end{cases}$$

получаем, что

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0, & t < 0; \\ \varphi_0 + st, & t \in [0, \tau_1]; \\ \varphi_0 + s\tau_1, & t \in (\tau_1, \tau_2]; \\ \varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(t - \tau_2), & t \in (\tau_2, T_{CSC}^{s,\sigma}]. \end{cases} \quad (4.13)$$

Проинтегрируем первые два уравнения движения (1.1), учитывая полученную систему для $\varphi(t)$ (4.13):

$$x = x_0 + \frac{\sin(\varphi_0 + s\tau_1)}{s} - \frac{\sin(\varphi_0)}{s} + \cos(\varphi_0 + s\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) + \frac{\sin(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2))}{\sigma} - \frac{\sin(\varphi_0 + s\tau_1)}{\sigma}, \quad (4.14)$$

$$y = y_0 - \frac{\cos(\varphi_0 + s\tau_1)}{s} + \frac{\cos(\varphi_0)}{s} + \sin(\varphi_0 + s\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) - \frac{\cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2))}{\sigma} + \frac{\cos(\varphi_0 + s\tau_1)}{\sigma}. \quad (4.15)$$

Умножая уравнения (4.14) и (4.15) на $s\sigma$, получаем следующую систему:

$$s\sigma x - s\sigma x_0 + \sigma \sin(\varphi_0) = \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1) + s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) + s \sin(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) - s \sin(\varphi_0 + s\tau_1), \quad (4.16)$$

$$s\sigma y - s\sigma y_0 - \sigma \cos(\varphi_0) = -\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1) + s\sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) - s \cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) + s \cos(\varphi_0 + s\tau_1). \quad (4.17)$$

Далее, умножая уравнение (4.16) на $s\sigma$, а уравнение (4.17) на σ , имеем

$$x - x_0 + \sin(s\varphi_0) = \sin(s\varphi_0 + \tau_1) + \cos(s\varphi_0 + \tau_1)(\tau_2 - \tau_1) + \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) - \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1), \quad (4.18)$$

$$s(y - y_0) - \cos(s\varphi_0) = -\cos(s\varphi_0 + \tau_1) + s \sin(\varphi_0 + s\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) - s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) + s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1). \quad (4.19)$$

Снова упростим правые части уравнений (4.18), (4.19), применяя преобразование поворота на угол $s\varphi_0$, которому соответствует следующая матрица-оператор:

$$\begin{pmatrix} \sin(s\varphi_0) & -\cos(s\varphi_0) \\ \cos(s\varphi_0) & \sin(s\varphi_0) \end{pmatrix}.$$

У р а в н е н и е 1. Первое уравнение системы принимает вид

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \sin(s\varphi_0) + (\sin(s\varphi_0))^2 - s(y - y_0) \cos(s\varphi_0) + (\cos(s\varphi_0))^2 \\ = & \sin(s\varphi_0 + \tau_1) \sin(s\varphi_0) + \cos(s\varphi_0 + \tau_1) \sin(s\varphi_0)(\tau_2 - \tau_1) + \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \sin(s\varphi_0) \\ & - \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1) \sin(s\varphi_0) + \cos(\tau_1 + s\varphi_0) \cos(s\varphi_0) - s \sin(s\tau_1 + \varphi_0) \cos(s\varphi_0)(\tau_2 - \tau_1) \\ & + s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \cos(s\varphi_0) - s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1) \cos(s\varphi_0). \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойствами четности и нечетности тригонометрических функций, получаем

$$\begin{aligned} & s[(x - x_0) \sin(\varphi_0) - (y - y_0) \cos(\varphi_0)] + 1 \\ & = \cos(\tau_1) - \sin(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) + s\sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1 \\ & + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \sin(\varphi_0) - s\sigma \sin(s\varphi_0 + \tau_1) \sin(s\varphi_0) \\ & + s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \cos(\varphi_0) - s\sigma \cos(s\varphi_0 + \tau_1) \cos(s\varphi_0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Простыми преобразованиями уравнение (4.20) можно записать в более компактном виде

$$\begin{aligned} & s[(x - x_0) \sin(\varphi_0) - (y - y_0) \cos(\varphi_0)] + 1 \\ & = \cos(\tau_1) - \sin(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) + s\sigma \cos(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) - s\sigma \cos(\tau_1). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \sin(\varphi_0) - (y - y_0) \cos(\varphi_0) \\ & = s[\cos(\tau_1) - 1 - \sin(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1)] + \sigma[\cos(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) - \cos(\tau_1)]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Обозначая выражение в левой части уравнения (4.21) через X , получаем финальный вид зависимости

$$X = s[\cos(\tau_1) - 1 - \sin(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1)] + \sigma[\cos(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) - \cos(\tau_1)].$$

У р а в н е н и е 2. Второе уравнение системы принимает вид

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \cos(s\varphi_0) + \sin(s\varphi_0) \cos(s\varphi_0) + s(y - y_0) \sin(s\varphi_0) - \cos(s\varphi_0) \sin(s\varphi_0) \\ & = \sin(s\varphi_0 + \tau_1) \cos(s\varphi_0) + \cos(s\varphi_0 + \tau_1) \cos(s\varphi_0)(\tau_2 - \tau_1) \\ & + \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \cos(s\varphi_0) \\ & - \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1) \cos(s\varphi_0) - \cos(\tau_1 + s\varphi_0) \sin(s\varphi_0) + s \sin(s\tau_1 + \varphi_0) \sin(s\varphi_0)(\tau_2 - \tau_1) \\ & - s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \sin(s\varphi_0) + s\sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1) \sin(s\varphi_0). \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойствами четности и нечетности тригонометрических функций, преобразуем это выражение к виду

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \cos(\varphi_0) + (y - y_0) \sin(\varphi_0) = \sin(\tau_1) + \cos(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) \\ & + \sigma \sin(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \cos(\varphi_0) - s\sigma \sin(s\varphi_0 + \tau_1) \cos(s\varphi_0) \\ & - \sigma \cos(\varphi_0 + s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) \sin(\varphi_0) + s\sigma \cos(s\varphi_0 + \tau_1) \sin(s\varphi_0). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \cos(\varphi_0) + (y - y_0) \sin(\varphi_0) \\ & = \sin(\tau_1) + \cos(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) - \sigma[s \sin(\tau_1) - \sin(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2))]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Обозначим выражение в левой части уравнения (4.22) через Y , тогда

$$Y = \sin(\tau_1) + \cos(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) - \sigma[s \sin(\tau_1) - \sin(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2))].$$

Итоговая система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= s[\cos(\tau_1) - 1 - \sin(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1)] + \sigma[\cos(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2)) - \cos(\tau_1)], \\ Y &= \sin(\tau_1) + \cos(\tau_1)(\tau_2 - \tau_1) - \sigma[s \sin(\tau_1) - \sin(s\tau_1 + \sigma(T_{CSC}^{s,\sigma} - \tau_2))]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Теперь можно воспользоваться тем фактом, что система уравнений (4.23) совпадает с уравнениями, полученными в работе [15] при интегрировании уравнений движения с начальными условиями $(0, 0, \pi/2)$ при управлении u_{CSC} . Тогда найденная замена

$$\begin{cases} X = (x - x_0) \sin(\varphi_0) - (y - y_0) \cos(\varphi_0), \\ Y = (x - x_0) \cos(\varphi_0) + (y - y_0) \sin(\varphi_0) \end{cases} \quad (4.24)$$

позволяет находить функцию $T_{CSC}^{s,\sigma}$ при произвольных начальных условиях. Приведенные выше выкладки можно произвести и для нахождения времени движения вдоль траекторий класса CCC при произвольных начальных условиях. Получим ту же замену (4.24).

А л г о р и т м 2. Нахождение оптимальных значений φ_1^{**} , φ_2^{**} , $T_{CSC,CCC,CS}^{**}$ для CSC, CCC, CS .

Пусть $s_1 = 1, \sigma_1 = 1, s_2 = 1$.

1. Инициализировать параметры $\varphi_0, x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$.
2. Для $\varphi_1 = 0 : 0.01 : 2\pi, \varphi_2 = 0 : 0.01 : 2\pi$ вычислить $T_{CSC}^{s_1, \sigma_1}, T_{CCC}^{s_2}, T_{CS}$ и $T = T_{CSC}^{s_1, \sigma_1} + T_{CCC}^{s_2} + T_{CS}$.
3. Найти $T_{\min} = \min_{\varphi_1 \in [0, 2\pi], \varphi_2 \in [0, 2\pi]} \{T\}$, $\varphi_1 = \varphi_{1\min}, \varphi_2 = \varphi_{2\min}$.
4. Если такое решение существует, то $\varphi_1^* = \varphi_{1\min}, \varphi_2^* = \varphi_{2\min}, T^* = T_{\min}$. Иначе траектория данного класса не реализует оптимальной обход.
5. Повторить п. 1–4 для всевозможных комбинаций $s_1 = \{-1; 1\}, \sigma_1 = \{-1; 1\}, s_2 = \{-1; 1\}$.
6. Найти $T_{CSC,CCC,CS}^{**} = \min_{s_1, \sigma_1, s_2} \{T^*\}$ и углы $\varphi_1^{**}(T_{CSC,CCC,CS}^{**}), \varphi_2^{**}(T_{CSC,CCC,CS}^{**})$. \square

Поскольку общее количество возможных классов траекторий зависит от количества перестановок C и S в отдельном классе и равно 2^3 , в ходе этого исследования мы разработали семь других алгоритмов, аналогичных данному, для нахождения оптимальных значений времени обхода трех целевых точек в каждом классе траекторий и определения соответствующих углов прохождения целевых точек, реализующих оптимальный обход.

Далее необходимо найти оптимальное время обхода по всевозможным классам траекторий

$$\begin{aligned} T^{**} &= \min\{T_{CSC,CSC,CS}^{**}, T_{CSC,CSC,CC}^{**}, T_{CCC,CCC,CS}^{**}, T_{CCC,CCC,CC}^{**}, \\ & T_{CSC,CCC,CS}^{**}, T_{CSC,CCC,CC}^{**}, T_{CCC,CSC,CS}^{**}, T_{CCC,CSC,CC}^{**}\}. \end{aligned}$$

Зная T^{**} , соответствующие углы $\varphi_1^{**}(T^{**}), \varphi_2^{**}(T^{**})$ и оптимальное управление, восстанавливаем траекторию оптимального обхода объектом трех целевых точек.

5. Моделирование траекторий в дальней зоне

Для проверки работы построенного алгоритма, который должен реализовывать оптимальный обход целевых точек как в дальней, так и в ближней зоне, можно воспользоваться тем, что в дальней зоне оптимальную траекторию обхода трех целей реализует траектория из класса CSC, CSC, CS . Этот факт был установлен в начале работы.

Пусть заданы декартовы координаты целевых точек как $W_0(0, 0)$, $W_1(4, 3)$, $W_2(1, 6)$, $W_3(-2, 5)$.

Результаты работы алгоритма приведены на рис. 3.

Результатом работы алгоритма 2, как видно из рис. 3, является траектория из класса CSC, CSC, CS , а именно из класса RSL, LSL, LS , что говорит о правильной работе построенного алгоритма. Здесь буквы R, L обозначают левый и правый разворот соответственно. Проверка работы алгоритма 2 в дальней зоне показывает совпадение предельного случая работы алгоритма 2 при большом расстоянии между целевыми точками с работой специального алгоритма из разд. 3 для точек из дальней зоны, основанного на лемме 1.

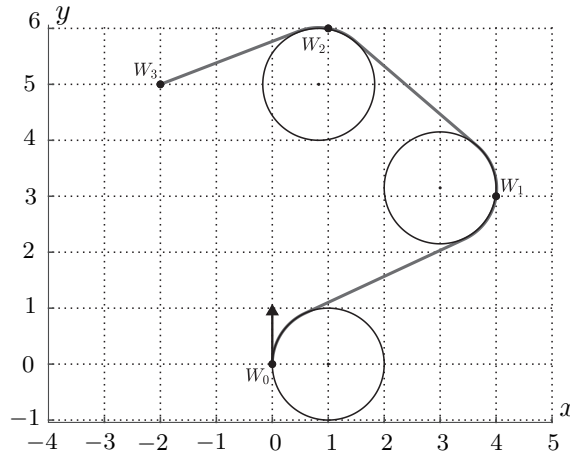


Рис. 3. Оптимальная траектория сближения машины Дубинса с тремя целевыми точками (дальняя зона)

На рис. 4 изображена зависимость $T(\varphi_1, \varphi_2)$ для выбранных W_0, W_1, W_2, W_3 и управления $u_{RSL, LSL, LS}$. Светлой точкой на графиках обозначено минимальное время обхода целевых точек с помощью траектории RSL, LSL, LS . На рис. 5–7 изображены различные проекции поверхности $T(\varphi_1, \varphi_2)$, которые иллюстрируют, что решение, полученное с помощью алгоритма 2 и семи аналогичных разработанных нами алгоритмов, действительно является минимально возможным временем обхода трех целевых точек в дальней зоне. В результате работы алгоритмов найдены оптимальные значения параметров задачи: $T^{**} = 12.8771$, $\varphi_1^{**} = 1.43$, $\varphi_2^{**} = 3.11$.

6. Моделирование траекторий в ближней зоне

Для построения траекторий в ближней зоне зададимся следующими целевыми точками:

$$W_0(0, 0), \quad W_1(1, 3/2), \quad W_2(0, 5/2), \quad W_3(0, 3/2).$$

Воспользуемся всеми разработанными алгоритмами типа 2. Результаты работы алгоритмов приведены на рис. 8. С их помощью найдены оптимальные значения параметров $T^{**} = 7.6275$, $\varphi_1^{**} = 0.38$, $\varphi_2^{**} = 4.75$.

Изменим положение третьей целевой точки. Пусть декартовы координаты точек обхода заданы как

$$W_0(0, 0), \quad W_1(1, 3/2), \quad W_2(0, 5/2), \quad W_3(1, 3). \quad (6.1)$$

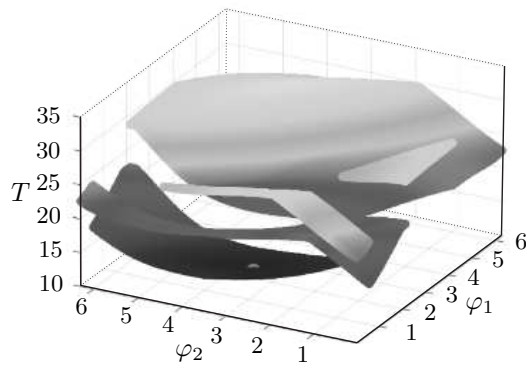


Рис. 4. Зависимость времени сближения T машины Дубинса с тремя целями W_1, W_2, W_3 от параметров φ_1, φ_2 в дальней зоне

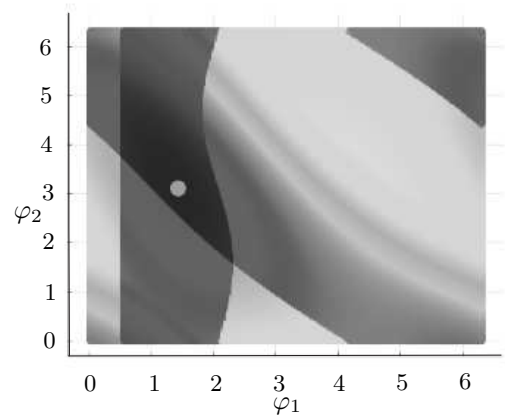


Рис. 5. Зависимость времени сближения T машины Дубинса с тремя целями W_1, W_2, W_3 от параметров φ_1, φ_2 в дальней зоне (вид сверху)

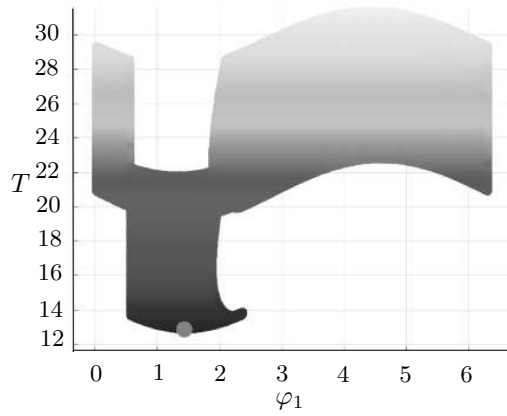


Рис. 6. Зависимость времени сближения T машины Дубинса с тремя целями W_1, W_2, W_3 от параметра φ_1 в дальней зоне

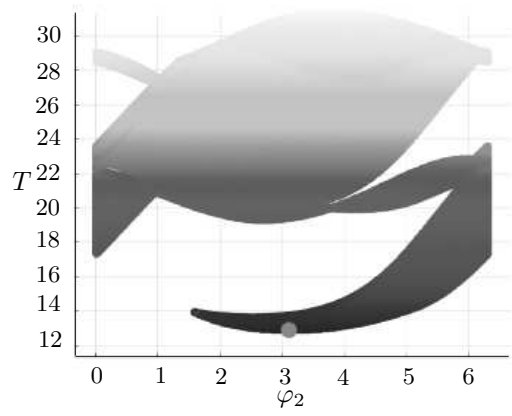


Рис. 7. Зависимость времени сближения T машины Дубинса с тремя целями W_1, W_2, W_3 от параметра φ_2 в дальней зоне

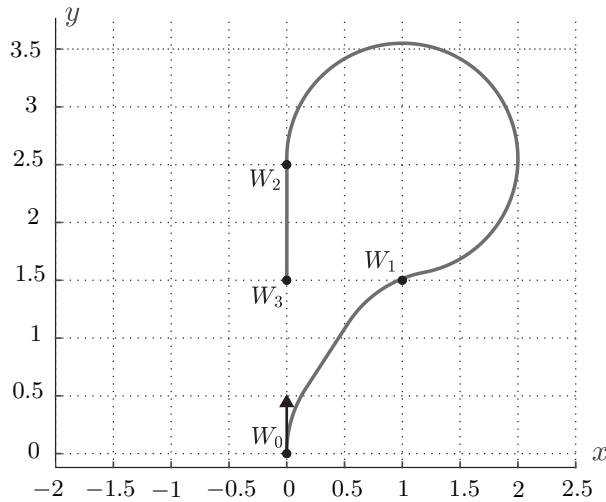


Рис. 8. Оптимальная траектория сближения машины Дубинса с тремя целевыми точками (ближняя зона). Класс: CSC, CCC, CS . Тип: RSR, LRL, RS .

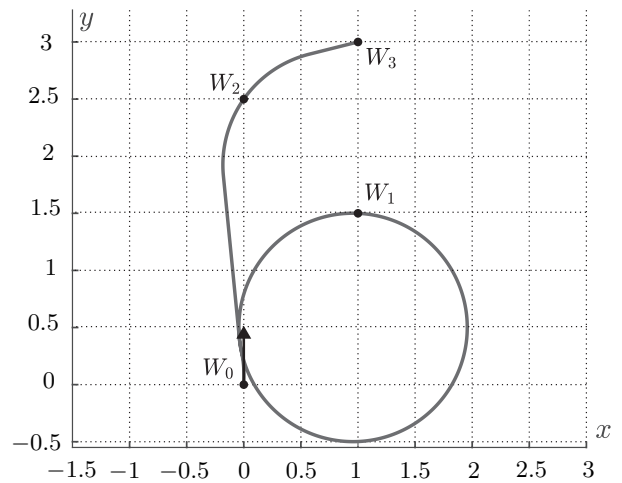


Рис. 9. Оптимальная траектория сближения машины Дубинса с тремя целевыми точками (ближняя зона). Класс: CCC, CSC, CS . Тип: RLR, RSR, RS .

Результаты работы алгоритмов в данном случае приведены на рис. 9; при этом найдены оптимальные значения параметров: $T^{**} = 9.9811$, $\varphi_1^{**} = 6.24$, $\varphi_2^{**} = 0.96$. В соответствии с алгоритмами изменились класс траекторий и тип траектории в классе, реализующий оптимальный обход.

Ниже приводятся оптимальные значения параметров, доставляющих минимум времени сближения машины с тремя точками (6.1) в разных классах траекторий:

$$\begin{aligned}
 & CCC, CSC, CS, \quad RLR, RSR, RS, \quad T^{**} = 9.9811, \quad \varphi_1^{**} = 6.24, \quad \varphi_2^{**} = 0.96; \\
 & CSC, CSC, CS, \quad RSR, RSR, RS, \quad T^{**} = 9.9840, \quad \varphi_1^{**} = 0.01, \quad \varphi_2^{**} = 0.97; \\
 & CCC, CCC, CS, \quad RLR, RLR, RS, \quad T^{**} = 10.0127, \quad \varphi_1^{**} = 6.23, \quad \varphi_2^{**} = 0.94; \\
 & CSC, CCC, CS, \quad RSR, RLR, RS, \quad T^{**} = 10.0168, \quad \varphi_1^{**} = 0.01, \quad \varphi_2^{**} = 0.95.
 \end{aligned}$$

7. Построение границ областей, где меняется последовательность обхода точек

Рассмотрим задачу с нефиксированной очередностью обхода целевых точек. Пусть заданы начальные условия $W_0(0, 0, \pi/2)$, координаты точек W_1, W_3 зафиксированы, а координаты точки W_2 изменяются в каком-либо диапазоне. Также пусть доступны две последовательности обхода целевых точек: W_0, W_1, W_2, W_3 и W_0, W_2, W_1, W_3 . Задача заключается в определении последовательности наискорейшего обхода для всего диапазона изменения координаты точки W_2 .

Пусть $W_1(-2, 3), W_3(2, 1)$. Диапазон изменения координаты точки W_2 зададим следующим образом: $x = -1 : 0.5 : 1, y = 1 : 0.5 : 4$. Будем рассматривать класс траекторий CSC, CSC, CS . Черным цветом на рис. 10 и далее на рис. 11 обозначим точки W_2 , для которых оптимальной последовательностью обхода является W_0, W_1, W_2, W_3 , а серым — соответственно, W_0, W_2, W_1, W_3 .

Сплошной линией на рис. 10 изображена оптимальная траектория обхода в классе CSC, CSC, CS среди всевозможных координат точки W_2 . В данном случае оптимальными являются траектория LSR, RSR, RS и последовательность обхода W_0, W_1, W_2, W_3 . Пунктирной линией изображен пример траектории, для которой оптимальны последовательность обхода W_0, W_2, W_1, W_3 , тип траектории LSL, RSR, RS . Эта траектория не является оптимальной среди всевозможных координат точки W_2 .

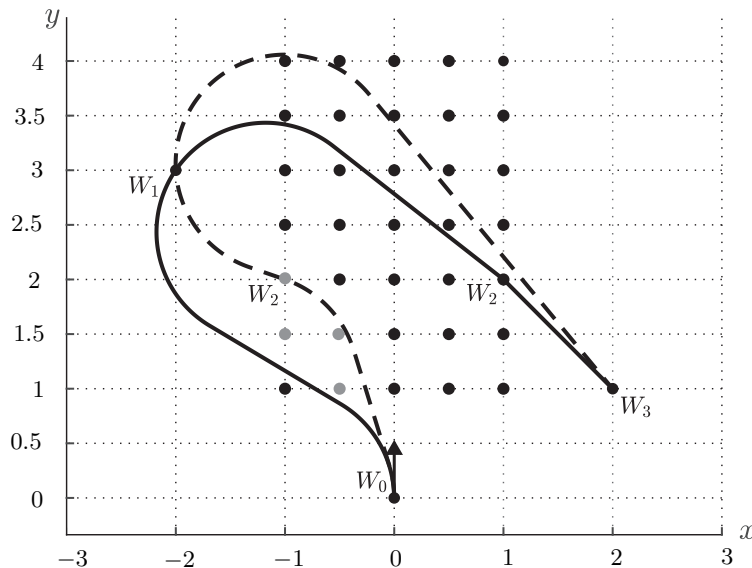


Рис. 10. Множество точек, где меняется последовательность обхода целей

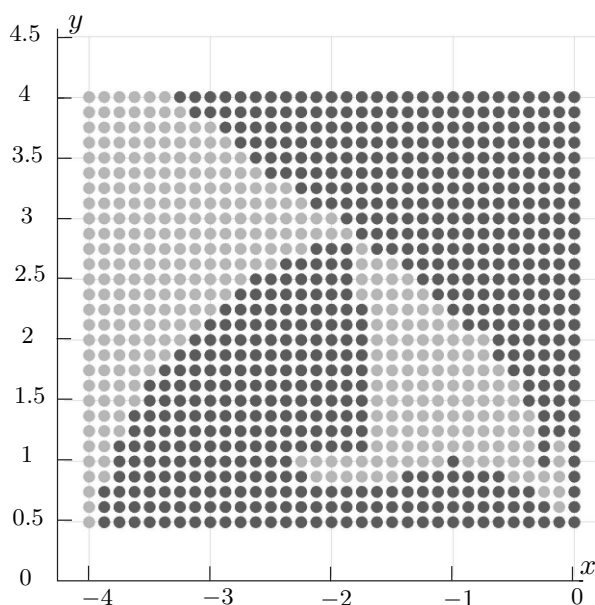


Рис. 11. Область, где меняется последовательность обхода целей в классе CSC, CSC, CS (очередность не зафиксирована).

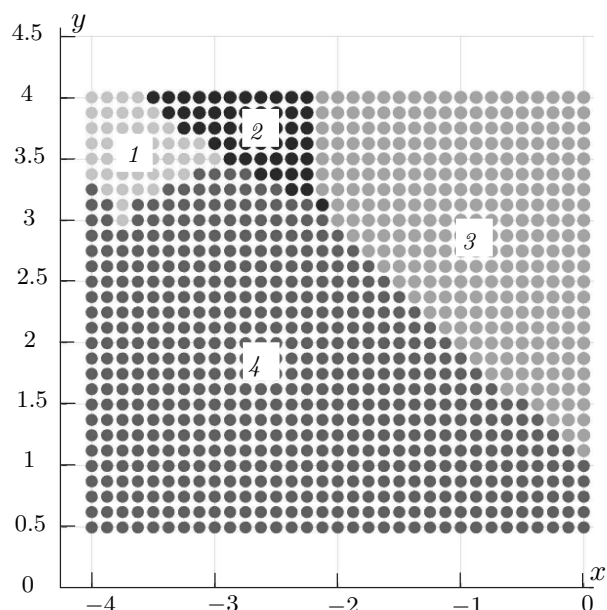


Рис. 12. Область, где меняется тип оптимальной траектории обхода целей при фиксированной очередности W_0, W_1, W_2, W_3 .

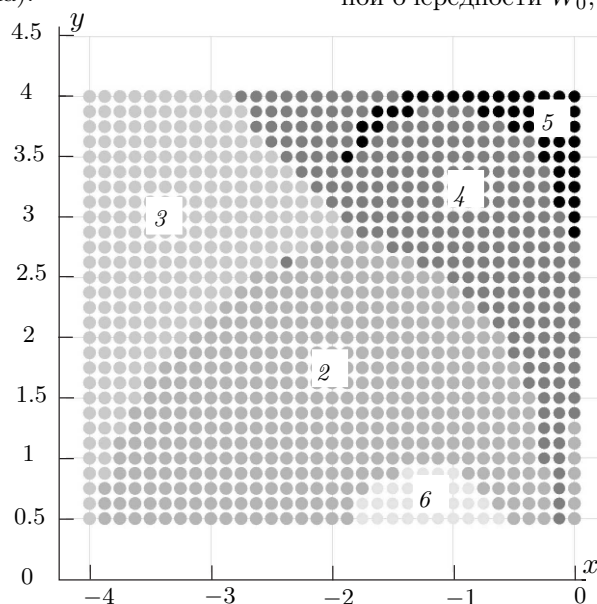


Рис. 13. Область, где меняется тип оптимальной траектории обхода целей при фиксированной очередности W_0, W_2, W_1, W_3 .

Оптимальные значения параметров: $T^{**} = 9.0935$, $\varphi_1^{**} = 0.97$, $\varphi_2^{**} = 5.56$ (траектория, изображенная сплошной линией); $T^{**} = 9.8780$, $\varphi_1^{**} = 2.81$, $\varphi_2^{**} = 1.63$ (траектория, изображенная пунктирной линией).

Рассмотрим более подробно множество точек, для которых оптимальной последовательностью обхода в заданном классе является W_0, W_2, W_1, W_3 . Пусть теперь $x = -4 : 0.125 : 0$, $y = 0.5 : 0.125 : 4$. Полученная область изображена на рис. 11.

Далее построим еще две области в том же диапазоне, что и на рис. 11, но с фиксированной последовательностью обхода точек. На рис. 12 зафиксирована очередность обхода W_0, W_1, W_2, W_3 и разными оттенками серого обозначены точки с различными типами оптимальных траекторий в рассматриваемом классе (соответствующие области пронумерованы). Аналогично на рис. 13 зафиксирована очередность W_0, W_2, W_1, W_3 и пронумерованы области,

соответствующие различным типам оптимальных траекторий в классе.

Сопоставляя рис. 11 и рис. 13, можно заметить, что граница между черной и серой областями (в левом нижнем углу графика) рис. 11 совпадает с границей областей 2 и 3 рис. 13. То есть в этом случае с изменением координаты точки W_2 одновременно изменяются последовательность обхода точек и тип траектории в классе. Также можно сравнить левую верхнюю область рис. 11 и рис. 13. В этом случае сначала изменяется последовательность обхода точек, а потом тип траектории в классе. В этих же областях рис. 11 и рис. 12 можно заметить другой случай: тип траектории в классе изменяется раньше изменения последовательности обхода точек. Кроме того, сопоставив нижнюю область центральной части рис. 11 и рис. 12, получим случай, в котором изменение последовательности обхода точек не ведет к изменению типа траектории в классе.

Подытоживая проведенный выше сравнительный анализ, можно утверждать, что существует четыре возможных взаимосвязи между типом траектории в классе и последовательностью обхода целевых точек:

1. Тип траектории в классе и последовательность обхода точек меняются одновременно.
2. Тип траектории в классе изменяется раньше изменения последовательности обхода точек.
3. Последовательность обхода точек изменяется раньше изменения типа траектории в классе.
4. Изменение последовательности обхода точек не приводит к изменению типа траектории в классе.

Заключение

В рамках исследования получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума и условий выравнивания, явный вид оптимального программного управления исследуемого управляемого объекта, решена задача синтеза оптимального управления. Проведена классификация всевозможных случаев взаимного расположения целевых точек. Разработан алгоритм построения оптимальной траектории в дальней зоне, получены выражения, определяющие вид оптимальной траектории. Выведены аналитические выражения для времени движения от одной точки к другой для различных классов траекторий при произвольных начальных условиях. Для задачи с фиксированной последовательностью обхода разработан алгоритм построения оптимальной траектории обхода трех и двух целевых точек как в дальней, так и в ближней зоне. Всего было разработано четыре алгоритма типа 1 для двух целевых точек и восемь алгоритмов типа 2 для трех целевых точек, которые легко обобщаются на большее количество целевых точек. Проведено сравнение результатов работы алгоритма, основанного на леммах 1, 2, и набора алгоритмов разд. 4, показавшее совпадение синтезированных оптимальных траекторий в дальней зоне. Разработан программный модуль в среде Matlab, поставлены численные эксперименты и найдены решения задачи быстрогодействия для различных случаев взаимного расположения целевых точек. Для задачи с нефиксированной последовательностью обхода построен алгоритм решения и найдены границы областей, где меняется последовательность обхода точек, что проиллюстрировано графически.

Дальнейшие исследования будут связаны с разработкой алгоритма для построения областей смены очередности обхода целевых точек во всех классах траекторий; с решением исходной задачи с условием возвращения управляемого объекта в исходную точку, что может быть использовано, например, в сельскохозяйственных приложениях; а также с решением дополнительной задачи оптимизации по положению целевых точек W_0 и W_3 на заданных кривых в декартовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Дискретно-непрерывная задача маршрутизации с условиями предшествования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 275–292. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-275-292

2. **Тормагов Т.А., Генералов А.А., Шавин М.Ю., Рапопорт Л.Б.** Задачи управления движением автономных колесных роботов в точном земледелии // Гироскопия и навигация. 2022. Т. 30, № 1 (116). С. 39-60. doi: 10.17285/0869-7035.0083
3. **Рогачев Г.Н., Рогачев Н.Г.** Нечеткая оптимизация в задачах планирования перемещений роботизированных складских погрузчиков // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки. 2018. № 1 (57). С. 18–30.
4. **Вагизов М.Р., Хабаров С.П.** Расчет траектории движения БПЛА с учетом требования снижения его скорости в конечной точке // Информация и Космос. 2022. № 1. С. 122–128.
5. **Марков А.А.** Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. мат. общ. Сер. 2. 1889. Т. 1. №2. С. 250–276.
6. **Isaacs R.** Differential games. NY: John Wiley and Sons, 1965. 384 p.
7. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American J. Math. 1957. Vol. 79 (3). P. 497–516. doi: 10.2307/2372560.
8. **Бердышев Ю.И.** О задаче обхода нелинейной управляемой системой третьего порядка двух точек // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. 2. 2003. № 26. С. 24–33.
9. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с.
10. **Бердышев Ю.И.** Задача последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1451–1461.
11. **Chen Z., Shima T.** Shortest Dubins paths through three points // Automatica. 2019. Vol. 105. P. 368–375. doi:10.1016/j.automatica.2019.04.007
12. **Isaiah P., Shima T.** Motion planning algorithms for the Dubins travelling salesperson problem // Automatica. 2015. Vol. 53. P. 247–255. doi:10.1016/j.automatica.2014.12.041
13. **Пацко В.С., Федотов А.А.** Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, №1. С. 182–197. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197
14. **Бузииков М.Э., Галяев А.А.** Алгоритмы вычисления оптимальной траектории перехвата подвижной цели машиной Дубинса // Материалы 14-й Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2021, Дивноморское, Геленджик) / Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону; Таганрог, 2021. Т. 1. С. 73–76.
15. **Vuzikov M.E., Galyaev A.A.** Minimum-time lateral interception of a moving target by a dubins car // Automatica. 2022. Vol. 135. doi: 10.1016/j.automatica.2021.109968
16. **Бузииков М.Э., Галяев А.А.** Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // Автоматика и телемеханика. 2021. № 5. С. 3–19. doi: 10.31857/S0005231021050019
17. **Cockayne E.J., Hal G.W.C.** Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control Optim. 1975. Vol. 13 (1). P. 197–220. doi:10.1137/0313012

Поступила 18.03.2023

После доработки 2.06.2023

Принята к публикации 12.06.2023

Майер Алина Муратовна

математик

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН

г. Москва

e-mail: atuova.a@mail.ru

Галяев Андрей Алексеевич

чл.-корр. РАН, д-р техн. наук

главный науч. сотрудник

Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН

г. Москва

e-mail: galaev@ipu.ru

REFERENCES

1. Chentsov A.G., Chentsov A.A. A discrete-continuous routing problem with precedence constraints. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 56–71. doi: 10.1134/S0081543818020074
2. Tormagov T.A., Generalov A.A., Shavin M.Y., Rapoport L.B. Motion control of autonomous wheeled robots in precision agriculture. *Gyroscopy and Navigation*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 23–35. doi: 10.1134/S2075108722010072
3. Rogachev G.N., Rogachev N.G. Fuzzy optimization in the problems of forklift path planning. *Vestnik Samarskogo Gos. Tekh. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, 2018, vol. 1 (57), pp. 18–30 (in Russian).
4. Vagizov M.R., Khabarov S.P. Calculation of the trajectory of motion of the uav, taking into account the requirement of reducing its speed at the end point. *Inform. i Kosmos*, 2022, no. 1, pp. 122–128 (in Russian).
5. Markov A.A. A few examples of solving a special kind of problems about the largest and smallest quantities. *Soobshcheniya Khar'kov. Mat. Obshchestva, Ser. 2*, 1889, vol. 1, no. 2, pp. 250–276 (in Russian).
6. Isaacs R. *Differential games*. NY, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 978-0471428602. Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igrы*, Moscow, Mir publ., 1967.
7. Dubins L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, p. 497–516. doi: 10.2307/2372560
8. Berdyshev Yu. I. On the problem of touring of two points by a nonlinear control system of third order. *Izvestiya Ural'skogo Gos. Univ. Ser. Mat. i Mekh.*, 2003, vol. 5 (26), pp. 24–33 (in Russian).
9. Berdyshev Yu. I. *Nelineinye zadachi posledovatel'nogo upravleniya i ikh prilozhenie* [Nonlinear sequential control problems and their application]. Yekaterinburg, UrO RAN Publ., 2015, 193 p. ISBN 978-5-8295-0381-9.
10. Berdyshev Yu. I. On the problem of sequential traversal of a set of smooth manifolds by a nonlinear controlled object. *Diff. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 11, pp. 1541–1552. doi: 10.1023/A:1023676619449
11. Chen Z., Shima T. Shortest Dubins paths through three points. *Automatica*, 2019, vol. 105, pp. 368–375. doi: 10.1016/j.automatica.2019.04.007
12. Isaiah P., Shima T. Motion planning algorithms for the Dubins travelling salesperson problem. *Automatica*, 2015, vol. 53, pp. 247–255. doi: 10.1016/j.automatica.2014.12.041
13. Patsko V.S., Fedotov A.A. Analytic description of a reachable set for the Dubins car. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 182–197 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197
14. Buzikov M. E., Galyaev A. A. Algorithms for calculating the optimal trajectory of interception of a moving target by a Dubins car. In: *Proc. XIV All-Russian Multiconference on Control Problems*, Rostov-on-the-Don, South Federal Univ. Publ., 2021, vol. 1, pp. 73–76 (in Russian). ISBN 978-5-9275-3849-2.
15. Buzikov M. E., Galyaev A. A. Minimum-time lateral interception of a moving target by a dubins car. *Automatica*, 2022, vol. 135, article no. 109968. doi: 10.1016/j.automatica.2021.109968
16. Buzikov M. E., Galyaev A. A. Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car. *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 5, pp. 745–758. doi: 10.1134/S0005117921050015
17. Cockayne E.J., Hal G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. doi: 10.1137/0313012

Received March 18, 2023

Revised June 2, 2023

Accepted June 12, 2023

Funding Agency: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-19-00134).

Alina Muratovna Mayer, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia, e-mail: atuova.a@mail.ru.

Andrey Alexeevich Galyaev, Dr. Eng. Sci., Prof., Corresponding Member RAS, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia, e-mail: galaev@ipu.ru.

Cite this article as: A. M. Mayer, A. A. Galyaev. The time-optimal control problem of sequential traversal of several points by a Dubins car. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 42–61.