ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 517.977

ЗАМКНУТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСШИРЕНИЯ

А. Г. Ченцов

Исследуется задача о достижимости в топологическом пространстве (ТП) при ограничениях асимптотического характера (ОАХ), возникающих при ослаблении требования принадлежности образа решения заданному множеству. Возникающее при этом множество притяжения (МП) в ТП является своеобразной регуляризацией образа прообраза упомянутого множества (образ и прообраз определяются для различных, вообще говоря, отображений). При построении естественных компактных расширений задачи о достижимости с ОАХ, порождаемых семейством окрестностей фиксированного множества, исследовался случай, когда ТП, в котором реализуются результаты того или иного выбора решения, удовлетворяет аксиоме T_2. В настоящей работе для ряда положений, связанных с компактными расширениями, удается использовать в упомянутом качестве T_1-пространство, что с теоретической точки зрения представляется достаточно важным, поскольку удается выяснить, в чем же именно состоит роль аксиомы T_2 в вопросах, связанных с корректными расширениями задач о достижимости. Исследуются модели расширений с применением ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства с детализацией основных элементов в случае задачи о достижимости в пространстве функционалов с топологией тихоновской степени вещественной прямой с обычной $|\cdot|$-топологией. Общие конструкции моделей расширения иллюстрируются на примере нелинейной задачи управления с фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: множество притяжения, модель расширения, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Closed mappings and construction of extension models.

The problem of reachability in a topological space is studied under constraints of asymptotic nature arising from weakening the requirement that the image of a solution belong to a given set. The attraction set that arises in this case in the topological space is a regularization of certain kind for the image of the inverse image of the mentioned set (the image and the inverse image are defined for generally different mappings). When constructing natural compact extensions of the reachability problem with constraints of asymptotic nature generated by a family of neighborhoods of a fixed set, the case was studied earlier where the topological space in which the results of one or another choice of solution are realized satisfies the T_2 axiom. In the present paper, for a number of statements related to compact extensions, it is possible to use for this purpose the T_1-space, which seems to be quite important from a theoretical point of view, since it is possible to find out exactly what is the role of the T_2 axiom in questions related to correct extensions of reachability problems. We study models of extensions using ultrafilters of a broadly understood measurable space with detailing of the main elements in the case of a reachability problem in the space of functionals with the topology of the Tikhonov power of the real line with the usual $|\cdot|$-topology. The general constructions of extension models are illustrated by an example of a nonlinear control problem with phase constraints.

Keywords: attraction set, extension model, ultrafilter.

MSC: 05A05, 97N70, 97N80

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-274-295

Введение

Рассматривается задача о достижимости в топологическом пространстве (ТП) при наличии ограничений. Последние задаются в виде требования о принадлежности значений некоторого оператора заданному множеству. Известно, что упомянутая задача не обладает устойчивостью при ослаблении условия, определяемого данным требованием. Такого же рода свойство имеет место во многих задачах математического программирования (см. [1; 2]) и оптимального управления (см. [3, гл. III]), где нередко проявляет себя неустойчивость экстремума при ослаблении ограничений (надо сказать, что при этом экстремум улучшается; 'то делает актуальной задачу оптимизации в условиях приближенного соблюдения ограничений). В теории дифференциальных игр аналогичное явление возникает при использовании стабильных мостов

Н Н. Красовского (см. [4; 5]), порождающих режимы управления с приближенным соблюдением фазовых ограничений в виде сечений упомянутых мостов.

Заметим, что в задачах управления эффекты, связанные с приближенным соблюдением ограничений, удается реализовать, используя подходящее расширение исходной задачи. Так, в [3, гл. III, IV] и в [6] широко использовались управления-меры; в [5] управления-меры или обобщенные управления (ОУ) активно применялись в конструкциях решения дифференциальных игр. При этом возникающее пространство ОУ оказывалось компактным, что очень важно для построения решения, реализующего экстремум в условиях приближенного соблюдения ограничений. Заметим, что система ослабленных условий может рассматриваться как ограничения асимптотического характера (ОАХ). Конечно, ОАХ могут возникать и не в связи с ослаблением каких-либо стандартных ограничений (см. [7; 8]); однако, в настоящей работе мы ограничиваемся все же случаем, когда ОАХ порождаются ослаблением стандартных ограничений. Настоящая работа является логическим продолжением [9], где были введены понятия модели расширения и компактификатора (см. [9, разд. 3, 5]). В частности, в [9, разд. 6] использовалась компактифицируемая модель расширения в сочетании с хаусдорфовыми пространствами (см. [9, условие 6.1]).

В то же время в [10, разд. 3] некоторые положения, связанные с расширениями, удалось установить в предположении о том, что пространство, в котором конструируется основное множество притяжения (МП), удовлетворяет аксиоме T_1; это было сделано в рамках подхода, использующего компактификаторы в общей задаче о достижимости с ОАХ. В то же время модели расширений, используемые в [9, разд. 5, 6] и учитывающие задачи с ослаблением стандартных ограничений, в своем компактифицированном варианте [9, разд. 6], предполагали в аналогичном качестве T_2-пространства, что является менее общим. В настоящей работе показываем, что и в этом случае можно ограничиться использованием T_1-пространств, требуя, однако, замкнутость отображения, являющегося по смыслу непрерывным продолжением целевого оператора задачи. В итоге реализуется более общая, вообще говоря, конструкция.

Второй вопрос, рассматриваемый в статье, относится к возможности построения модели расширения в классе ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП). Здесь уже ТП, используемые в задаче для построения МП и для введения стандартных ограничений, предполагаются регулярными. Построения с использованием у/ф, применяемые ранее в конструкции компактификатора, здесь реализуются для варианта модели расширений в духе [9]. Наряду с общим вариантом процедуры рассматривается случай, когда в качестве пары ТП, определяющих задачу о достижимости с ОАХ, используются тихоновские степени вещественной прямой. Установлена структура МП, определяемого в виде образа прообраза множества, задающего стандартные ограничения, ослабления которых порождают соответствующие ОАХ. При этом имеется в виду, что операции образа и прообраза определяются для разных, вообще говоря, операторов, являющихся параметрами задачи.

Наконец, рассматривается пример, связанный с исследованием задачи о построении области достижимости (ОД) в нелинейной задаче управления с фазовыми ограничениями, для которого указано представление МП в терминах ОД обобщенной задачи.

Настоящий выпуск журнала посвящен Ивану Ивановичу Еремину — выдающемуся ученому-математику, крупному специалисту в области теории экстремальных задач и математического программирования, много сделавшему для развития математической науки и образования на Урале.

1. Общие понятия и обозначения

В работе используется стандартная теоретико-множественная символика с применением (для сокращения формулировок) кванторов и пропозициональных связок; $\exists!$ заменяет фразу “существует и единственно”, $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора.

Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Для любых двух объектов x и y через $\{x;y\}$ обозначается их неупорядоченная пара, т. е. множество со свойствами

$$\big(x \in \{x;y\}\big) \,\&\, \big(y \in \{x;y\}\big) \,\&\, \big((z = x) \vee (z = y) \ \ \forall z \in \{x;y\}\big).$$

Тогда для каждого объекта x в виде $\{x\} \overset{\triangle}{=} \{x;x\}$ имеем синглетон, содержащий x: $x \in \{x\}$. Множества суть объекты. Поэтому для любых объектов α и β, следуя [11, с. 67], обозначаем через (α,β) упорядоченную пару (УП) $(\alpha,\beta) \overset{\triangle}{=} \big\{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\big\}$ с первым элементом α и вторым элементом β.

Через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества S; ясно, что $\mathcal{P}'(S) = \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$. Через $\mathrm{Fin}(S)$ обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств множества S, $\mathrm{Fin}(S) \subset \mathcal{P}'(S)$. Наконец, через B^A обозначаем (см. [11, с. 77]) множество всех отображений, действующих из множества A в множество B; выражения

$$f \in B^A \quad \text{и} \quad f\colon A \to B \tag{1.1}$$

отождествимы, а при $x \in A$ в виде $f(x)$ имеем значение f (1.1) в точке x. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

(образ C при действии f), а $(f \mid C) \in B^C$ есть, по определению, сужение f на C, для которого $(f \mid C)(x) \overset{\triangle}{=} f(x) \ \ \forall x \in C$. Введем в рассмотрение образы и прообразы семейств. Так, если A и B — непустые множества и $f \in B^A$, то

$$\big(f^1[\mathcal{U}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(U)\colon U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))\big)$$

$$\&\, \big(f^{-1}[\mathcal{V}] \overset{\triangle}{=} \{f^{-1}(V)\colon V \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A)) \ \ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))\big).$$

Если $\mathcal{X}$ есть непустое семейство и Y — множество, то $\mathcal{X}|_Y \overset{\triangle}{=} \{X \cap Y\colon X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$ есть след семейства $\mathcal{X}$ на множество Y. Кроме того, для произвольных множества $\mathbb{M}$ и семейства $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ в виде

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

имеем семейство, двойственное к $\mathcal{M}$; в частности, в качестве $\mathcal{M}$ может использоваться топология на $\mathbb{M}$. Если $\mathcal{S}$ — непустое семейство, то полагаем, что

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{S}) \overset{\triangle}{=} \Big\{\bigcap_{S \in \mathcal{K}} S\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{S})\Big\}.$$

Элементы топологии. Если (T,τ) есть ТП и $A \in \mathcal{P}(T)$, тогда

1) через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание A в (T,τ);

2) в виде $\tau|_A$ имеем топологию на A, индуцированную из (T,τ), получая в виде $(A,\tau|_A)$ подпространство (T,τ);

3) при $\mathcal{N}^{\circ}_{\tau}[A] \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ получаем в виде

$$\mathcal{N}_{\tau}[A] \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(T) \mid \exists G \in \mathcal{N}^{\circ}_{\tau}[A]\colon G \subset H\} \tag{1.2}$$

семейство всех окрестностей множества A в (T,τ).

Аналогично 3) вводим окрестности точек в ТП (T,τ): при $x \in T$

$$\mathcal{N}^{\circ}_{\tau}(x) \overset{\triangle}{=} \mathcal{N}^{\circ}_{\tau}[\{x\}] = \{G \in \tau \mid x \in G\};$$

$$\mathcal{N}_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{N}_\tau[\{x\}] = \{H \in \mathcal{P}(T) \mid \exists G \in \mathcal{N}^\circ_\tau(x)\colon G \subset H\}.$$

Далее, для всякого ТП (T, τ) через $(\tau - \mathrm{comp})[T]$ обозначаем семейство всех компактных (см. [12, с. 196]) в (T, τ) подмножеств T. Как обычно, компактное T_2-пространство называем *компактом* (в определении аксиом отделимости ТП следуем [12, разд. 1.5]).

Если (U, τ_1), $U \neq \varnothing$, и (V, τ_2), $V \neq \varnothing$, — два ТП, то полагаем тогда

1') $C(U, \tau_1, V, \tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in V^U \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$,

2') $C_{\mathrm{cl}}(U, \tau_1, V, \tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in C(U, \tau_1, V, \tau_2) \mid f^1[\mathbf{C}_U[\tau_1]] \subset \mathbf{C}_V[\tau_2]\} = \{f \in V^U \mid f^1(\mathrm{cl}(A, \tau_1)) = \mathrm{cl}(f^1(A), \tau_2)\ \forall A \in \mathcal{P}(U)\}$,

3') $C_{\mathbf{ap}}(U, \tau_1, V, \tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in C_{\mathrm{cl}}(U, \tau_1, V, \tau_2) \mid f^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1 - \mathrm{comp})[U]\ \ \forall y \in V\}$.

Итак, определены в 1') непрерывные, в 2') замкнутые и в 3') почти совершенные (см. [12, с. 287]) отображения.

Направленные семейства и базы фильтров. Если H — непустое множество, то в виде

$$\beta[H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)) \mid \forall H_1 \in \mathcal{H}\ \ \forall H_2 \in \mathcal{H}\ \ \exists H_3 \in \mathcal{H}\colon H_3 \subset H_1 \cap H_2\}$$

имеем семейство всех непустых направленных подсемейств $\mathcal{P}(H)$,

$$\beta_0[H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta[H] \mid \varnothing \notin \mathcal{B}\} \tag{1.3}$$

есть семейство всех баз фильтров (БФ) множества H.

Числовые множества. Всюду в дальнейшем $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая; при $n \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{1, n} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — множествами <u>не</u> являются. С учетом этого для всяких непустого множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение H^n для множества всех отображений (кортежей) из $\overline{1, n}$ в H.

2. Множества притяжения (общие конструкции)

Фиксируем далее непустое множество E, называя его элементы обычными решениями (в задачах теории управления — обычными управлениями). Введем МП в произвольном ТП (X, τ), $X \neq \varnothing$, полагая сначала при $f \in X^E$ и $\mathcal{B} \in \beta[E]$, что

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{cl}\big(f^1(B), \tau\big), \tag{2.1}$$

и получая замкнутое в (X, τ) множество. Заметим здесь же, что

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \in \beta[E] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{2.2}$$

С учетом (2.1) и (2.2) полагаем теперь, что для произвольных ТП (X, τ), $X \neq \varnothing$, семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и отображения $f \in X^E$

$$(\mathrm{as})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})]. \tag{2.3}$$

Называем (2.3) МП; данное определение эквивалентно используемому в [9, разд. 3].

Предложение 1. *Если (X, τ), $X \neq \varnothing$, есть* ТП, *$f \in X^E$ и $\mathcal{B} \in \beta[E]$, то*

$$(\mathrm{as})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]. \tag{2.4}$$

Доказательство. Фиксируем (X,τ), f и $\mathcal{B}$ в соответствии с условиями. Тогда $\mathcal{B} \subset \{\cap\}_\sharp(\mathcal{B})$, а потому (см. (2.1), (2.3))

$$(\mathrm{as})[E;X;\tau;f;\mathcal{B}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\{\cap\}_\sharp(\mathcal{B})] \subset (\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{B}]. \tag{2.5}$$

С другой стороны, по индукции проверяется, что (см. [13, (3.3.16)]) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall (B_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{B}^m\ \exists B \in \mathcal{B}$:

$$B \subset \bigcap_{i=1}^{m} B_i.$$

Это свойство означает, что $\forall H \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{B})\ \exists B \in \mathcal{B}$:

$$\mathrm{cl}(f^1(B),\tau) \subset \mathrm{cl}(f^1(H),\tau)$$

(учитываем свойства изотонности операторов замыкания и построения образа); как следствие (см. (2.1))

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{B}] \subset \mathrm{cl}(f^1(S),\tau) \quad \forall S \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{B}). \tag{2.6}$$

Исходя из (2.1), (2.3) и (2.6), получаем теперь свойство

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{B}] \subset (\mathrm{as})[E;X;\tau;f;\mathcal{B}].$$

С учетом (2.5) получаем требуемое равенство (2.4). □

В дальнейшем символ "$\circ$" используется при обозначении композиции отображений. Напомним теперь полезное общее свойство (см. [9, предложение 3.1]): если (X,τ), $X \neq \varnothing$, и $(K,\mathbf{t})$, $K \neq \varnothing$, — два ТП, $m \in K^E$, $g \in C_{\mathbf{ap}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\mathrm{as})[E;X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}] = g^1((\mathrm{as})[E;K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}]). \tag{2.7}$$

Заметим, что представления типа (2.7) оказываются особенно полезными в случае, когда $(K,\mathbf{t})$ является компактным ТП. В этой связи напомним (см. [10, теорема 1]): если (X,τ), $X \neq \varnothing$, есть T_1-пространство, $(K,\mathbf{t})$, $K \neq \varnothing$, — компактное ТП, $m \in K^E$, $g \in C_{\mathrm{cl}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то справедливо (2.7). Этот факт в совокупности с общим случаем (2.7) показывает, что использование в конструкциях расширений отображений g со свойствами замкнутости и почти совершенности позволяет реализовать представление типа равенства (2.7) при "минимальных" предположениях относительно остальных параметров задачи о достижимости с ОАХ. Здесь полезно напомнить простое свойство, отмеченное в [10, с. 578]: если (Y,τ_1), $Y \neq \varnothing$, и (Z,τ_2), $Z \neq \varnothing$, — это ТП, $m \in Y^E$ и $g \in C_{\mathrm{cl}}(Y,\tau_1,Z,\tau_2)$, то

$$\mathrm{cl}((g\circ m)^1(A),\tau_2) = g^1(\mathrm{cl}(m^1(A),\tau_1)) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

3. Компактифицируемая модель расширения и замкнутые отображения

Далее рассматриваем абстрактную задачу о достижимости со стандартными ограничениями и ОАХ, связанными с ослаблением упомянутых стандартных ограничений.

Фиксируем далее два ТП: $(\mathbf{H},\tau)$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, и $(\mathbf{X},\theta)$, $\mathbf{X} \neq \varnothing$. Будем предполагать в настоящем разделе, что $(\mathbf{H},\tau)$ есть T_1-пространство. Фиксируем отображения

$$(\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E)\,\&\,(\mathbf{s} \in \mathbf{X}^E). \tag{3.1}$$

Пусть, наконец, $Y \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ есть множество, определяющее ограничение на выбор $x \in E$ в виде условия $\mathbf{s}(x) \in Y$. Рассматриваем вопрос о том, какие элементы $\mathbf{H}$ могут быть реализованы в виде $\mathbf{h}(x)$ при условии, что $x \in E$ обладает свойством $\mathbf{s}(x) \in Y$. Такие элементы $\mathbf{H}$ называем достижимыми в обычном смысле. Легко видеть, что

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \tag{3.2}$$

есть множество всех таких элементов $\mathbf{H}$. Полагаем, что условие $\mathbf{s}(x) \in Y$ (на выбор $x \in E$) может ослабляться до требования $\mathbf{s}(x) \in S$, где S — окрестность Y из наперед заданного семейства $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{N}_\theta[Y]$. Итак, фиксируем

$$\mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{N}_\theta[Y]) \tag{3.3}$$

в качестве набора допустимых окрестностей Y. При каждом $\mathbb{Y} \in \mathcal{Y}$ определено множество

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y})) \in \mathcal{P}(\mathbf{H}),$$

содержащее $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$ (см. (3.2)).

З а м е ч а н и е. Разумеется, в качестве $\mathcal{Y}$ может использоваться все семейство $\mathcal{N}_\theta[Y]$. Но в ряде случаев (см. [9, замечание 5.1]) это не вполне естественно. Например, когда топология θ порождается метрикой, логичным представляется использование метрических ε-окрестностей, где $\varepsilon > 0$.

Возвращаясь к общему случаю (3.3), будем предполагать далее в этом разделе выполненным следующее условие $\mathcal{Y}$-регулярности (см. [9, (5.4)]):

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus Y \quad \exists U_1 \in \mathcal{N}_\theta(x) \quad \exists U_2 \in \mathcal{Y}\colon \;\; U_1 \cap U_2 = \varnothing. \tag{3.4}$$

Итак, полагаем, что множество Y и семейство $\mathcal{Y}$ удовлетворяют условию (3.4). В целях полноты изложения отметим следующее очевидное положение.

Предложение 2. *Множество Y замкнуто в* ТП $(\mathbf{X}, \theta)$: $Y \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}[\theta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.4) имеем, что

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus Y \quad \exists G \in \mathcal{N}_\theta^\circ(x)\colon \;\; G \subset \mathbf{X} \setminus Y.$$

Отсюда $\mathbf{X} \setminus Y \in \mathcal{N}_\theta(z)$ $\forall z \in \mathbf{X} \setminus Y$. Тогда (см. [14, гл. I, §1, предложение 1]) $\mathbf{X} \setminus Y \in \theta$, а потому

$$Y = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{X} \setminus Y) \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}[\theta]. \qquad \square$$

Теорема 1. *Если $(K, \mathbf{t})$, $K \neq \varnothing$, есть компактное* ТП, *$p \in K^E$, $q \in C_{\mathrm{cl}}(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$ и $r \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{X}, \theta)$, причем*

$$(K = \mathrm{cl}(p^1(E), \mathbf{t}))\,\&\,(\mathbf{h} = q \circ p)\,\&\,(\mathbf{s} = r \circ p), \tag{3.5}$$

то $(\mathrm{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]] = q^1(r^{-1}(Y))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ является моделью расширения для триплетов $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$ в смысле [9, разд. 5]. Для этого достаточно в силу (3.5) установить, что

$$q \in C_{\mathbf{ap}}(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau). \tag{3.6}$$

Итак, пусть $z \in \mathbf{H}$. Поскольку ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ удовлетворяет аксиоме T_1, то $\{z\} \in \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tau]$ (см. [12, с. 70]), и, коль скоро, в частности, $q \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$, имеем свойство замкнутого прообраза:

$$q^{-1}(\{z\}) \in \mathbf{C}_K[\mathbf{t}]. \tag{3.7}$$

В силу компактности ТП $(K, \mathbf{t})$ и (3.7) получаем (см. [12, теорема 3.1.2]), что

$$q^{-1}(\{z\}) \in (\mathbf{t} - \mathrm{comp})[K]. \tag{3.8}$$

С учетом (3.8) и замкнутости q имеем (см. 3') в разд. 1), поскольку выбор z был произвольным, требуемое свойство (3.6). Осталось воспользоваться свойством [9, теорема 5.1]. $\square$

Установленная теорема существенно обобщает утверждение [9, теорема 6.1]. При этом отображения q и r, используемые в теореме 1, реализуют естественную операцию "улучшения" отображений $\mathbf{h}$ и $\mathbf{s}$ соответственно, имеющую смысл замены

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \to q^1(r^{-1}(Y)),$$

где в правой части реализуется искомое МП $(\mathrm{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]]$.

4. Компактифицируемая модель расширения с использованием ультрафильтров

В настоящем разделе исследуем один более конкретный вариант модели расширения, связанный с применением ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП). Здесь будет рассматриваться не самый общий случай в смысле свойств ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ и $(\mathbf{X}, \theta)$, однако он представляется полезным с точки зрения вопроса определения конкретной структуры и возможных вариантов отображений p, q и r в теореме 1.

Прежде всего введем в рассмотрение π-систему (см. [15, с. 14]) $\mathcal{L}$ с "нулем" и "единицей" на множестве E. Итак, пусть $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и при этом

$$(\varnothing \in \mathcal{L})\,\&\,(E \in \mathcal{L})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{L}\ \ \forall A \in \mathcal{L}\ \ \forall B \in \mathcal{L}).$$

Будем предполагать выполненным следующее свойство отделимости $\mathcal{L}$:

$$\forall L \in \mathcal{L} \quad \forall x \in E \setminus L \quad \exists \Lambda \in \mathcal{L}\colon \ \ (x \in \Lambda)\,\&\,(\Lambda \cap L = \varnothing)$$

(разумеется, в качестве $\mathcal{L}$ может использоваться алгебра или полуалгебра подмножеств E; см. [16, гл. I]).

Рассматриваем $(E, \mathcal{L})$ в качестве широко понимаемого ИП. В виде

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F}) \\ \&\,(\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F}))\big\}\end{gathered} \tag{4.1}$$

имеем (непустое) множество всех фильтров на ИП $(E, \mathcal{L})$. Кроме того, в виде

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\big\}$$

имеем множество всех у/ф на ИП $(E, \mathcal{L})$. При $x \in E$

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$$

есть тривиальный у/ф, соответствующий x (напомним, что предполагаем π-систему $\mathcal{L}$-отделимой). Далее, при $L \in \mathcal{L}$ полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\}.$$

Тогда семейство $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{L}\}$ есть (открытая) база топологии

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G}\ \ \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{G}\big\}$$

на непустом множестве $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Получающееся ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \tag{4.2}$$

стоуновского типа является нульмерным (см. [12, разд. 6.2]) и удовлетворяет аксиоме T_2, т. е. является хаусдорфовым (если $\mathcal{L}$ — алгебра или полуалгебра множеств, то (4.2) — компакт). Введем при $A \in \mathcal{P}(E)$ множество $\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}$. Тогда при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$\hat{\mathbf{F}}_0^*[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \ \forall U \in \mathcal{U}\big\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid \Sigma] \tag{4.3}$$

(см. [17, §3]). Важно отметить, что при $A \in \mathcal{P}(E)$ согласно [17, предложение 1]

$$\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A] = \mathrm{cl}\big(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \colon x \in A\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big). \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, в частности, что справедливо равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}\big(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \colon x \in E\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\big), \tag{4.5}$$

означающее, что E погружается в ТП (4.2) в виде всюду плотного множества.

Далее понадобится понятие сходимости фильтров и БФ в произвольном ТП. Итак, пусть S — произвольное непустое множество. На S определено следующее (непустое) множество фильтров:

$$\mathfrak{F}[S] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(S)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})$$
$$\&\, (\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall G \in \mathcal{P}(S)\ \ (F \subset G) \Rightarrow (G \in \mathcal{F}))\big\}.$$

Тогда (см. (1.3)) имеем с очевидностью, что при $\mathcal{B} \in \beta_0[S]$

$$(S - \mathrm{fi})[\mathcal{B}] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathbf{S} \in \mathcal{P}(S) \mid \exists B \in \mathcal{B} \colon B \subset \mathbf{S}\big\} \in \mathcal{F}[S].$$

Пусть теперь t — топология на S; тогда (S, t) есть ТП. Напомним, что при $\mathcal{B} \in \beta_0[S]$ и $s \in S$

$$\big(\mathcal{B} \overset{t}{\Longrightarrow} s\big) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\mathcal{N}_t(s) \subset (S - \mathrm{fi})[\mathcal{B}]\big); \tag{4.6}$$

в (4.6) введена (см. [14, гл. I]) сходимость БФ. Отметим, что при $f \in S^E$ и $\tilde{\mathcal{B}} \in \beta_0[E]$ непременно $f^1[\tilde{\mathcal{B}}] \in \beta_0[S]$; данная БФ может использоваться в (4.6) вместо $\mathcal{B}$. Кроме того, имеем очевидное свойство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, что позволяет при $f \in S^E$ рассматривать БФ $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[S]$, где $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; это позволяет применить (4.6) при $\mathcal{B} = f^1[\mathcal{U}]$.

Допустим теперь, что (S, t) есть T_2-пространство. Напомним, что (см. [17, §5])

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t] &\overset{\triangle}{=} \big\{f \in S^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \exists s \in S \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{t}{\Longrightarrow} s\big\} \\ &= \big\{f \in S^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \exists! s \in S \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{t}{\Longrightarrow} s\big\} \in \mathcal{P}'(S^E).\end{aligned} \tag{4.7}$$

С каждой функцией из множества (4.7) связываем оператор предела по у/ф (см. [17, (5.2)]): если $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t]$, то

$$\varphi_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t; f] \in S^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \tag{4.8}$$

определяем следующим (вытекающим из (4.7)) правилом: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то значение

$$\varphi_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t; f](\mathcal{U}) \in S$$

таково, что

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{t}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t; f](\mathcal{U}) \tag{4.9}$$

(определение (4.8), (4.9) будем использовать при различных вариантах триплета (S, t, f)). Напомним теперь (см. [17, (5.5)]): если (S, t) — регулярное ТП (T_1- и T_3-пространство одновременно) и $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t]$, то

$$\varphi_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t; f] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], S, t) \tag{4.10}$$

(напомним, что регулярное ТП является T_2-пространством); если к тому же (4.2) является компактным ТП, то (см. [12, теорема 3.1.12])

$$\varphi_{\lim}[E; \mathcal{L}; S; t; f] \in C_{\mathrm{cl}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], S, t) \tag{4.11}$$

(более того, в этом случае $\varphi_{\lim}[E;\mathcal{L};S;t;f] \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], S, t)$; см. [18, (2.8.7)]).

С учетом (4.8)–(4.11) вернемся к рассмотрению задачи о достижимости при ОАХ, полученных ослаблением стандартного ограничения с использованием окрестностей формирующего эти ограничения множества.

Итак, пусть $(\mathbf{H}, \tau)$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, и $(\mathbf{X}, \theta)$, $\mathbf{X} \neq \varnothing$, суть регулярные ТП, т. е. T_1- и T_3-пространства каждое. Будем полагать в дальнейшем, что $\mathcal{L}$ есть полуалгебра множеств: $\mathcal{L}$ есть π-система на E с "нулем" и "единицей" и при этом

$$\begin{gathered}\forall L \in \mathcal{L} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n\colon \ \Big(E \setminus L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i\Big) \\ \& \ \big(L_\mu \cap L_\nu = \varnothing \ \ \forall \mu \in \overline{1,n} \ \ \forall \nu \in \overline{1,n} \setminus \{\mu\}\big)\end{gathered} \tag{4.12}$$

(разумеется, в качестве $\mathcal{L}$ может использоваться алгебра множеств). Итак, $(E, \mathcal{L})$ есть далее ИП с полуалгеброй множеств. Заметим, что в этом случае в виде (4.2) имеем непустой компакт (см. [19, разд. 4]).

Изменим здесь обозначения отображений в (3.1), а также их улучшенных версий, появляющихся в модели расширений. Итак, пусть далее до конца раздела фиксированы отображения

$$\big(q \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]\big) \ \& \ \big(r \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{X};\theta]\big). \tag{4.13}$$

Тогда согласно (4.11) получаем, что

$$\begin{gathered}\big(\mathbf{q} \overset{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau;q] \in C_{\mathrm{cl}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau)\big) \\ \& \ \big(\mathbf{r} \overset{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{X};\theta;r] \in C_{\mathrm{cl}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{X}, \theta)\big).\end{gathered} \tag{4.14}$$

Теорема 2. *Если* $Y \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}[\theta]$, *то* $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(Y))$ *определяет* МП *в задаче о достижимости с* ОАХ, *определяемыми семейством* $r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]$:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(Y)) = (\mathrm{as})[E;\mathbf{H};\tau;q;r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]]. \tag{4.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Y \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}[\theta]$. Будем использовать теорему 1. Прежде всего напомним, что в силу регулярности $(\mathbf{X}, \theta)$

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus Y \quad \exists U_1 \in \mathcal{N}_\theta(x) \quad \exists U_2 \in \mathcal{N}_\theta[Y]\colon \ \ U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

Итак, мы имеем вариант (3.4) при условии $\mathcal{Y} = \mathcal{N}_\theta[Y]$. Далее, напомним, что в силу (4.13), (4.14) и [17, (5.6)]

$$\big(q = \mathbf{q} \circ (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]\big) \ \& \ \big(r = \mathbf{r} \circ (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]\big),$$

где $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \overset{\triangle}{=} ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E$. В этой связи полагаем в данном доказательстве $p \overset{\triangle}{=} (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]$, получая следующие два равенства:

$$\big(q = \mathbf{q} \circ p\big) \ \& \ \big(r = \mathbf{r} \circ p\big). \tag{4.16}$$

Здесь необходимо отметить, что согласно (4.5)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(p^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]).$$

Итак, мы имеем непустой компакт (4.2), оператор погружения $p \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E$ и замкнутые отображения (4.14) со свойством (4.16). Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 при соответствующих переобозначениях, а потому справедливо (4.15). $\square$

Зафиксируем множество $Y \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}[\theta]$ до конца статьи.

Следует подчеркнуть, что в теореме 2 существенно использовалось (4.13). К вопросу о реализации (4.13) в случае задачи с ОАХ, определяемыми посредством системы ярусных функций, вернемся несколько позднее, а сейчас рассмотрим связь представлений вида (4.15) с аналогичными представлениями, реализуемыми посредством компактификаторов (см. [20, §3]). В данной связи заметим, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot], \mathbf{q}) \tag{4.17}$$

есть компактификатор в смысле [20, §3]; при этом $(\mathbf{H}, \tau, q)$ — фиксированный триплет параметров. Поскольку, в частности, $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_2-пространство, имеем из (4.16) и [20, (3.2)], что

$$(\mathrm{as})\big[E; \mathbf{H}; \tau; q; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = \mathbf{q}^1\big((\mathrm{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]]\big). \tag{4.18}$$

Полезно вспомнить, что $\mathcal{N}_\theta[Y] \in \beta[\mathbf{X}]$. Поэтому (см. предложение 1) $r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]] \in \beta[E]$ и

$$(\mathrm{as})\big[E; \mathbf{H}; \tau; q; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = (\mathrm{AS})\big[E; \mathbf{H}; \tau; q; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big], \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{as})\big[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big]\\ &= (\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big].\end{aligned} \tag{4.20}$$

Свойства (4.19), (4.20) позволяют применять для исследования МП представления вида (2.1). Далее отметим, что в силу (4.3) и [17, предложение 3]

$$(\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = \hat{\mathbf{F}}_0^*\big[\mathcal{L} \mid r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big]. \tag{4.21}$$

Поэтому (см. (4.18)–(4.21)) получаем следующее равенство:

$$(\mathrm{as})\big[E; \mathbf{H}; \tau; q; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = \mathbf{q}^1\big(\hat{\mathbf{F}}_0^*[\mathcal{L} \mid r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]]\big). \tag{4.22}$$

Итак (см. (4.15), (4.22)), мы имеем два представления основного МП (4.19) в терминах образа при действии отображения $\mathbf{q}$.

Предложение 3. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{r}^{-1}(Y) = \hat{\mathbf{F}}_0^*\big[\mathcal{L} \mid r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big]. \tag{4.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть $\mathcal{U}_* \in \mathbf{r}^{-1}(Y)$, т. е. $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathbf{r}(\mathcal{U}_*) \in Y$. Выберем произвольно $U \in r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]$, после чего подберем $V \in \mathcal{N}_\theta[Y]$ со свойством

$$U = r^{-1}(V). \tag{4.24}$$

Далее, с учетом (1.2), (4.24) подберем $V_0 \in \mathcal{N}_\theta^0[Y]$ со свойством $V_0 \subset V$. В силу (4.14) $\mathbf{r}^{-1}(V_0) \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$, причем

$$\mathbf{r}^{-1}(Y) \subset \mathbf{r}^{-1}(V_0) \subset \mathbf{r}^{-1}(V).$$

Тогда по выбору $\mathcal{U}_*$ имеем, что $\mathcal{U}_* \in \mathbf{r}^{-1}(V_0)$, а потому

$$\mathbf{r}^{-1}(V_0) \in \mathcal{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathcal{U}_*).$$

Выберем произвольно $\mathbb{G}_* \in \mathcal{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathcal{U}_*)$, получая при этом

$$\mathbb{G}_0 \overset{\triangle}{=} \mathbb{G}_* \cap \mathbf{r}^{-1}(V_0) \in \mathcal{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathcal{U}_*). \tag{4.25}$$

Тогда в силу (4.5) и (4.25) реализуется свойство

$$\mathbb{G}_0 \cap \{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \colon x \in E\} \neq \varnothing.$$

С учетом этого подберем $e_0 \in E$ так, что при этом

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[e_0] \in \mathbb{G}_0. \tag{4.26}$$

Тогда согласно (4.25) $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[e_0] \in \mathbf{r}^{-1}(V_0)$, а значит, $r(e_0) = (\mathbf{r} \circ (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot])(e_0) \in V_0$; имеем здесь аналог (4.16). Тем более, $r(e_0) \in V$, а потому (см. (4.24)) $e_0 \in U$ и, как следствие,

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[e_0] \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(U).$$

Однако в силу (4.25), (4.26) справедливо теперь $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[e_0] \in \mathbb{G}_* \cap (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(U)$. Поскольку выбор $\mathbb{G}_*$ был произвольным, установлено свойство

$$G \cap (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(U) \neq \varnothing \quad \forall G \in \mathcal{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}(\mathcal{U}_*).$$

Получили включение $\mathcal{U}_* \in \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(U), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$. Выбор U также был произвольным, отсюда имеем, что

$$\mathcal{U}_* \in \bigcap_{\Sigma \in r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]} \mathrm{cl}\big((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big).$$

С учетом (2.1) получаем, что $\mathcal{U}_* \in (\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]]$. Установлено, что

$$\mathbf{r}^{-1}(Y) \subset (\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big]. \tag{4.27}$$

Пусть теперь $\mathcal{U}^* \in (\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]]$. Тогда (см. (4.3), (4.21)) $\mathcal{U}^* \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом $\mathbf{r}(\mathcal{U}^*) \in \mathbf{X}$ (см. (4.14)). Покажем, что

$$\mathbf{r}(\mathcal{U}^*) \in Y. \tag{4.28}$$

В самом деле, допустим противное: пусть

$$\mathbf{r}(\mathcal{U}^*) \in \mathbf{X} \setminus Y. \tag{4.29}$$

Поскольку Y — замкнутое множество в регулярном ТП $(\mathbf{X}, \theta)$, то для некоторых окрестностей

$$\big(\mathbb{H}_1 \in \mathcal{N}_\theta(\mathbf{r}(\mathcal{U}^*))\big) \,\&\, \big(\mathbb{H}_2 \in \mathcal{N}_\theta[Y]\big)$$

справедливо следующее свойство:

$$\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 = \varnothing. \tag{4.30}$$

При этом $W \overset{\triangle}{=} r^{-1}(\mathbb{H}_2) \in r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]$, а тогда (см. (2.1)) имеем вложение

$$(\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] \subset \mathrm{cl}\big(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] : x \in W\}, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big). \tag{4.31}$$

Заметим, однако, что $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(W) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$, а потому, как легко видеть,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(W) &= (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(r^{-1}(\mathbb{H}_2)) = (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1\big((\mathbf{r} \circ (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot])^{-1}(\mathbb{H}_2)\big)\\ &= (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1\big((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^{-1}(\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_2))\big) \subset \mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_2)\end{aligned}$$

(здесь использовали представление, подобное второму равенству в (4.16)). Поэтому (см. (4.31))

$$(\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] \subset \mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_2), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big).$$

По выбору $\mathcal{U}^*$ получаем, как следствие, включение

$$\mathcal{U}^* \in \mathrm{cl}\big(\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_2), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]\big). \tag{4.32}$$

Подберем $\mathbb{H}_1^0 \in \mathcal{N}_\theta^0(\mathbf{r}(\mathcal{U}^*))$ так, что $\mathbb{H}_1^0 \subset \mathbb{H}_1$. Тогда в силу (4.14)

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_1^0) \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E].$$

Кроме того, по выбору $\mathbb{H}_1^0$ имеем, что $\mathbf{r}(\mathcal{U}^*) \in \mathbb{H}_1^0$, а тогда $\mathcal{U}^* \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_1^0)$. В итоге

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_1^0) \in \mathcal{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathcal{U}^*),$$

а отсюда с учетом (4.32) получаем свойство

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_1^0) \cap \mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_2) \neq \varnothing$$

и, следовательно, $\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{H}_1^0 \cap \mathbb{H}_2) \neq \varnothing$. Последнее означает, что $\mathbb{H}_1^0 \cap \mathbb{H}_1 \neq \varnothing$; это невозможно ввиду (4.30), так как $\mathbb{H}_1^0 \cap \mathbb{H}_2 \subset \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$. Полученное противоречие показывает, что (4.29) невозможно, а, стало быть, имеет место (4.28), откуда вытекает включение $\mathcal{U}^* \in \mathbf{r}^{-1}(Y)$. Тем самым установлено, что

$$(\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] \subset \mathbf{r}^{-1}(Y).$$

Согласно (4.27) получаем следующее равенство:

$$(\mathrm{AS})\big[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = \mathbf{r}^{-1}(Y),$$

из которого в силу (4.21) вытекает (4.23). □

Из теоремы 2 и предложения 3 имеем (в рассматриваемом случае $Y \in \mathbf{C}_{\mathbf{X}}[\theta]$), что

$$(\mathrm{as})\big[E; \mathbf{H}; \tau; q; r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = \mathbf{q}^1\big(\mathbf{r}^{-1}(Y)\big) = \mathbf{q}^1\big(\hat{\mathbf{F}}_0^*\big[\mathcal{L} \mid r^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big]\big). \tag{4.33}$$

Из (4.33) следует, что в рассматриваемом случае ОАХ общие конструкции на основе компактификаторов с использованием у/ф и моделей расширения в духе [9] приводят к одному и тому же результату.

5. Множества притяжения в тихоновских произведениях

В настоящем разделе мы рассмотрим один вариант общей конструкции предыдущего раздела, для которого удается указать класс задач, допускающих реализацию (4.13) (по-прежнему ориентируемся здесь на построение моделей расширения с применением у/ф). Напомним, что в наших построениях $\mathcal{L}$ есть полуалгебра подмножеств E (см. (4.12)), а $(E, \mathcal{L})$ — непустое ИП с полуалгеброй множеств.

При $H \in \mathcal{P}(E)$ полагаем, что $\chi_H \in \mathbb{R}^E$ есть индикатор H, т. е.

$$\big(\chi_H(x) \triangleq 1 \;\; \forall x \in H\big) \,\&\, \big(\chi_H(\tilde{x}) \triangleq 0 \;\; \forall \tilde{x} \in E \setminus H\big). \tag{5.1}$$

В качестве H в (5.1) могут использоваться множества из $\mathcal{L}$. Оснащая $\mathbb{R}^E$ линейными операциями, определяемыми поточечно, введем линейную оболочку $B_0(E, \mathcal{L})$ множества $\{\chi_L \colon L \in \mathcal{L}\}$. В этой связи напомним, что при $m \in \mathbb{N}$, $(f_i)_{i \in \overline{1,m}} \in (\mathbb{R}^E)^m$ и $(\alpha_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$ реализуется (поточечно определяемая) линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i\, f_i \triangleq \Big(\sum_{i=1}^m \alpha_i\, f_i(x)\Big)_{x \in E} \in \mathbb{R}^E.$$

Тогда $B_0(E, \mathcal{L})$ определяется в следующем виде:

$$B_0(E, \mathcal{L}) \triangleq \Big\{f \in \mathbb{R}^E \mid \exists n \in \mathbb{N} \;\; \exists (\alpha_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n \;\; \exists (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \colon f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \chi_{L_i}\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{B}(E)),$$

где $\mathbb{B}(E) \triangleq \{f \in \mathbb{R}^E \mid \exists c \in [0,\infty[: |f(x)| \leqslant c \ \forall x \in E\}$ — множество всех ограниченных вещественнозначных (в/з) функций на E. Через $B(E,\mathcal{L})$ обозначим замыкание $B_0(E,\mathcal{L})$ в топологии sup-нормы линейного пространства $\mathbb{B}(E)$ (см. [21, §2.7]), получая (в оснащении сужением данной sup-нормы) банахово пространство, для которого топологическое сопряженное изометрически изоморфно пространству в/з конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$, имеющих каждая ограниченную вариацию (в виде $B(E,\mathcal{L})$ имеем аналог пространства $B(S,\Sigma)$; см. [22, гл. IV]; если $\mathcal{L}$ есть σ-алгебра множеств, то $B(E,\mathcal{L})$ — множество всех в/з ограниченных $\mathcal{L}$-измеримых функций на E). Функции из $B(E,\mathcal{L})$ называем *ярусными*. С учетом [23, (10.8.30)] легко проверяется, что

$$\forall f \in B(E,\mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \exists!\, c \in \mathbb{R} \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\Longrightarrow} c, \tag{5.2}$$

где $\tau_{\mathbb{R}}$ — обычная $|\cdot|$-топология на $\mathbb{R}$. Исходя из (5.2) сопоставляем каждой функции $f \in B(E,\mathcal{L})$ функционал $\lambda[f] \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ по правилу

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\Longrightarrow} \lambda[f](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.3}$$

Вернемся к определению $\mathbf{H}$ и $\mathbf{X}$. Для этого фиксируем непустые множества Γ_1 и Γ_2. Полагаем далее в настоящем разделе, что

$$\big(\mathbf{H} \triangleq \mathbb{R}^{\Gamma_1}\big) \,\&\, \big(\mathbf{X} \triangleq \mathbb{R}^{\Gamma_2}\big). \tag{5.4}$$

Итак, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{X}$ — множества функционалов на Γ_1 и Γ_2 соответственно. Топологии τ и θ определяем посредством тихоновских степеней $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ при использовании Γ_1 и Γ_2 в качестве индексных множеств (имеются в виду тихоновские произведения экземпляров $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$). Иными словами, $(\mathbf{H},\tau)$ есть множество $\mathbb{R}^{\Gamma_1}$ с топологией поточечной сходимости, а $(\mathbf{X},\theta)$ — $\mathbb{R}^{\Gamma_2}$ с аналогичной топологией. Каждое из упомянутых ТП регулярно (см. [12, теорема 2.3.11]). Заметим, что при $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma \in \Gamma_1$

$$f(\cdot)(\gamma) \triangleq \big(f(x)(\gamma)\big)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E.$$

Аналогичным образом имеем при $g \in \mathbf{X}^E$ и $\gamma \in \Gamma_2$, что

$$g(\cdot)(\gamma) \triangleq \big(g(x)(\gamma)\big)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E.$$

Фиксируем теперь два набора ярусных функций:

$$\big((u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1} \in B(E,\mathcal{L})^{\Gamma_1}\big) \,\&\, \big((v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_2} \in B(E,\mathcal{L})^{\Gamma_2}\big). \tag{5.5}$$

С учетом (5.4) и (5.5) полагаем в дальнейшем, что q есть отображение

$$x \mapsto (u_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma_1} \colon E \to \mathbf{H}; \tag{5.6}$$

кроме того, полагаем в дальнейшем, что r есть отображение

$$x \mapsto (v_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma_2} \colon E \to \mathbf{X}. \tag{5.7}$$

Итак, $q \in \mathbf{H}^E$ и $r \in \mathbf{X}^E$. Заметим, что

$$\big(q(\cdot)(\gamma) = u_\gamma \ \ \forall \gamma \in \Gamma_1\big) \,\&\, \big(r(\cdot)(\gamma) = v_\gamma \ \ \forall \gamma \in \Gamma_2). \tag{5.8}$$

Поэтому (см. (5.5), (5.8)) определены функционалы

$$\big(\lambda[q(\cdot)(\gamma)] = \lambda[u_\gamma] \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \ \ \forall \gamma \in \Gamma_1\big) \,\&\, \big(\lambda[r(\cdot)(\gamma)] = \lambda[v_\gamma] \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \ \ \forall \gamma \in \Gamma_2\big). \tag{5.9}$$

Полагаем теперь, что $\mathbf{q}$ есть отображение

$$\mathcal{U} \mapsto \big(\lambda[u_\gamma](\mathcal{U})\big)_{\gamma\in\Gamma_1} \colon \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \to \mathbf{H}; \tag{5.10}$$

аналогичным образом определяем $\mathbf{r}$ как отображение

$$\mathcal{U} \mapsto \big(\lambda[v_\gamma](\mathcal{U})\big)_{\gamma\in\Gamma_2} : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \to \mathbf{X}. \tag{5.11}$$

В (5.10) и (5.11) используем (5.4). С учетом (5.3) получаем, что при $\gamma \in \Gamma_1$

$$(u_\gamma)^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \lambda[u_\gamma](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});$$

аналогичным образом при $\tilde{\gamma} \in \Gamma_2$ имеем сходимость

$$(v_{\tilde{\gamma}})^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \lambda[v_{\tilde{\gamma}}](\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Как следствие получаем, используя (5.8), (5.9), что при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$\big(q(\cdot)(\gamma)^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \lambda[q(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}) \ \ \forall \gamma \in \Gamma_1\big) \,\&\, \big(r(\cdot)(\tilde{\gamma})^1[\mathcal{U}] \overset{\tau_\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \lambda[r(\cdot)(\tilde{\gamma})](\mathcal{U}) \ \ \forall \tilde{\gamma} \in \Gamma_2\big); \tag{5.12}$$

с учетом [24, предложение 6.3] и определения топологий τ и θ имеем теперь (см. (5.12)), что

$$\big(q^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} (\lambda[q(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma_1}\big) \,\&\, \big(\mathbf{r}^1[\mathcal{U}] \overset{\theta}{\Longrightarrow} (\lambda[r(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma_2}\big). \tag{5.13}$$

Это означает в силу (4.7), что справедливо (4.13). Итак, посредством (5.6) и (5.7) определены отображения (4.13), которые могут теперь рассматриваться как системы ярусных функций. Заметим, что наши построения, приводящие здесь к (4.13), извлекаются как частный случай из построений [24, разд. 6], где рассматривались ярусные отображения со значениями в полном метрическом пространстве. В данном случае ограничиваемся представлениями для в/з ярусных функций.

Напомним, что Y — замкнутое множество в ТП $(\mathbf{X}, \theta)$, являющемся тихоновской степенью $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$. Согласно теореме 2 (см. (4.15)) ключевую роль в вопросе построения МП играет множество $\mathbf{r}^{-1}(Y)$; в предложении 3 указано полезное представление этого множества. С другой стороны, теперь можно указать (см. (5.13)) представления для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$. В самом деле, из (4.1), (4.14), (5.9) и (5.13) имеем согласно (4.13), что $\mathbf{q}$ есть отображение

$$\mathcal{U} \mapsto \big(\lambda[u_\gamma](\mathcal{U})\big)_{\gamma\in\Gamma_1} : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \to \mathbf{H}, \tag{5.14}$$

а $\mathbf{r}$ является отображением

$$\mathcal{U} \mapsto \big(\lambda[v_\gamma](\mathcal{U})\big)_{\gamma\in\Gamma_2} : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \to \mathbf{X}.$$

В итоге получаем следующее равенство:

$$\mathbf{r}^{-1}(Y) = \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid (\lambda[v_\gamma](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma_2} \in Y\big\}. \tag{5.15}$$

Исходя из (5.14) и (5.15) получаем представление множества $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(Y))$:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(Y)) = \big\{(\lambda[u_\gamma](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma_1} : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\ (\lambda[v_\gamma](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma_2} \in Y\big\}. \tag{5.16}$$

В связи с (5.16) отметим пример в [24, разд. 7] (случай пространства-стрелки). В следующем разделе рассмотрим пример, когда ограничения, задаваемые первоначально без привлечения топологических конструкций, могут быть сведены к варианту, используемому в (3.2) и последующих построениях.

6. Задачи управления

Рассмотрим сначала простейшую скалярную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2, \tag{6.1}$$

где $x(0) = 0$ фиксировано, $|u(t)| \equiv 1$. Будем полагать здесь для простоты, что возможные управляющие функции (программные управления) $u(\cdot) = (u(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2)$ суть кусочно-постоянные, непрерывные справа и непрерывные слева в точке 2 в/з функции на отрезке $[0,2]$ со свойством $|u(t)| \equiv 1$. Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество всех таких (обычных) программных управлений. Полагаем заданными фазовые ограничения (ФО)

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]. \tag{6.2}$$

Нас будет интересовать область достижимости (ОД; см. [25; 26]) системы (6.1) в момент $t = 2$, т. е. множество всех состояний $x(2)$, которые можно достичь в момент $t = 2$, соблюдая ФО (6.2) и используя при этом управления $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$. Ясно, что данная ОД есть пустое множество, поскольку соблюдение ФО (6.2) на траекториях, порождаемых управлениями $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$, невозможно.

Ситуация, впрочем, кардинально меняется в случае, когда при $\varepsilon > 0$ ФО (6.2) заменены условиями

$$|x(t)| \leqslant \varepsilon \quad \forall t \in [0,1]. \tag{6.3}$$

Здесь “скачком” возникает множество, близкое к $[-1,1]$, в качестве новой ОД. Легко видеть, что $[-1,1]$ как раз и является МП в нашей задаче о достижимости.

Сейчас, однако, сосредоточимся на вопросе преобразования к виду, рассматриваемому в разд. 3. Для этого сначала каждому управлению $u(\cdot) = (u(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2) \in \mathfrak{U}$ сопоставим траекторию $\mathbf{x}[u(\cdot)]$ на отрезке $[0,2]$:

$$\mathbf{x}[u(\cdot)](t) \stackrel{\triangle}{=} \int\limits_0^t u(\xi)\,d\xi \quad \forall t \in [0,2]. \tag{6.4}$$

Полагаем в данном примере $\mathbf{H} = \mathbb{R}$ и $\tau = \tau_{\mathbb{R}}$; в качестве $\mathbf{X}$ используем множество $C([0,1])$ всех непрерывных в/з функций на $[0,1]$, а в качестве θ — (метризуемую) топологию равномерной сходимости на $\mathbf{X} = C([0,1])$. Полагаем при этом, что $E = \mathfrak{U}$, а $\mathbf{h}$ есть (см. (6.4)) функционал

$$u(\cdot) \mapsto \mathbf{x}[u(\cdot)](2) \colon \mathfrak{U} \to \mathbb{R},$$

получая, что $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Наконец, $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^E$ определяем (в примере) правилом

$$u(\cdot) \mapsto \big(\mathbf{x}[u(\cdot)] \mid [0,1]\big) \colon \mathfrak{U} \to C([0,1]),$$

получая $\mathbf{s}(u(\cdot)) = (\mathbf{x}[u(\cdot)] \mid [0,1])$ при $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$. Итак, определены триплеты $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$. Считаем, что $\mathbf{O} \in C([0,1])$ есть функция, тождественно равная нулю, и $Y = \{\mathbf{O}\}$ (синглетон). Тогда ФО (6.2) сводятся к требованию

$$\mathbf{s}(u(\cdot)) = \big(\mathbf{x}[u(\cdot)] \mid [0,1]\big) \in Y.$$

Ясно, что в нашем случае $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) = \varnothing$, поскольку $\mathbf{s}^{-1}(Y) = \varnothing$.

Переходя к построению ОАХ, заметим, что замкнутые ε-окрестности $\mathbf{O}$, $\varepsilon > 0$, образуют базу окрестностей Y. Поэтому в качестве $\mathcal{Y}$ могут эквивалентным образом использоваться и семейство всех вышеупомянутых ε-окрестностей, $\varepsilon > 0$, и все семейство

$$\mathcal{N}_\theta[Y] = \mathcal{N}_\theta[\{\mathbf{O}\}] = \mathcal{N}_\theta(\mathbf{O}) \tag{6.5}$$

окрестностей Y. Остановимся сейчас на последнем варианте. Легко видеть, что $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]] \in \beta[E]$ и, в нашем случае,

$$(\mathrm{as})\big[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{N}_\theta[Y]]\big] = [-1, 1]. \tag{6.6}$$

Итак, естественный в теории управления вариант постановки, восходящей к [3, гл. III], допускает эквивалентную реализацию в виде задачи о достижимости с "топологическими" ОАХ.

Конструкция, намеченная в примере, естественным образом распространяется на общий случай нелинейных задач управления, в которых важную роль играют обобщенные управления (ОУ), формализуемые посредством мерозначных функций или мер на произведении конечномерных компактов (см. [5; 6] и др.). Мы рассмотрим данную конструкцию применительно к теореме 1, используя содержательный способ изложения. Речь пойдет о построении и исследовании ОД нелинейной управляемой системы, удовлетворяющей условиям, подобным условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности траекторий, используемым А. В. Кряжимским в задачах теории дифференциальных игр (см. [27]). Будем рассматривать постановку с нестационарными ФО. При этом достаточное внимание будет уделено модели расширения в классе управлений-мер или ОУ.

Итак, фиксируем $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства, невырожденный отрезок $I \overset{\triangle}{=} [t_0, \vartheta_0]$ ($t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta_0$), непустой компакт P в $\mathbb{R}^{\mathbf{k}}$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$, а также непрерывную функцию

$$f \colon I \times \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n.$$

Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в качестве начального состояния и рассматриваем в качестве обычных (программных) управлений борелевские функции $u(\cdot) = (u(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_0)$, действующие из I в P. Множество всех таких обычных управлений обозначаем далее через $\mathfrak{U}$. Полагаем, что каждому обычному управлению $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$ сопоставляется единственная траектория $\mathbf{x}[u(\cdot)] \in C_n(I)$ системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P, \tag{6.7}$$

где $C_n(I)$ — множество всех непрерывных функций из I в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\mathbf{x}[u(\cdot)](t_0) = x_0$. Далее $\mathbf{x}[u(\cdot)]$ используется только для обозначения траекторий системы (6.7). Отметим, что $\mathbf{x}[u(\cdot)]$, где $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$, — решение уравнения

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{[\,t_0, t\,[} f(\xi, x(\xi), u(\xi))\,\mathbf{l}(d\xi) \quad \forall t \in I;$$

здесь $\mathbf{l}$ — сужение меры Лебега на σ-алгебру борелевских подмножеств I. Полагая, что $\mathcal{F}_n$ есть семейство всех непустых замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$, фиксируем отображение

$$t \mapsto N_t \colon I \to \mathcal{F}_n. \tag{6.8}$$

Значения (6.8) определяют ФО; нас интересует ОД $G_\partial \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{x}[u(\cdot)](\vartheta_0) \colon u(\cdot) \in \mathfrak{U}_\partial\}$, где

$$\mathfrak{U}_\partial \overset{\triangle}{=} \big\{u(\cdot) \in \mathfrak{U} \mid \mathbf{x}[u(\cdot)](t) \in N_t \ \ \forall t \in I\big\}.$$

Итак, рассматриваем нестационарные ФО вида

$$\mathbf{x}[u(\cdot)](t) \in N_t \quad \forall t \in I. \tag{6.9}$$

Известно уже, что при ослаблении ФО (6.9) возможны скачки ОД в сторону расширения (см. (6.6)). С практической точки зрения логично трактовать ослабление ФО как замену (6.9) требованием о реализации траекторий в ε-окрестностях множеств N_t, $t \in I$, где $\varepsilon > 0$. Таким образом, полагаем при $t \in I$ и $\varepsilon \in]\,0, \infty\,[$, что $N_t^{(\varepsilon)}$ есть замкнутая ε-окрестность N_t в смысле евклидовой нормы $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим релаксацию (6.9), требуя при $\varepsilon > 0$ выполнения условий

$$\mathbf{x}[u(\cdot)](t) \in N_t^{(\varepsilon)} \quad \forall t \in I.$$

При этом G_∂ заменяется аналогичной ОД $G_\partial^{(\varepsilon)}$. Предел $G_\partial^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ реализуется в виде МП типа (2.1) при естественной конкретизации параметров. Нас будет интересовать также представление данного МП подобно используемому в теореме 1. Итак, будем рассматривать задачу об исследовании ОД системы (6.7) с ОАХ, порождаемыми релаксацией ФО (6.9), как пример, развивающий конструкции, связанные с (6.1)–(6.6).

Условимся, что множество E в последующем изложении есть $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(P^I)\colon E = \mathfrak{U}$. Полагаем, что $\mathbf{H} = \mathbb{R}^n$, а τ — обычная топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$; пусть в дальнейшем $\mathbf{X} = C_n(I)$, а θ — (метризуемая) топология равномерной сходимости на $C_n(I)$. При определении конкретных вариантов отображений (3.1) будут задействованы обычные траектории $\mathbf{x}[u(\cdot)]$, $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$; а именно $\mathbf{h}$ отождествляем с вектор-функционалом

$$u(\cdot) \mapsto \mathbf{x}[u(\cdot)](\vartheta_0)\colon \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$$

и $\mathbf{s}$ — с оператором вида

$$u(\cdot) \mapsto \mathbf{x}[u(\cdot)]\colon \mathfrak{U} \to C_n(I);$$

условия на систему (6.7), доставляющие корректное определение $\mathbf{x}[u(\cdot)]$, оговорим позднее в связи с описанием ОУ (будем использовать условия обобщенной единственности и равномерной ограниченности обобщенных траекторий, подобные применяемым А. В. Кряжимским в [27] в задачах теории дифференциальных игр). Множество Y конкретизируем в виде

$$Y \overset{\triangle}{=} \bigl\{x(\cdot) \in C_n(I) \mid x(t) \in N_t \ \ \forall t \in I\bigr\} = C_n(I) \cap \Bigl(\prod_{t \in I} N_t\Bigr). \tag{6.10}$$

Полагаем, что $Y \neq \varnothing$. Тогда $G_\partial = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$. Семейство $\mathcal{Y}$ определим позднее, а сейчас введем аналогичное семейство, связанное с вышеупомянутой релаксацией ФО, отвечающих отображению (6.8). Итак,

$$\mathbf{N}_\varepsilon \overset{\triangle}{=} \bigl\{u(\cdot) \in \mathfrak{U} \mid \mathbf{x}[u(\cdot)](t) \in N_t^{(\varepsilon)} \ \ \forall t \in I\bigr\} \tag{6.11}$$

при $\varepsilon \in]\,0, \infty\,[$ отвечает естественной релаксации ФО, а семейство

$$\mathfrak{N} \overset{\triangle}{=} \bigl\{\mathbf{N}_\varepsilon \colon \varepsilon \in]\,0, \infty\,[\bigr\} \in \beta[E] \tag{6.12}$$

есть обычно используемый вариант ОАХ. Теперь (см. (2.4)) определено МП в $\mathbb{R}^n$ в виде $(\mathrm{AS})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{N}] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим, кроме того, ОАХ, подобное применяемому в теореме 1. Для этого прежде всего введем семейство $\mathcal{Y}$.

Пусть при $\varepsilon \in]\,0, \infty\,[$ через $\mathbb{Y}_\varepsilon$ обозначается замкнутая ε-окрестность Y, отвечающая метрике равномерной сходимости пространства $C_n(I)$ при евклидовом оснащении $\mathbb{R}^n$. Тогда имеем

$$\mathcal{Y} \overset{\triangle}{=} \bigl\{\mathbb{Y}_\varepsilon \colon \varepsilon \in]\,0, \infty\,[\bigr\} \in \beta[E]. \tag{6.13}$$

Заметим, что поскольку $(\mathbf{X}, \theta)$ метризуется той же самой метрикой, то условие (3.4) выполнено. Получаем МП $(\mathrm{AS})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]] \in \mathcal{F}_n$. Связь двух вышеупомянутых МП будет установлена после введения ОУ и соответствующей модели расширения.

Заметим, что хорошо известны эффективно проверяемые условия на систему (6.7), гарантирующие существование и единственность траекторий $\mathbf{x}[u(\cdot)]$, $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$ (см., в частности, [3–6] и др.). Однако, приступая к построению модели расширения (см. [9, разд. 5]), целесообразно "привязать" сами условия на систему к процедуре расширения. Для этого сейчас введем предельно кратко ОУ в духе конструкций, реализующих компактификатор в смысле [20, §3]. Это потребует введения некоторых понятий теории меры (см. [22, гл. III, IV]).

Итак, пусть $\mathcal{K}$ есть σ-алгебра борелевских п/м компакта $I \times P$, а $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$ — множество всех вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных мер на $\mathcal{K}$ с конусом

$$(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}] \overset{\triangle}{=} \bigl\{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}] \mid 0 \leqslant \mu(L) \ \ \forall L \in \mathcal{K}\bigr\}.$$

Заметим, что все меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}]$, а стало быть и из $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, регулярны (см. [28, гл. 1]), что легко проверяется с учетом разложения Хана. Используем теорему Рисса об общем виде линейного функционала (см. [22, гл. IV]). Полагаем, что $\mathcal{I}$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств I; ясно (см. [28, добавление II]), что $\Gamma \times P \in \mathcal{K}$ при $\Gamma \in \mathcal{I}$. Полагаем далее, что

$$K \overset{\triangle}{=} \big\{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}] \mid \mu(\Gamma \times P) = \mathbf{l}(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{I}\big\}, \tag{6.14}$$

где, как уже отмечалось, $\mathbf{l}$ — след меры Лебега на $\mathcal{I}$; $K \neq \varnothing$. Меры из K будем называть ОУ. Само множество K сильно ограничено и $*$-слабо замкнуто; по теореме Алаоглу (см. [22, гл. IV, разд. 4]) оно компактно, а следовательно, полагая, что $\mathbf{t}$ — (относительная) $*$-слабая топология K, получаем непустой компакт $(K, \mathbf{t})$, элементами которого являются ОУ. С учетом теоремы Рисса (см. [22, гл. IV, разд. 6]) каждому обычному управлению $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_0) \in \mathfrak{U}$ сопоставляется единственное ОУ $\mu^0_{\bar{u}(\cdot)} \in K$, для которого

$$\int\limits_I g(t, \bar{u}(t))\,\mathbf{l}\,(dt) = \int\limits_{I \times P} g(t, u)\,\mu^0_{\bar{u}(\cdot)}\,(d(t,u)) \quad \forall g \in C(I \times P), \tag{6.15}$$

где $C(I \times P)$ — множество всех непрерывных в/з функций на $I \times P$. Отображение $\bar{u}(\cdot) \mapsto \mu^0_{\bar{u}(\cdot)} \colon \mathfrak{U} \to K$ обозначим сейчас через p; при этом

$$K = \mathrm{cl}(p^1(\mathfrak{U}), \mathbf{t}) = \mathrm{cl}(p^1(E), \mathbf{t}) \tag{6.16}$$

(данное свойство (6.16) подобно [3, гл. IV, теорема 3.10]).

Теперь мы сопоставим каждому ОУ $\mu \in K$ интегральную воронку

$$\Phi_\mu \overset{\triangle}{=} \Big\{x(\cdot) \in C_n(I) \mid x(t) = x_0 + \int\limits_{[\,t_0, t\,[\, \times P} f(\xi, x(\xi), u)\,\mu\,(d(\xi, u)) \ \ \forall t \in I\Big\};$$

будем считать, что при $\mu \in K$ данная интегральная воронка Φ_μ всякий раз одноэлементна: $\Phi_\mu = \{\varphi_\mu\}$, где $\varphi_\mu \in C_n(I)$. Кроме того, полагаем, что множество $\{\varphi_\mu \colon \mu \in K\}$ ограничено в норме равномерной сходимости пространства $C_n(I)$; само $\mathbb{R}^n$ оснащаем при этом евклидовой нормой. Таким образом, определено отображение

$$\mu \mapsto \varphi_\mu \colon K \to C_n(I), \tag{6.17}$$

которое обозначим сейчас через r (напомним, что в нашем построении $\mathbf{X} = C_n(I)$). Подобно [27] устанавливается, что (6.17) есть непрерывное отображение: $r \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{X}, \theta)$. Тогда, как следствие, непрерывно и, более того, замкнуто отображение

$$\mu \mapsto \varphi_\mu(\vartheta_0) \colon K \to \mathbb{R}^n,$$

обозначаемое далее через q: $q \in C_{\mathrm{cl}}(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$. В силу (6.15) имеем, конечно, при $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$ в виде $\mathbf{x}[u(\cdot)]$ функцию φ_μ, где $\mu = \mu^0_{u(\cdot)}$. В принципе, это свойство можно принять в качестве определения $\mathbf{x}[u(\cdot)]$, где $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$. Заметим, что упомянутое свойство приводит к следующему равенству:

$$\mathbf{s} = r \circ p.$$

Соответственно, имеем при $u(\cdot) \in \mathfrak{U}$, что $\mathbf{x}[u(\cdot)](\vartheta_0) = \varphi_\mu(\vartheta_0)$, где $\mu = \mu^0_{u(\cdot)}$. Поэтому

$$\mathbf{h} = q \circ p.$$

Таким образом, построен кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$, удовлетворяющий (3.5); уже отмечалось, что условие (3.4) в рассматриваемом случае также выполнено. Тогда согласно теореме 1

$$(\mathrm{as})\big[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]\big] = q^1(r^{-1}(Y)). \tag{6.18}$$

Данное равенство имеет смысл связать с МП $(\mathrm{AS})[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathfrak{N}]$. Для этого заметим прежде всего, что при $\varepsilon\in]0,\infty[$ и $y(\cdot)\in\mathbb{Y}_\varepsilon$ непременно $y(t)\in N_t^{(\varepsilon)}$ $\forall t\in I$; отсюда для $u(\cdot)\in\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\varepsilon)$ безусловно имеем (см. (6.11)) $u(\cdot)\in\mathbf{N}_\varepsilon$, т.е. $\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\varepsilon)\subset\mathbf{N}_\varepsilon$. Итак, получаем, что (см. (6.12), (6.13))

$$\forall A\in\mathfrak{N}\quad\exists B\in\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]:\ \ B\subset A. \tag{6.19}$$

Проверим справедливость противоположного свойства. Покажем, что

$$\forall A\in\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]\quad\exists B\in\mathfrak{N}:\ \ B\subset A. \tag{6.20}$$

В самом деле, допустим противное: пусть

$$\exists A\in\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]:\ B\setminus A\neq\varnothing\quad\forall B\in\mathfrak{N}. \tag{6.21}$$

Пусть (см. (6.13), (6.21)) $\kappa\in]0,\infty[$ таково, что

$$B\setminus\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\kappa)\neq\varnothing\quad\forall B\in\mathfrak{N}.$$

Тогда (см. (6.12)) $\mathbf{N}_{\frac{1}{k}}\setminus\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\kappa)\neq\varnothing$ $\forall k\in\mathbb{N}$, а потому

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}\big(\mathbf{N}_{\frac{1}{k}}\setminus\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\kappa)\big)\neq\varnothing.$$

С учетом этого выберем последовательность

$$(u_k(\cdot))_{k\in\mathbf{N}}\in\prod_{k\in\mathbb{N}}\big(\mathbf{N}_{\frac{1}{k}}\setminus\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\kappa)\big),$$

получая последовательность в $\mathfrak{U}$ со свойством

$$u_l(\cdot)\in\mathbf{N}_{\frac{1}{l}}\setminus\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{Y}_\kappa)\quad\forall l\in\mathbb{N}. \tag{6.22}$$

Пусть $\mu_k\triangleq\mu^0_{u_k(\cdot)}$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Тогда $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$. Напомним, что (см. (6.14)) поскольку $C(I\times P)$ сепарабельно, то $(K,\mathbf{t})$ — метризуемый компакт (см. [22, гл. V, разд. 5, теорема 1]) и, следовательно, секвенциальный компакт (см. [18, (2.7.25)]). Отсюда $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ обладает $*$-слабо сходящейся подпоследовательностью $(\mu_{\chi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, где $\chi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ таково, что $\chi(\nu)<\chi(\nu+1)$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$. Тогда, кстати, $k\leqslant\chi(k)$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Поэтому (см. (6.22))

$$u_{\chi(k)}\in\mathbf{N}_{\frac{1}{k}}\quad\forall k\in\mathbb{N}.$$

Пусть $\mu^*\in K$ есть предел $(\mu_{\chi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ в смысле топологии $\mathbf{t}$. Тогда вследствие непрерывности r (6.17) имеем свойство

$$\big(\mathbf{x}[u_{\chi(k)}(\cdot)]\big)_{k\in\mathbb{N}}\rightrightarrows\varphi_{\mu^*}, \tag{6.23}$$

где $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость. В силу (6.8) и (6.23) получаем, что $\varphi_{\mu^*}(t)\in N_t$ $\forall t\in I$. В этом случае $\varphi_{\mu^*}\in Y$ согласно (6.10), а потому (см. (6.23))

$$\mathbf{x}\big[u_{\chi(k)}(\cdot)\big]\in\mathbb{Y}_\kappa$$

для всех достаточно больших $k\in\mathbb{N}$. Последнее противоречит (6.22). Найденное противоречие показывает, что (6.21) невозможно, а следовательно (6.20) установлено.

Из (6.13) и (6.18) получаем (см. предложение 1) равенство

$$(\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]\big]=q^1(r^{-1}(Y)). \tag{6.24}$$

Далее, из (2.1) и (6.19) вытекает, что

$$(\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]\big] \subset (\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathfrak{N}\big]. \tag{6.25}$$

В свою очередь, из (2.1) и (6.20) имеем вложение

$$(\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathfrak{N}\big] \subset (\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]\big].$$

С учетом (6.24), (6.25) получаем теперь цепочку равенств

$$(\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathfrak{N}\big] = (\mathrm{AS})\big[E;\mathbf{H};\tau;\mathbf{h};\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]\big] = q^1(r^{-1}(Y)).$$

Это представление означает, что наше основное МП есть, по сути дела, ОД системы в классе ОУ при точном соблюдении ФО, так как согласно (6.10)

$$q^1(r^{-1}(Y)) = \big\{\varphi_\mu(\vartheta_0) \mid \mu \in K,\ \varphi_\mu \in Y\big\} = \big\{\varphi_\mu(\vartheta_0) \mid \mu \in K,\ \varphi_\mu(t) \in N_t\ \ \forall t \in I\big\}.$$

Итак, применение теоремы 1 в данном конкретном случае нелинейной задачи управления с ФО приводит к ясному с логической точки зрения результату: чтобы получить МП, следует “перейти” к использованию ОУ или управлений-мер, после чего построить ОД при точном соблюдении ФО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Даффин Р. Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
2. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
3. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 620 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Гамкрелидзе Р.В.** Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. 253 с.
7. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П.** Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
8. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И.** Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2016. Т. 47, № 1. С. 54–118.
9. **Ченцов А.Г.** Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
10. **Chentsov A.G., Pytkeev E.G.** Constraints of asymptotic nature and attainability problems // Vestnik Udmurt.Univ. Ser. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki. 2019. Vol. 29, no. 4. P. 569–582.
11. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
12. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
13. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
14. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
15. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
16. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
17. **Ченцов А.Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101.
18. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
19. **Ченцов А.Г.** Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 85–102.

20. **Ченцов А.Г.** К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 2. С. 212–229.
21. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2008. 388 с.
22. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы: Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
23. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 541 с.
24. **Ченцов А.Г.** Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 298–314.
25. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
26. **Панасюк А.И., Панасюк В.И.** Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
27. **Кряжимский А.В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
28. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.

Поступила 13.04.2023
После доработки 12.05.2023
Принята к публикации 15.05.2023

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Duffin R. J. *Infinite programs.* In: *Linear inequalities and related systems*, eds. H.W. Kuhn, A.W. Tucker, Princeton, Princeton Univ. Press, 1957, Ch. 6. doi: 10.1515/9781400881987-007 Translated to Russian under the title *Beskonechnye programmy.* In: *Lineinye neravenstva i smezhnye voprosy*, Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1959.
2. Golstein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematic programming and its applications], Moscow, Nauka Publ., 1971, 351 p.
3. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, NY, Acad. Press, 1972, 531 p. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8 Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 620 p.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9
5. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games], Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
6. Gamkrelidze R.V. *Principles of optimal control theory*, NY, Springer, 1978, 175 p. doi: 10.1007/978-1-4684-7398-8 Original Russian text was published in Gamkrelidze R.V., *Osnovy optimal'nogo upravleniya*, Tbilisi, Tbilisi Univ. Publ., 1975.
7. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 279–298. doi: 10.1134/S0081543815080222
8. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. Attainability problem with constraints of asymptotic nature. *Isvestiya Inst. Matem. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2016, vol. 47, no. 1, pp. 54–118 (in Russian).

9. Chentsov A.G. Extensions of abstract problems of attainability: nonsequential version. *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl., 2007, vol. 259, no. 2, pp. S46–S82. doi: 10.1134/S0081543807060041
10. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Constraints of asymptotic nature and attainability problems. *Vestnik Udmurt. Univ. Matem., Mekh., Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no 4, pp. 569–582. doi: 10.20537/vm190408
11. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Warszawa, PWN Publ., 1967. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
12. Engelking R. *General topology.* Warsaw, PWN, 1977. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
13. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ., 1997, 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805-0
14. Bourbaki N. *Topologie générale: structures topologiques, structures uniformes.* Paris, Hermann, 1968. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya: osnovnye struktury*, Moscow, Nauka Publ., 1968, 272 p.
15. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [The theory of stochastic processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 978-5-9221-0335-0 .
16. Neveu J. *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Paris, Masson, 1964, 203 p. ISBN: 978-2-225-61787-4. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei*, Moscow, Mir Publ., 1969, 309 p.
17. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions. *Vestnik Udmurt. Univ. Matem., Mekh., Komp'yuternye Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).
18. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations.* Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0
19. Chentsov A.G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets. *Vestnik Udmurt. Univ. Matem., Mekh., Komp'yuternye Nauki*, 2012, no. 3, pp. 85–102 (in Russian).
20. Chentsov A.G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems. *Vestnik Udmurt. Univ. Matem., Mekh., Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 212–229 (in Russian).
21. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* [Elements of finitely additive measure theory, I]. Yekaterinburg, Ural State Tech. Univ. — Ural Polytech. Inst. Publ., 2008, 388 p.
22. Dunfrod N., Schwartz J. *Linear operators: General theory*, NY, London, Interscience Publishers, 1958. ISBN: 9780470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory: Obshchaya teoriya*, Moscow, Inostr. Liter. publ., 1962, 895 p.
23. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, II* [Elements of finitely additive measure theory, II]. Yekaterinburg, Ural State Tech. Univ. — Ural Polytech. Inst., 2010.
24. Chentsov A.G. Tier mappings and ultrafilter-based transformations. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314 (in Russian).
25. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion control theory]. Moscow, Nauka Publ, 1968, 476 pp.
26. Panasyuk A.I., Panasyuk V.I. *Asimptoticheskaya magistral'naya optimizatsiya upravlyaemykh sistem* [Asymptotic magistral optimization of controlled systems]. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1986, 296 p.
27. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of convergence-evasion. *Soviet Mat. Dokl.*, 1978, vol. 19, pp. 408–412.
28. Billingsley P. *Convergence of probability measures*, Wiley, 1958. ISBN: 9780471072423. Translated to Russian under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 352 p.

Received April 13, 2023
Revised May 12, 2023
Accepted May 15, 2023

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov. Closed mappings and construction of extension models. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 274–295.