ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 517.988

ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА В ЗАДАЧЕ УСЛОВНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В. В. Васин

В работе представлен обзор методов решения некорректно поставленной задачи условной выпуклой квадратичной минимизации на основе итерационных методов фейеровского типа, в которых широко используются идеи и подходы, развитые в работах И. И. Еремина — основателя Уральской научной школы по математическому программированию. Наряду с постановкой общего вида рассматриваются варианты исходной задачи с ограничениями в форме систем равенств и неравенств, которые имеют многочисленные приложения. Кроме того, исследуются частные постановки задачи, среди которых: нахождение метрической проекции, решение задачи линейного программирования, которые имеют самостоятельный интерес. Отличительной чертой этих методов является то, что для них устанавливается не только сходимость, но и устойчивость к погрешностям входных данных, т. е. методы порождают регуляризующие алгоритмы в отличие от прямых методов, которые этим свойством не обладают.

Ключевые слова: квадратичная минимизация, некорректно поставленная задача, линейные ограничения, фейеровский процесс, регуляризующий алгоритм.

V. V. Vasin. Fejér-type iterative processes in the constrained quadratic minimization problem.

The paper presents an overview of methods for solving an ill-posed problem of constrained convex quadratic minimization based on the Fejér-type iterative methods, which widely use the ideas and approaches developed in the works of I. I. Eremin, the founder of the Ural research school of mathematical programming. Along with a problem statement of general form, we consider variants of the original problem with constraints in the form of systems of equalities and inequalities, which have numerous applications. In addition, particular formulations of the problem are investigated, including the problem of finding a metric projection and a linear programming problem, which are of independent interest. A distinctive feature of these methods is that not only convergence but also stability with respect to errors in the input data are established for them; i. e., the methods generate regularizing algorithms in contrast to the direct methods, which do not have this property.

Keywords: quadratic minimization, ill-posed problem, linear constraints, Fejér process, regularizing algorithm.

MSC: 65J20, 65K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-26-41

1. Введение

Основным объектом исследования в данной статье является некорректно поставленная задача условной выпуклой квадратичной минимизации функционала

$$\inf\left\{||Au-f||^2\colon u\in Q\right\}, \tag{1.1}$$

где A — линейный оператор, действующий на паре гильбертовых пространств U, F, для которого обратный оператор в общем случае разрывен, Q — выпуклое замкнутое подмножество пространства U; задача (1.1) имеет непустое множество решений.

Необходимо отметить, что задачу (1.1) можно рассматривать как обобщение постановки обратной задачи в форме операторного уравнения с дополнительной априорной информацией о решении

$$Au=f,\quad u\in Q,\quad M\cap Q\neq\varnothing, \tag{1.2}$$

где M— непустое множество решений операторного уравнения, т. е. задача (1.2) — частный случай постановки (1.1), поскольку может быть записана в форме задачи условной минимизации (1.1).

Задача (1.2) исследовалась в работах автора (см., например, [1; 2]), где для ее решения построены и обоснованы итерационные процессы в виде

$$u^{k+1} = P_Q\, T(u^k), \quad u^{k+1} = \lambda\, P_Q(u^k) + (1-\lambda)\, T(u^k),$$

сходящиеся к решению $\hat{u} \in M \cap Q$, т. е. к решению, удовлетворяющему физическим требованиям, заложенным в априорном ограничении $u \in Q$. Здесь $0 < \lambda < 1$, T — сильно фейеровский оператор шага базового итерационного процесса для решения исходного операторного уравнения; P_Q — фейеровское отображение, отвечающее за априорное ограничение $u \in Q$ с $Q = \mathrm{Fix}(T)$. Заметим, что априорная информация, как правило, не задается вместе с базовым уравнением, а формируется исходя из физического смысла решения, предварительных численных экспериментов и опыта решения данного класса задач. Необходимость включения априорных сведений в алгоритм решения задачи обусловлена тем, что в случае неединственности решения базового уравнения регуляризирующие алгоритмы, как правило, аппроксимируют нормальное решение задачи исходного операторного уравнения, которое не обязано совпадать с искомым решением, удовлетворяющим априорным ограничениям.

Таким образом, частный случай постановки (1.1) в форме (1.2) подробно исследован в теории некорректно поставленных задач. Однако метод наименьших квадратов (МНК) с ограничениями в форме (1.1) также представляет интерес не только для обратных задач, но и для многочисленных приложений в математическом программировании, статистике, экономике и обработке данных физических экспериментов (least square fitting; см. [3]).

Статья представляет собой краткий обзор методов решения задачи (1.1) и ее частных постановок на основе итерационных процессов фейеровского типа, в которых широко используются идеи и подходы, развитые в работах И. И. Еремина. В разд. 2 представлены основные понятия, касающиеся фейеровских отображений и их свойств.

В разд. 3 исходная задача сводится к нахождению неподвижной точки фейеровского оператора, что позволяет сформулировать теоремы слабой и сильной сходимости метода последовательных приближений и его модификации с помощью корректирующих множителей к решению задачи (1.1) и установить устойчивость процесса к возмущениям пары $(A,\, f)$. Здесь же излагается схема двухэтапного метода с привлечением тихоновской регуляризации.

Раздел 4 посвящен частной, но важной постановке метода наименьших квадратов (1.1) при $A = I$, которая соответствует задаче нахождения метрической проекции как на множество общей структуры с $Q = \mathrm{Fix}(T)$, $T \in \mathcal{F}_Q$, так и для множества Q, заданного линейными ограничениями.

В разд. 5 исследуется двухэтапный метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП). После регуляризации методом Тихонова — Еремина ЗЛП сводится к задаче нахождения метрической проекции некоторого элемента, которая может быть решена на основе итерационного алгоритма из разд. 4.

В разд. 6 для МНК (1.1) с ограничениями в форме равенств и неравенств применяется базовый фейеровский процесс с привлечением корректирующих множителей и приводятся результаты модельного численного эксперимента по решению МНК, которые показывают работоспособность итерационного метода. В этом же разделе устанавливаются теорема сходимости итераций и устойчивость процесса относительно всех входных данных для задачи (1.1) в случае задания множества Q системой линейных ограничений, т. е. представленные итерационные методы порождают регуляризирующие алгоритмы для решения некорректно поставленной задачи (1.1). Заметим, что прямые методы решения задачи (1.1) с линейными ограничениями, изложенные в работе [3], этим свойством не обладают.

В заключительном разд. 7 рассматривается обобщение исходной постановки задачи, а именно некоторые результаты, изложенные в разд. 2–6, переносятся на случай задачи условной выпуклой минимизации.

2. Определения и предварительные сведения

Терминология, связанная со свойством фейеровости, сформировалась после опубликования статьи Л. Фейера [4], в которой было дано следующее определение поточечной близости точки к некоторому выпуклому множеству.

Определение 1 [4]. Пусть множество M — из гильбертова пространства U. Если для точек p, p_1 из U выполнено $||p-q|| > ||p_1-q||$ для любой точки $q \in M$, то будем говорить, что p_1 поточечно ближе к M, чем p. Причем если для p не существует точек p_1, которые ближе к M, чем p, то точку p назовем ближайшей к M.

Кроме того, было отмечено, что множество ближайших к M точек совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества M. Из этого следует, что если точка p не принадлежит $\overline{\mathrm{conv}}(M)$, то найдется точка p, которая ближе к множеству M, чем p. На основе этого определения было введено понятие *фейеровской последовательности*, для которой

$$u_k \neq u_{k+1}, \quad ||u_{k+1}-q|| < ||u_k - q|| \ \ \forall q \in M$$

(см. [5]), и предложены методы решения систем линейных [5; 6] и выпуклых неравенств [7; 8].

В дальнейшем И. И. Ереминым были введены более общие понятия, связанные с именем Л. Фейера: фейеровский сдвиг, фейеровский оператор, фейеровский процесс; исследованы их свойства, которые определили широкий простор для построения методов решения задач математического программирования в $\mathbb{R}^n$, в том числе несобственных [9; 10] (см. также [11]).

Определение 2 [10]. Оператор T, действующий в гильбертовом пространстве, называется M-фейеровским, если $M = \mathrm{Fix}(T) \neq \varnothing$ и выполнено неравенство

$$||T(u)-z|| < ||u-z|| \ \ \forall u \notin \mathrm{Fix}(T), \quad z \in \mathrm{Fix}(T) = M.$$

Введенный И. И. Ереминым класс M-фейеровских операторов $\mathcal{F}_M$ обладает важным свойством замкнутости относительно операции произведения и выпуклой суммы.

Теорема 1 [10, теорема 3.2]. *Пусть* $T_i \in \mathcal{F}_{M_i}$, $M = \bigcap_{i=1}^m M_i \neq \varnothing$. *Тогда*

$$T = T_{i_1} T_{i_2} \ldots T_{i_m} \in \mathcal{F}_M, \tag{2.1}$$

$$T = \sum_{i=1}^m \alpha_i T_i \in \mathcal{F}_M, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1; \tag{2.2}$$

здесь $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — произвольная перестановка индексов, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

В работе автора [12] дано определение класса псевдосжимающих операторов, который был переименован в работе [11] в класс сильно фейеровских операторов.

Определение 3. Оператор, действующий в гильбертовом пространстве U, называется сильно M-фейеровским, если $\mathrm{Fix}(T) = M \neq \varnothing$ и для некоторого $\nu > 0$ выполнено неравенство

$$||T(u)-z||^2 \leq ||u-z||^2 - \nu\, ||u - T(u)||^2 \quad \forall u \in U, \quad z \in M.$$

Обозначим этот класс через $\mathcal{P}_M^\nu$. Очевидно, что $\mathcal{P}_M^\nu \subseteq \mathcal{F}_M$ для любого $\nu > 0$. Кроме того, для операторов класса $\mathcal{P}_M^\nu$ справедлива теорема 1 (см. [1, теорема 17.1]), где $\nu = \min\limits_{1 \leq i \leq m} \{\nu_i\}/2^{m-1}$ для оператора (2.1) и $\nu = \min\limits_{1 \leq i \leq m} \{\nu_i\}$ для оператора (2.2). Класс нерастягивающих операторов обозначим через $\mathcal{K} = \big\{T\colon ||T(u)-T(v)|| \leq ||u-v|| \ \forall\, u,\ v \in U\big\}$.

3. Решение задачи в общей постановке

Рассмотрим задачу (1.1) без конкретизации множества ограничений, т. е. Q — произвольное замкнутое выпуклое множество гильбертова пространства U. Как известно (см., например, [1, теоремы 21.1, 21.2]), задача (1.1) эквивалентна решению операторного уравнения

$$u = P_Q\left(u - \beta\left(A^*Au - A^*f\right)\right) \equiv T(u), \tag{3.1}$$

т. е. нахождению множества неподвижных точек оператора T, где $\mathrm{Fix}(T) = M$, M — множество решений задачи (1.1), β — произвольный положительный параметр, P_Q — метрическая проекция на множество Q.

В работе [13] (см. также [1, теорема 25.1]) доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \beta < 2/||A||^2$. *Тогда для оператора* T, *определяемого формулой* (3.1), *справедливо следующее соотношение*:

$$||T(u) - T(v)||^2 \leq ||u - v||^2 - \nu\,||u - T(u) - (v - T(v))||^2 \quad \forall u,\, v \in U,$$

где $\nu = \min\left\{(2/\beta\,||A||^2 - 1),\, 1\right\}/2$.

Следствие 1. *При выполнении условия теоремы на параметр* β *оператор* T *является нерастягивающим и принадлежит классу* $\mathcal{P}_M^\nu$ (*определение* 3).

Чтобы обосновать сходимость метода последовательных приближений (МПП) с оператором, определяемым формулой (3.1), обратимся к следующей общей теореме сходимости МПП $u^{k+1} = T(u^k)$, доказательство различных вариантов которой можно найти в работах [14; 15], а также в [11, теорема 3.1].

Теорема 3. *Пусть оператор* $T \in \mathcal{P}_M^\nu$ *и удовлетворяет соотношению*

$$u_i \to \bar{u}\ \ (\textit{слабо}), \quad T(u_i) - u_i \to 0 \Rightarrow \bar{u} \in \mathrm{Fix}(T) = M. \tag{3.2}$$

Тогда для итераций $\{u^k\}$, *определяемых процессом* $u^{k+1} = T(u^k)$, *справедливы следующие свойства*:
1) $u^k \to \hat{u}$ (*слабо*), $\hat{u} \in \mathrm{Fix}(T)$;
2) $\inf\{\lim\limits_{k\to\infty} ||u^k - z|| \colon z \in \mathrm{Fix}(T)\} = \lim\limits_{k\to\infty} ||u^k - \hat{u}||$;
3) *либо* $||u^{k+1} - \hat{u}|| < ||u^k - \hat{u}||$ *для любого* k, *либо* $\{u^k\}$ *стационарна начиная с некоторого* k_0, *т. е.* $u^{k_0} = u^{k_0+1} = \ldots = \hat{u}$;
4) *справедлива оценка для поправок*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||u^{k+1} - u^k||^2 \leq ||u^0 - z||^2/\nu \quad \forall z \in \mathrm{Fix}(T).$$

Следствие 2. *Если имеет место сильная сходимость итерационной последовательности* $\{u^k\}$, *то предельная точка* $\hat{u}$ *имеет наименьшую норму среди всех* $u \in M = \mathrm{Fix}(T)$; *следовательно, процесс* $u^{k+1} = T(u^k - v_0) + v_0$ *будет сходиться к неподвижной точке оператора* T, *ближайшей к* v_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о минимальности нормы $||\hat{u}||$ следует из пп. 1), 2) теоремы и неравенства

$$||\hat{u}|| \leq ||\hat{u} - u^k|| + ||u^k - z|| + ||z|| \quad \forall z \in M = \mathrm{Fix}(T). \qquad \square$$

На основе (3.1) для решения задачи (1.1) сформируем метод последовательных приближений

$$u^{k+1} = P_Q\left(u^k - \beta\left(A^*Au^k - A^*f\right)\right) \equiv T(u^k). \tag{3.3}$$

Следствие 3. *Для итерационного процесса* (3.3) *справедливы заключения теоремы* 3 *и следствия* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 1 оператор T, определяемый соотношением (3.3), принадлежит классу $\mathcal{P}_M^\nu \bigcap \mathcal{K}$. Согласно [11, теорема 1.11] для оператора $T\colon U \to U$ и $T \in \mathcal{K}$ справедливо свойство (3.2). Это означает, что для процесса (3.3) выполнены все условия теоремы 3. □

Таким образом, в общем случае бесконечномерного гильбертова пространства процесс (3.3) сходится в слабом смысле. Чтобы получить сильную сходимость итераций, модифицируем процесс (3.3) с помощью корректирующих множителей (см. [16])

$$u^{k+1} = \gamma_{k+1} T(u^k) + (1 - \gamma_{k+1}) v_0, \tag{3.4}$$

где v_0 — фиксированная точка пространства U, которая играет роль пробного решения (начального приближения).

О п р е д е л е н и е 4 [16]. Числовая последовательность $\{\gamma_i\}$ называется допустимой, если выполнены следующие условия: 1) $0 < \gamma_i < 1,\ i = 0, 1, \ldots$; 2) $\gamma_i \le \gamma_{i+1}$; 3) $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = 1$; 4) существует подпоследовательность целых чисел $n(i)$ такая, что $n(i+1) > n(i)$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$; 5) $\lim\limits_{i\to\infty} \epsilon_{i+n(i)}/\epsilon_i = 1$; 6) $\lim\limits_{i\to\infty} n(i)\epsilon_i = \infty$, где $\epsilon_i = 1 - \gamma_i$.

Например, $\gamma_i = 1 - i^{-p},\ 0 < p < 1,$ — допустимая последовательность.

Теорема 4. *Пусть* T — *оператор, определяемый соотношением* (3.1). *Тогда для любого начального приближения* u^0 *и для любой допустимой последовательности* γ_k *итерации* $\{u^k\}$, *порождаемые процессом* (3.4), *сходятся сильно к решению* $\hat u$ *уравнения* (1.1), *ближайшему к* v_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 1 оператор T является нерастягивающим. Поэтому в соответствии с [16] достаточно убедиться, что оператор шага T в процессе (3.2) отображает некоторое замкнутое выпуклое ограниченное подмножество, содержащее v_0-нормальное решение, в себя. Действительно, пусть $\hat u$ — решение задачи (1.1), которое совпадает с неподвижной точкой нерастягивающего оператора T (следствие 1), поэтому

$$||T(u) - \hat u|| = ||T(u) - T(\hat u)|| \le ||u - \hat u|| \quad \forall u \in U.$$

Это означает, что T отображает шар $S_r(\hat u)$ в себя для любого $r > 0$. □.

Пусть оператор A и элемент f заданы приближенно парой A_h, f_δ:

$$||A - A_h|| \le h, \quad ||f - f_\delta|| \le \delta. \tag{3.5}$$

Тогда процесс (3.4) с приближенными данными принимает вид

$$\tilde u^{k+1} = \gamma_{k+1} P_Q\left(\tilde u^k - \beta(A_h^* A_h \tilde u^k - A_h^* f_\delta)\right) + \left(1 - \gamma_{k+1}\right) v_0, \quad \tilde u^0 = u^0. \tag{3.6}$$

Теорема 5. *Для* $\beta < \min\bigl\{2/||A||^2,\, 2/||A_h||^2\bigr\}$ *при выборе числа итераций* $k(\delta, h)$ *в соответствии с соотношением*

$$k(\delta, h)(\delta + h) \to 0, \quad \delta,\, h \to 0 \tag{3.7}$$

для последовательности $\{\tilde u^{\delta,h}\}$, *построенной процессом* (3.6), *имеет место сильная сходимость*

$$\lim_{\delta,\, h\to 0} ||\tilde u^{\delta,\, h} - \hat u|| = 0, \tag{3.8}$$

где $\hat u$ — *решение задачи* (1.1), *ближайшее к* v_0, *т. е. итерационный процесс* (3.4) *устойчив к возмущениям пары* $(A,\, f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $\widetilde{T}(\tilde{u}^k) = P_Q\,(\tilde{u}^k - \beta\,(A_h^* A_h \tilde{u}^k - A_h^* f_\delta))$. Имеем очевидное неравенство

$$||\hat{u} - \tilde{u}^{k+1}|| \le ||\hat{u} - u^{k+1}|| + ||u^{k+1} - \tilde{u}^{k+1}||, \tag{3.9}$$

в котором первое слагаемое убывает к нулю по теореме 4. Для второго слагаемого справедлива оценка

$$||u^{k+1} - \tilde{u}^{k+1}|| = \gamma_{k+1}||T(u^k) - \widetilde{T}(\tilde{u}^k)|| \le ||T(u^k) - \widetilde{T}(u^k)||$$
$$+ ||\widetilde{T}(u^k) - \widetilde{T}(\tilde{u}^k)|| \le c\,(h+\delta) + ||u^k - \tilde{u}^k|| \le \ldots \le c\,(k+1)(h+\delta),$$

где использованы условие (3.5) и свойство $\widetilde{T} \in \mathcal{K}$, выполнение которого гарантируется соответствующим выбором параметра β в теореме 2, c — некоторая константа. Из полученной оценки, условия (3.7) и соотношения (3.9) следует (3.8). □

Выбор числа итераций согласно (3.7) носит асимптотический характер, поэтому при фиксированном уровне погрешности δ, h необходимо применять апостериорные критерии выбора итераций типа [17]. Следует заметить, что привлечение двухэтапного подхода, основанного на предварительной регуляризации исходной задачи (1.1) и применении МПП с корректирующими множителями, позволяет отказаться от необходимости формулировать правило выбора числа итераций в итерационном процессе.

Регуляризуем методом Тихонова задачу условной минимизации (1.1) с приближенными данными $(A_h,\ f_\delta)$:

$$\min\bigl\{||A_h u - f_\delta||^2 + \alpha\,||u - v_0||^2 \colon u \in Q\bigr\}, \tag{3.10}$$

где v_0 — некоторое начальное приближение к решению. Принимая во внимание связь задачи (1.1) с соотношением (3.1), находим, что задача (3.10) эквивалентна решению уравнения

$$u = P_Q\left[u - \gamma\,(A_h^* A_h u + \alpha\,(u - v_0) - A_h^* f_\delta)\right] \equiv T_\alpha(u),$$

т. е. нахождению неподвижной точки оператора T_α, где параметр $\alpha > 0$.

Теорема 6. *Для любого начального приближения u^0, пробного решения v_0 и параметра $\alpha > 0$ задача* (3.10) *имеет единственное решение u_α, и при $\gamma < 2\alpha/\bigl(||A_h||^2 + \alpha\bigr)$ процесс*

$$u^{k+1} = P_Q\left[u^k - \gamma\,(A_h^* A_h u^k + \alpha\,(u^k - v_0) - A_h^* f_\delta)\right] \equiv T_\alpha(u^k) \tag{3.11}$$

сходится к u_α, а при $\gamma = \alpha/\bigl(||A_h||^2 + \alpha\bigr)$ справедлива оценка

$$||u^k - u_\alpha|| \le \bigl(\sqrt{1 - \alpha^2/c^2}\,\bigr)^k\,||u^0 - u_\alpha||, \quad c = ||A_h||^2 + \alpha.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование единственного решения задачи (3.10) следует из сильной выпуклости целевого функционала, выпуклости и замкнутости множества Q. Сходимость и оценка погрешности итераций u^k устанавливаются по стандартной схеме (см. [1, лемма 25.2]), поскольку оператор в круглых скобках формулы (3.11) является сильно монотонным и удовлетворяет условию Липшица. □

Итерационный процесс (3.11) аппроксимирует регуляризованное решение u_α, поэтому, чтобы построить устойчивые алгоритмы для решения исходной задачи (1.1) на основе двухэтапного метода, необходимо установить сходимость метода регуляризации Тихонова (3.10).

Теорема 7. *Пусть Q — выпуклое замкнутое ограниченное подмножество гильбертова пространства U и выполнены условия* (3.5) *для приближенных данных. Если параметр $\alpha(\delta, h)$ выбран в соответствии с соотношениями*

$$\lim_{\delta,\,h\to 0} \alpha(\delta, h) = 0, \quad \lim_{\delta,\,h\to 0} (\delta + h)/\alpha(\delta, h) = 0,$$

то задача (3.10) *имеет единственное решение u_α и*

$$\lim_{\delta,\,h\to 0} ||u_{\alpha(\delta,h)} - \hat{u}|| = 0,$$

где $\hat{u}$ — v_0-нормальное решение задачи (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы можно получить, несколько модифицируя методику из [18, § 7]. □

Апостериорные правила выбора параметра регуляризации при фиксированном уровне погрешностей входных данных, регулярные алгоритмы вычисления проекции и теоремы 6, 7 образуют теоретическую и алгоритмическую базу для построения устойчивого приближенного решения задачи (1.1) при точной реализации операции P_Q метрического проектирования.

4. Алгоритмы вычисления метрической проекции

При реализации методов (3.3), (3.4) проекцию P_Q необходимо вычислять на каждом шаге итерационного процесса. Поскольку P_Q может быть вычислена явной формулой только для множеств простой структуры в $\mathbb{R}^n$ (положительный ортант, параллелепипед, шар, гиперплоскость, полупространство), то для множества более сложной структуры необходимо привлекать специальную процедуру вычисления проекций. Покажем, что для множества Q, заданного системой линейных равенств и неравенств, для этой цели можно построить экономичные алгоритмы.

Рассмотрим частный вариант МНК в следующей форме:

$$\min\left\{||u-v_0||^2 \colon u\in Q\right\}, \tag{4.1}$$

$$Q=\{u\colon l_i(u)=0,\ i\in J_1,\ l_i(u)\le 0,\ i\in J_2\}\ne\varnothing, \tag{4.2}$$

где $l_i(u)=\langle a_i,u\rangle-b_i$, $i\in J_1\bigcup J_2$. Сформулированная задача (4.1), (4.2) — задача вычисления метрической проекции элемента v_0 на множество Q. Сформируем оператор

$$\overline{T}(u)=u-(1/\kappa)\Big[\sum_{J_1} l_i(u)a_i+\sum_{J_2} l_i^+(u)a_i\Big]=(u-(1/2\kappa)\,\nabla d(u)), \tag{4.3}$$

$$\kappa=\sum_{J}||a_i||^2,\quad d(u)=\sum_{J_1} l_i^2(u)a_i+\sum_{J_2}(l_i^+)^2(u)a_i, \tag{4.4}$$

где $J=J_1\bigcup J_2$, $\bigtriangledown$ — знак градиента. Конструкция (сильно) Q-фейеровского оператора в форме (4.3) и (4.4) с $Q=\mathrm{Fix}(\overline{T})$ предложена И. И. Ереминым и часто используется для решения задач математического программирования (см., например, [10, § 26; 11, гл. 3].

Теорема 8. *Для любой допустимой последовательности* γ_k (*определение* 4) *и любого начального приближения* u^0 *итерационный процесс*

$$u^{k+1}=\gamma_{k+1}\,\overline{T}(u^k)+(1-\gamma_{k+1})\,v_0 \tag{4.5}$$

сходится к единственному решению задачи (4.1), *т. е. к проекции* $\bar v=P_Q(v_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 4, поскольку задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $\bar u\in Q=\mathrm{Fix}(\overline{T})$, а оператор $\overline{T}$, определяемый формулами (4.3), (4.4), является нерастягивающим как выпуклая сумма проекций либо на гиперплоскость, либо на полупространство. □

Убедимся, что процесс (4.5) устойчив к возмущениям векторов a_i, b, $i\in J_1\bigcup J_2$, где $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. Пусть точные данные a_i, b заданы приближенно парой $\tilde a_i$, $\tilde b$ с оценкой погрешности

$$||a_i-\tilde a_i||\le h,\quad ||b-\tilde b||\le\delta. \tag{4.6}$$

Обозначим через $\widetilde{T}$ оператор, определяемый формулами (4.3), (4.4), в которых вместо a_i, b вставлены приближенные данные $\tilde a$, $\tilde b$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* (4.6). *Пусть число итераций выбирается в соответствии с правилом* (3.7). *Тогда процесс* (4.5), *в котором оператор* $\overline{T}$ *заменен на оператор* $\widetilde{T}$, *сходится к решению задачи* (4.1), *т. е. процесс* (4.5) *устойчив к погрешностям векторов* a_i, b.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5. Так как процесс для точных данных сходится (теорема 8), то первое слагаемое в (3.9) убывает к нулю. При оценке второго слагаемого используется факт, что $\widetilde{T} \in \mathcal{K}$, поскольку $\widetilde{T}$ — выпуклая сумма метрических проекций, а в справедливости оценки, содержащей погрешности, можно убедиться непосредственной проверкой [1, следствие 25.7]. □

Замечание 1. Непосредственной проверкой можно убедиться, что последовательность u^k, полученная МПП $u^{k+1} = \overline{T}(u^k)$, принадлежит конечномерному подпространству, образованному элементами $\{u^0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Оператор $\overline{T}$ является выпуклой суммой метрических проекций, поэтому $\overline{T} \in \mathcal{P}_Q^1 \cap \mathcal{K}$, что означает выполнение условий теоремы 3 и следствия 2; значит, имеет место сильная сходимость процесса $u^{k+1} = \overline{T}(u^k - v_0) + v_0$ к решению задачи (4.1), т. е. проекции $\bar{v}$ элемента v_0 на множество Q.

Рассмотрим задачу (4.1), (4.2) в частном случае, когда множество $Q \in \mathbb{R}^n$ задано только с помощью неравенств, т. е.

$$\min\bigl\{||u - v_0||^2 \colon u \in \mathbb{R}^n,\ Gu \geq h\bigr\}, \tag{4.7}$$

где G — матрица размерности $n \times m$, $h \in \mathbb{R}^m$. После замены $u - v_0 = w$ (4.7) переходит в задачу

$$\min\bigl\{||w||^2 \colon w \in \mathbb{R}^n,\ G\,w \geq \bar{h}\bigr\}, \quad \bar{h} = h - G(v_0). \tag{4.8}$$

Определим матрицу $E = \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} \\ \bar{h}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ размерности $m \times (n+1)$ и вектор $q = (0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Сформируем задачу

$$\min\bigl\{||Ev - q||^2 \colon v \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^m\bigr\}. \tag{4.9}$$

После нахождения решения $\hat{v}$ задачи (4.9) вычисляем вектор $r = E\hat{v} - q$. Тогда вектор с компонентами $\hat{w}_j = -r_j / r_{n+1},\ j = 1, \ldots, n$ решает задачу (4.8), а вектор $\hat{u} = \hat{w} + v_0$ является решением задачи (4.7), т. е. совпадает с проекцией точки v_0 на множество $Q = \{u \colon u \in \mathbb{R}^n,\ Gu \geq h\}$.

Обоснование реализуемости всех этапов изложенного алгоритма содержится в [3]. В качестве метода решения задачи (4.9) применим устойчивый базовый процесс (3.4), который при $v_0 = 0$ принимает очень простой вид

$$v^{k+1} = \gamma_{k+1}\,[v^k - \beta\,(E^{\mathrm{T}} E v^k - E^{\mathrm{T}} q)]^+.$$

И. И. Ереминым предложен и обоснован апостериорный трехпараметрический алгоритм нахождения проекции элемента v_0 на множество $M = \mathrm{Fix}(T)$, где $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — нерастягивающий оператор из класса $\mathcal{F}_Q$ (см. [11, лемма 5.10, теорема 5.11]).

Сформулируем соответствующую теорему сходимости и приведем ее доказательство для оператора T, действующего в гильбертовом пространстве U.

Введем обозначение $T_\gamma(u) = (1 - \gamma)\,T(u) + \gamma\,v_0$ и определим величину

$$d_\gamma = ||u - T_\gamma(u)||.$$

Так как оператор T_γ удовлетворяет неравенству

$$||T_\gamma(u) - T_\gamma(v)|| \leq (1 - \gamma)\,||u - v|| \quad \forall u, v \in U,$$

то для произвольного начального приближения u^0 процесс

$$u^k = T_\gamma^k(u^0) \to u_\gamma \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

сходится сильно к единственной неподвижной точке $u_\gamma \in \mathrm{Fix}(T_\gamma)$. Поэтому при достаточно большом номере t

$$d_\gamma(u_0^t) \le \epsilon, \quad u_0^t = T_\gamma^t(u^0), \tag{4.10}$$

где ϵ — сколь угодно малое положительное число.

Лемма 1. *Пусть параметры $\gamma \in (0,1)$, $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ подчинены соотношению $\epsilon/\gamma \le \delta$ и $d_\gamma(u) \le \epsilon$. Тогда справедлива оценка*

$$||u - u_\gamma|| \le \delta, \tag{4.11}$$

где u_γ — единственная неподвижная точка оператора T_γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу $T \in \mathcal{K}$ имеем неравенства

$$||T_\gamma(u) - T_\gamma(u_\gamma)|| \le (1-\gamma)\,||u - u_\gamma||,$$

что влечет оценку

$$||u - u_\gamma|| \le ||u - T_\gamma(u)|| + ||T_\gamma(u) - u_\gamma|| \le d_\gamma(u) + ||T_\gamma(u) - T_\gamma(u_\gamma)|| \le \epsilon + (1-\gamma)||u - u_\gamma||,$$

откуда следует оценка (4.11). □

С учетом полученных оценок опишем вычислительный процесс:

1) определим последовательности $\{\gamma_k > 0\} \to 0$, $\{\delta_k > 0\} \to 0$ и $\{\epsilon_k > 0\} \to 0$ такие, что для каждого k выполняется соотношение

$$\epsilon_k/\gamma_k \le \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots;$$

2) определим начальное приближение u^0;

3) если уже вычислено u^{k-1}, то в соответствии с (4.10) находим такое $\bar{t}$, что

$$d_{\gamma_k}(u_{k-1}^{\bar{t}}) \le \epsilon_k, \quad u_{k-1}^{\bar{t}} = T_{\gamma_k}^{\bar{t}}(u^{k-1});$$

4) полагаем $u^k = u_{k-1}^{\bar{t}}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Последовательность $\{u^k\}$, построенная в соответствии с правилами 1)–4), сходится к $\bar{v}$ — проекции v_0 на множество $M = \mathrm{Fix}(T)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как T — нерастягивающий оператор, то

$$||T(u) - \hat{u}|| \le ||T(u) - T(\hat{u})|| \le ||u - \hat{u}|| \le r, \quad \hat{u} \in \mathrm{Fix}(T), \quad u \in U;$$

следовательно, оператор T переводит шар $S_r(\hat{u})$ в себя. Согласно [11, теорема 4.1, гл. 1] имеем сходимость

$$\lim_{k\to\infty} ||u_{\gamma_k} - \bar{v}|| = 0. \tag{4.12}$$

По построению из леммы 1 следует соотношение

$$\lim_{k\to\infty} ||u^k - u_{\gamma_k}|| \le \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0,$$

что вместе с (4.12) завершает доказательство теоремы. □

5. Двухэтапный метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ задачу линейного программирования (ЛП) в виде

$$\max\{\langle c,\, u\rangle \colon u \geq 0,\ Bu \leq b\}, \tag{5.1}$$

которая может быть сведена к нахождению метрической проекции, что позволит применить для ее решения алгоритмы, построенные в предыдущем разделе. Обозначим множество решений этой задачи через $M \neq \varnothing$. На первом этапе применим к (5.1) тихоновскую регуляризацию

$$\max\{\langle c,\, u\rangle - \alpha\, ||u-p||^2 \colon u \geq 0,\ Bu \leq b\}, \tag{5.2}$$

где p — некоторый элемент пространства $\mathbb{R}^n$, который играет роль пробного решения; $\alpha > 0$ — параметр регуляризации.

Сформулируем замечательный результат И. И. Еремина относительно регуляризованной задачи (5.2) (см. [10, § 47]).

Теорема 11. *При достаточно малых значениях параметра регуляризации $\alpha > 0$ единственное решение u_α задачи* (5.2) *совпадает с*

$$\arg\min\bigl\{||u-p||^2 \colon u \in M\bigr\}, \tag{5.3}$$

т. е. с p-нормальным решением задачи ЛП (5.1).

Как отмечено И. И. Ереминым (см. [10, § 47]), задача (5.2) эквивалентна задаче

$$\min\bigl\{||u-(p+c/(2\alpha))||^2 \colon u \geq 0,\ B\,u \leq b\bigr\}, \tag{5.4}$$

т. е. задаче нахождения проекции точки $v_0 = p + c/(2\alpha)$ на множество $Q = \{u \colon u \geq 0,\ B\,u \leq b\}$, где ограничения для линейных неравенств могут быть записаны в форме (4.2).

Теорема 12. *Пусть параметр $\alpha > 0$ выбран так, что справедлива теорема* 11. *Пусть γ_i — допустимая последовательность* (*определение* 4), $\overline{T}^{\,+}$ — *оператор, заданный формулой* (4.3) *в части линейных неравенств с дополнительной операцией срезки. Тогда*:

1) *процесс* (4.5) *при $v_0 = p + c/(2\alpha)$ для любого начального приближения сходится к проекции $\bar v = P_Q(v_0)$, т. е. к решению задачи* (5.4), *следовательно, задачи* (5.1);

2) *для оператора $\overline{T}^{\,+}$ справедливо следствие* 2 *при рассмотрении задачи* (5.4) *в гильбертовом пространстве* (*замечание* 1).

Следствие 4. *Поскольку* $\mathrm{Fix}(\overline{T}^{\,+}) = Q$, *то для решения задачи* (5.3) *можно также применять алгоритм, представленный в теореме* 10, *и процесс $u^{k+1} = \overline{T}^{\,+}(u^k - v_0) + v_0$* (*см. следствие* 2).

Следствие 5. *Из теорем* 9 *и* 12 *следует, что процесс* (4.5) *устойчив к возмущениям пары* $(B,\, b)$ *входных данных.*

И. И. Еремин предложил двухэтапный метод построения устойчивого приближенного решения задачи (5.4), в которой условие $u \geq 0$ отсутствует. На первом этапе исходная задача аппроксимируется параметрическим семейством задач на основе метода штрафных функций

$$\min\bigl\{||u-(p+c/(2\alpha))||^2 + R\,||(B\,u-b)^+||^2 \colon u \in \mathbb{R}^n\bigr\}. \tag{5.5}$$

На втором этапе единственное решение u_R аппроксимируется процессом $u^{k+1} = T(u^k)$ с оператором T, построенным по правилу (4.3), (4.4) для задачи (5.5).

Теорема 13. *Пусть задача* (5.1) *разрешима и параметр* α *выбран так, что выполнена теорема* 11. *Тогда*:

1) *задача* (5.5) *имеет единственное решение* u_R, *которое при* $R \to \infty$ *сходится к* u_α, *т. е.*

$$u_R \to u_\alpha = \arg\min\bigl\{||u-p||^2 \colon B\,u \le b\bigr\};$$

2) *если оператор* T *построен по правилу* (4.3), (4.4) *для задачи* (5.5), *то для любого начального приближения* u^0 *при* $k \to \infty$

$$T^k(u^0) \to u_R = \arg(5.5).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость п. 1) следует из [10, приложение А, теорема 17], где установлена оценка

$$||u_R - u_\alpha|| \le ||\bar{v}||\,/2\,\sqrt{2\,\alpha\,R},$$

в которой $\bar{v}$ — вектор множителей Лагранжа в задаче (5.2) и можно положить $R = \alpha^{-3}$. Тогда оценка принимает вид $\|u_R - u_\alpha\| \le \alpha\|\bar{u}\|/2\sqrt{2}$. Что касается п. 2), то сходимость итераций следует из фейеровости оператора T (см. [10, лемма 3.10]). $\square$

6. Метод наименьших квадратов с линейными ограничениями

Рассмотрим МНК (1.1), когда множество ограничений задано в виде линейных равенств и неравенств

$$\min\bigl\{||A\,u-f||^2 \colon C\,u = d,\ D\,u \le \bar{d}\bigr\}. \qquad (6.1)$$

Для единообразия записи представим множество ограничений в форме

$$Q = \{u \colon l_i(u) = 0,\ i \in J_1,\ l_i(u) \le 0,\ i \in J_2\}, \quad l_i(u) = \langle a_i,\, u\rangle - b_i,$$

где $\langle a_i, u\rangle$ — строки матрицы C при $i \in J_1$ и $\langle a_i, u\rangle$ — строки матрицы D при $i \in J_2$, чтобы охватить случай гильбертова пространства. В качестве решения задачи (6.1) используем базовый метод

$$u^{k+1} = \gamma_{k+1} P_Q\,(u^k - \beta\,(A^*A\,u^k - A^*f)) + (1-\gamma_{k+1})\,v_0. \qquad (6.2)$$

Следствие 6. 1) *Для процесса* (6.2) *справедлива теорема* 4 *о сходимости итераций к решению* $\hat{u}$ *задачи* (6.1), *ближайшему к* v_0. 2) *При* $\gamma_{k+1} = \gamma = 1$ *процесс* (6.2) *сходится сильно к решению задачи* (6.1) *с наименьшей нормой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о п. 1) для любого начального приближения и любой допустимой последовательности следует из доказательства теоремы 4, а доказательство п. 2) вытекает из следствия 2 и замечания 1. $\square$

Введем обозначение $w_k = u^k - \beta\,(A^*A\,u^k - A^*f)$. На каждом шаге процесса (6.2) необходимо находить проекцию элемента w_k на множество Q, что можно реализовать либо с помощью итерационного алгоритма (4.5), где $v_0 = w_k$, а оператор $\overline{T}$ строится по формулам (4.3), (4.4), либо с помощью процесса $u^{i+1} = \overline{T}(u^i - w_k) + w_k$, $i \to \infty$ (следствие 2).

Следствие 7. *Из теорем* 5, 9 *вытекает, что базовый метод* (6.2) *с линейными ограничениями устойчив к возмущениям каждой из пар* $(A,\,b)$, $(a_i,\,b)$.

Следствие 8. *Базовый метод* (6.2) *в совокупности с методом* (4.5) *вычисления проекции* P_Q *на каждом шаге процесса* (6.2) *устойчив к погрешностям всей совокупности входных данных и порождает регуляризующий алгоритм решения обратных задач и задач математического программирования в форме* (1.1) *с линейными ограничениями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из совокупности неравенств:

$$||\hat{u} - \gamma_{k+1} P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}\,(\tilde{u}^k)|| \le ||\hat{u} - \gamma_{k+1} P_Q\, T(u^k)|| + \gamma_{k+1}\, ||P_Q\, T(u^k) - P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}(u^k)||;$$

$$||P_Q\, T(u^k) - P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}(u^k)|| \le ||P_Q\, T(u^k) - P_Q \widetilde{T}(u^k)|| + ||P_Q\, \widetilde{T}(u^k) - P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}(u^k)||$$

$$+\, ||P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}(u^k) - P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}(\tilde{u}^k)|| \le c\,(\delta + h) + ||u^k - \tilde{u}^k|| \le \ldots \le c\,(k+1)(\delta + h),$$

в которых используются свойство $\widetilde{T} \in \mathcal{K}$ и схема получения оценок при доказательстве теорем 5, 9; здесь $\widetilde{T}$, $\widetilde{Q}$ — оператор T и множество Q, при определении которых вместо точных используются приближенные данные, $\widetilde{T}(\tilde{u}^k) = \tilde{u}^k - \beta\,(A_h^* A_h\, \tilde{u}^k - A_h^* f_\delta)$, $\tilde{u}^{k+1} = \gamma_{k+1}\, P_{\widetilde{Q}}\, \widetilde{T}(\tilde{u}^k) + (1 - \gamma_{k+1})\, v_0$. □

З а м е ч а н и е 2. В условиях следствия 2 для нерастягивающего оператора T справедливо следствие 8 для классического МПП без использования корректирующих множителей, т. е. процесса (6.2) при $\gamma_{k+1} = 1$.

П р и м е р 1. Рассмотрим численный эксперимент решения МНК с ограничениями в форме системы неравенств. Пусть экспериментальные данные имеют вид (см. [3, с. 169, 170]):

t_i	w_i
0.25	0.5
0.50	0.6
0.50	0.7
0.80	1.2

Числовые данные означают, что приближенно измеряется некоторая величина w для значений переменой t, от которой она зависит. Необходимо найти линию в форме $f(t) = x_1 t + x_2$, которая выравнивает данные в смысле наименьших квадратов (fitting) при условии ограничений

$$f(t) \ge 0, \quad f(0) \ge 0, \quad f(1) \le 1.$$

Эта задача может быть записана как задача квадратичной минимизации с ограничениями в форме неравенств

$$\min\bigl\{||Ex - f||^2 \colon Gx \le h\bigr\}, \tag{6.3}$$

где

$$E = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 \\ 0.50 & 1 \\ 0.50 & 1 \\ 0.80 & 1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Используя процедуру из [3, с. 167], сведем задачу (6.3) после замены переменной x на $z = Ex - f$ к эквивалентной задаче

$$\min\bigl\{||z||^2 \colon \bar{G}z \le \bar{h}\bigr\}, \tag{6.4}$$

т. е. к задаче нахождения проекции нуля ($v_0 = 0$) на множество решений линейных неравенств, где

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} +0.207 & -2.558 \\ +0.392 & +1.351 \\ -0.599 & +1.206 \end{bmatrix}, \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} -1.300 \\ -0.084 \\ +0.384 \end{bmatrix}.$$

Для решения задачи (6.4) используем итерационный процесс (4.5), который для (6.4) принимает вид

$$z^{k+1} = \gamma_{k+1}\Bigl[z^k - \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{3} l_i^+(z^k)\, a_i\Bigr], \quad \delta = \sum_{i=1}^{3} ||a_i||^2; \tag{6.5}$$

здесь

$$\gamma_k = 1 - \frac{1}{(1+k^p)}, \quad p = 0.9, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l_i(z) = \langle a_i, z\rangle - h_i.$$

После $N = 1000$ итераций процесса (6.5) полученное численное решение $\bar z$ отличается от решения $\hat z = (0.127,\ -0.255)^{\mathrm T}$, полученного прямым методом (см. [3, с. 172]), на величину $\Delta \le 2{\cdot}10^{-3}$ по каждой компоненте, что подтверждает работоспособность итерационного метода. Решение $\bar x = (0.621,\ -0.255)^{\mathrm T}$ исходной задачи (6.3) определяется по $\bar z$ обратной заменой.

7. Задача выпуклой минимизации

Предыдущие разделы были посвящены минимизации квадратичного функционала. Рассмотрим более общую постановку — задачу условной выпуклой минимизации и покажем, что некоторые результаты переносятся на случай задачи

$$\min\{f(u)\colon u \in Q\} \tag{7.1}$$

с непустым множеством решений M, где f — дважды дифференцируемый выпуклый функционал, Q — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства U. При выполнении условий $||f''(u)|| \le N,\ u \in Q,\ 0 < \lambda < 2/N$ в силу [19, лемма 4.1] оператор

$$T(u) = P_Q\bigl(u - \lambda\,\nabla f(u)\bigr) \tag{7.2}$$

является нерастягивающим оператором. Согласно результату И. И. Еремина (см. [10, лемма 3.11]) элемент $\bar u$ оптимален в задаче (7.1) тогда и только тогда, когда $\bar u$ является неподвижной точкой оператора T, определяемого формулой (7.2).

Образуем итерационный процесс

$$u^{k+1} = \gamma_{k+1}\,T(u^k) + (1-\gamma_{k+1})\,v_0. \tag{7.3}$$

Из установленных свойств $T \in \mathcal K$ и $\mathrm{Fix}(T) = M$ следует, что оператор отображает шар $S_r(\hat u)$ в себя, где $\hat u$ — v_0-нормальное решение задачи (7.1) (см. доказательство теоремы 4). Тогда согласно [16] имеем, что для любого начального приближения u^0 и любой допустимой последовательности γ_k итерационный процесс (7.3) сходится сильно к v_0-нормальному решению задачи (7.1). При этом процесс (7.3) устойчив к возмущениям градиента функционала f (см. [1, следствие 25.5]).

З а м е ч а н и е 3. Если допустимое множество Q задано системой линейных равенств и неравенств в форме (4.3), то при реализации процесса (7.3) для приближенного вычисления проекции $P_Q(w_k)$, где $w_k = u^k - \lambda\nabla f(u^k)$, на каждом шаге процесса можно применять итерационный метод (4.5).

Сформируем оператор $T_\alpha = \alpha T + (1-\alpha)I,\ 0 < \alpha < 1$. На основании [11, лемма 1.6] оператор T_α принадлежит классу сильно фейеровских операторов $\mathcal P_Q^\nu,\ \nu = (1-\alpha)/\alpha$ (определение 3). Это означает, что для оператора T_α выполнены предположения теоремы 3, что влечет для итераций $u^{k+1} = T_\lambda(u^k)$ выполнение свойств 1)–4) в заключении этой теоремы.

Рассмотрим задачу нахождения проекции элемента v_0 на множество Q, т. е. задачу (4.1), где

$$Q = \{u \in \mathbb R^n\colon g_i(u) \le 0,\ i = 1, 2, \dots, m\},$$

g_i — выпуклые дифференцируемые функции. И. И. Ереминым введен класс фейеровских операторов (см. [11, с. 85]) и, в частности, показано, что оператор

$$T_i(u) = u - \lambda\, g_i^+(u)\,\nabla g_i(u)/\,||\nabla g_i(u)||^2, \quad 0 < \lambda < 2,$$

является Q_i-фейеровским для $Q_i = \{u\colon u \in \mathbb{R}^n,\ g_i(u) \le 0\}$; следовательно, согласно теореме 1 оператор

$$T = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, T_i(u), \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

является Q-фейеровским оператором. Автором было установлено, что оператор T принадлежит классу $\mathcal{P}_Q^\nu$ и удовлетворяет соотношению (3.2), т. е. для T выполнены условия теоремы 3 (см. [1, лемма 25.3, теорема 25.9]). Принимая во внимание следствие 2, заключаем, что процесс

$$u^{k+1} = T(u^k - v_0) + v_0$$

сходится к проекции $\bar{v}$ элемента v_0 на множество Q.

Заключение

В работе представлен обзор методов решения задачи условной квадратичной минимизации, которая эквивалентна задаче нахождения неподвижной точки фейеровского оператора. Для аппроксимации неподвижной точки привлекается метод последовательных приближений (МПП) для двух классов операторов, изложенный в теоремах 3, 4. В теореме 3 для оператора из класса $\mathcal{P}_M^\nu$, действующего в гильбертовом пространстве, доказывается слабая сходимость итераций, а в конечномерном случае имеет место сходимость итерационной последовательности к неподвижной точке с минимальной нормой. Теорема 4 посвящена методу аппроксимации неподвижной точки нерастягивающего оператора в гильбертовом пространстве на основе МПП, модифицированного с помощью корректирующих множителей, что гарантирует сходимость итераций к неподвижной точке, ближайшей к заданному пробному решению. Эти теоремы дополняют друг друга с точки зрения области применения и позволяют обосновать МПП и его модификации для исходной задачи квадратичной минимизации как в общей постановке, так и для допустимого множества, заданного линейными ограничениями, где используются конструкции фейеровских операторов, предложенные И. И. Ереминым.

Для МНК с ограничениями в виде неравенств выполнен численный эксперимент, иллюстрирующий работоспособность фейеровского итерационного процесса с корректирующими множителями. Кроме того, исследуются экономичные методы решения частной, но важной задачи МНК — нахождение проекции на множество, заданного в форме линейных равенств и неравенств, а также в форме систем выпуклых неравенств (разд. 7). Кроме того, обсуждаются алгоритмы решения задачи линейного программирования, регуляризованной методом Тихонова — Еремина.

Наряду с теоремами сходимости итерационных методов формулируются утверждения об устойчивости процессов к погрешностям входных данных с асимптотическим правилом выбора итераций, т. е. итерационные методы порождают регуляризирующие алгоритмы. В классической монографии [3] разработаны прямые методы решения задачи (1.1) с линейными ограничениями, которые составляют эффективный аппарат построения приближенного решения при выполнении условий корректности Адамара. Однако в общей ситуации, даже в условиях существования и единственности решения, для этих методов может нарушаться непрерывная зависимость решения от входных данных (неустойчивость).

Автор признателен В. В. Беляеву за реализацию численного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васин В. В.** Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 312 с.
2. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1995. 255 p.
3. **Lawson C. T., Hansen R. J.** Solving least squares problem. Philadelphia: SIAM, 1995. 337 p.

4. **Fejér L.** Über die Lage der Nullstellen fon Polinomen,die aus Minimumforderung gewisser Art entspringen // Math. Ann. 1922. Bd 85, № 1. S. 41–48. doi: 10.1007/BF01449600
5. **Motzkin T. S., Schoenberg J. J.** The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, no. 3. P. 393–404. doi: 10.4153/CJM-1954-038-x
6. **Agmon S.** The relaxation method for linear inequality // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, no. 3. P. 382–392. doi: 10.4153/CJM-1954-037-2
7. **Еремин И.И.** Обобщение релаксационного метода Моцкина — Агмона // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 2. С. 183–187.
8. **Еремин И.И.** Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 2. С. 217–234.
9. **Еремин И. И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1998. 247 с.
10. **Еремин И. И.** Системы линейных неравенств и линейная оптимизация. Науч. издание. Екатеринбург: Изд-во РАН, 2007. 238 с.
11. **Vasin V. V., Eremin I. I.** Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications. Berlin; NY: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.
12. **Васин В. В.** Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 22, № 7. С. 971–980.
13. **Eicke B.** Konvex-restringierte schlechtgestellte Probleme und ihre Regularizierung durch Iterationverfahren. Berlin: Dr. Diss., 1991.
14. **Martinet B.** Determination approachee d'un point fixe d'une applications pseudo-contractante // Paris: C. R. Acad. Sci. 1972. Vol. 274. P. 163–175.
15. **Opial Z.** Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 4. P. 591–597. doi: 10.1090/S0002-9904-1967-11761-0
16. **Halperin B.** Fixed points of nonexpansive maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 957–961. doi: 10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
17. **Вайникко Г. М.** Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач // Автоматика и телемеханика. 1980. № 3. С. 84–92.
18. **Карманов В. Г.** Математическое программирование. М.: Физматлит, 2008. 260 с.
19. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 127 с.

Поступила 19.02.2023
После доработки 1.03.2023
Принята к публикации 6.03.2023

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: vasin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Vasin V.V. *Osnovy teorii nekorrektnykh zadach* [Fundamentals of the theory of ill-posed problems]. Novosibirsk, Publ. of Syberian Branch of Russian Acad. Sci., 2020, 312 p. ISBN 978-5-7692-1673-2 .
2. Vasin V.V., Ageev A. L. *Ill-posed problems with a priori information.* Utrecht, VSP Publ., 1995, 255 c. ISBN: 906764191X. Original Russian text was published in Vasin V.V., Ageev A.L., *Nekorrektnye zadachi s apriornoi informatsiei*, Yekaterinburg, Ural Publishing House “Nauka”, 1993, 264 p. ISBN: 5-7691-0390-6 .
3. Lawson C.T., Hanson R.J. *Solving least squares problem.* Philadelphia, SIAM, 1995, 337 p. ISBN: 0898713560 .
4. Fejér L. Über die Lage der Nullstellen fon Polinomen, die aus Minimumforderung gewisser Arten entspringen. *Math. Ann.*, 1922, vol. 85, no. 1, pp. 41–48. doi: 10.1007/BF01449600
5. Motzkin T.S., Schoenberg J.J. The relaxation method for linear inequalities. *Canad. J. Math.*, 1954, vol. 6, no. 3, pp. 393–404. doi: 10.4153/CJM-1954-038-x

6. Agmon S. The relaxation method for linear inequality. *Canad. J. Math.*, 1954, vol. 6, no. 3. pp. 382–392. doi: 10.4153/CJM-1954-037-2
7. Eremin I.I. Generalization of the relaxation method of Motzkin — Agmon. *Uspekhi Matem. Nauk*, 1965, vol. 20, no. 2, pp. 183–187 (in Russian).
8. Eremin I.I. Methods of fejer's approximations in convex programming. *Math. Notes*, 1968, vol. 3, no. 2, pp. 139–149. doi: 10.1007/BF01094336
9. Eremin I.I. *Theory of linear optimization*, Berlin, Walter de Gruyter, 2002, 248 p. ISBN: 906764353X. Original Russian text was published in Eremin I.I., *Teoriya lineinoi optimizatsii*, Yekaterinburg, Izd-vo UrO RAN, 1998, 247 p.
10. Eremin I.I. *Sistemy lineinyh neravenstv i lineinaya optimizaziya* [Systems of linear inequalities and linear optimization], Yekaterinburg, Izd-vo RAN, 2007, 238 p. ISBN: 5-7691-1822-9.
11. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and Applications*, Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2009, 155 p. ISBN: 3110218186. Original Russian text was published in Vasin V.V., Eremin I.I., *Operatory i iteratsionnye protsessy feierovskogo tipa*, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2005, 200 p. ISBN: 5-93972-427-2.
12. Vasin V.V. Iterative methods for solving ill-posed problems with a priori information in Hilbert spaces. *USSR Comput. Math and Math. Phys.*, 1988, vol. 28, no. 4, pp. 6–13. doi: 10.1016/0041-5553(88)90104-8
13. Eicke B. Konvex-restringierte schlechtgestellte Probleme und ihre Regularizierung durch Iterationverfahren. Tech. Univ. Berlin, Dr. Diss., 1991.
14. Martinet B. Determination approachee d'un point fixe d'une applications pseudo-contractante. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1972, vol. 274, pp. 163–175.
15. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 4, pp. 591–597. doi: 10.1090/S0002-9904-1967-11761-0
16. Halpern B. Fixed points of nonexpansive maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 6, pp. 957–961. doi: 10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
17. Vainikko G.M. Error estimates for the method of successive approximation for ill-posed problems. *Autom. Remote Control*, 1980, vol. 41, no. 3, pp. 356–363.
18. Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming], Moscow, Fizmatlit, 2008, 260 p. ISBN: 978-5-9221-0983-3.
19. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V. *Iterativnye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Iterative methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka publ., 1989, 127 p. ISBN: 5-02-013960-2.

Received February19, 2023
Revised March 1, 2023
Accepted March 6, 2023

Vladimir Vasilievich Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: vasin@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. V. Vasin. Fejér-type iterative processes in the constrained quadratic minimization problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 26–41.