ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.16 + 519.85

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ АСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ ГРАФА ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ[1]

М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина, К. В. Рыженко

В недавних работах О. Свенссона и В. Трауб впервые обоснована аппроксимируемость асимметричной задачи коммивояжера (ATSP) в классе алгоритмов с фиксированными гарантиями точности. Как и знаменитый алгоритм Кристофидеса — Сердюкова для симметричных маршрутных задач, данные прорывные результаты, применяемые в качестве “черного ящика”, позволили разработать первые полиномиальные приближенные алгоритмы с константными факторами аппроксимации для серии близких комбинаторных задач. Одновременно выявились задачи, в которых этот простой подход, основанный на сведении исходной задачи к одной или нескольким вспомогательным постановкам задачи коммивояжера, не приводит к успеху. В данной статье подход Свенссона — Трауб распространяется на более широкий класс задач о покрытии минимального веса взвешенного ориентированного графа ограниченным сверху числом циклов. В частности, впервые показывается, что задача о покрытии графа не более чем k циклами допускает полиномиальную аппроксимацию с константной точностью $\max\{22+\varepsilon, 4+k\}$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Ключевые слова: цикловое покрытие графа, асимметричная задача коммивояжера, приближенный алгоритм с константным фактором аппроксимации.

M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina, K. V. Ryzhenko. Polynomial approximability of the asymmetric problem of covering a graph by a bounded number of cycles.

Recently, O. Svensson and V. Traub provided the first proof of the polynomial-time approximability with fixed ratios for the Asymmetric Traveling Salesman Problem (ATSP). Just as the famous Christofides–Serdyukov algorithm for the symmetric routing problems, this breakthrough result, applied as a “black box,” has opened an opportunity for developing the first polynomial-time approximation algorithms with constant ratios for several related combinatorial problems. At the same time, problems have been revealed in which this simple approach, based on reducing a given instance to one or more auxiliary ATSP instances, does not succeed. In the present paper, we extend the Svensson–Traub approach to the wider class of problems about finding a minimum-weight cycle cover of an edge-weighted directed graph with an additional constraint on the number of cycles. In particular, it is shown for the first time that the Minimum Weight Cycle Cover Problem with at most k cycles admits a polynomial-time approximation with constant ratio $\max\{22+\varepsilon, 4+k\}$ for arbitrary $\varepsilon > 0$.

Keywords: cycle cover of a graph, asymmetric traveling salesman problem, fixed ratio approximation algorithm.

MSC: 68W25

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-261-273

Введение

Задача о *цикловом покрытии* графа (Cycle Cover problem, CCP) — известная задача комбинаторной оптимизации (см., например, [1]), постановки которой близки ряду классических комбинаторных задач, в особенности задаче коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) и задаче о маршрутизации транспортных средств (Vehicle Routing Problem, VRP).

По-видимому, впервые задача о покрытии графа минимальным числом вершинно непересекающихся циклов была введена в известной работе [2] в качестве естественного обобщения задачи TSP. Большинство известных постановок задачи могут рассматриваться как расширения классической линейной задачи о назначениях (Linear Sum Assignment Problem, LSAP), заданные на подмножествах симметрической группы S_n. Во всех этих задачах критерием оптимизации является *стоимость* искомой перестановки, совпадающая с весом соответствующих

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 22-21-00672, https://rscf.ru/project/22-21-00672/ .

маршрутов в заданном графе, а допустимые множества стеснены дополнительными ограничениями на цикловые разложения рассматриваемых перестановок, задаваемые как правило в терминах *размера* допустимых циклов или их *числа*. Так, в работе [3] исследуется полиномиальная аппроксимируемость задачи Min-k-CCP о дизъюнктном покрытии графа циклами с нижней границей на длину циклов k; в статьях [4–6] получена серия алгоритмических результатов для экстремального покрытия графа циклами, длины которых принадлежат заданному множеству $L \subset \mathbb{N}$ (Min-L-CCP).

Предметом исследования данной статьи является задача о покрытии минимальной стоимости (ор)графа не более чем k циклами (Min-k-SCCP). Интерес к алгоритмическому анализу данной задачи объясняется ее "промежуточным" положением между NP-трудной в сильном смысле задачей коммивояжера (получаемой при $k = 1$) и полиномиально разрешимой задачей о назначениях (при $k = n$).

Как известно (см. [7; 8]), симметричная задача Min-k-SCCP, задаваемая на неориентированных графах, при произвольном фиксированном $k \geqslant 1$ наследует основные сложностные и аппроксимационные свойства задачи коммивояжера. Задача NP-трудна в сильном смысле как в общем случае, так и в чрезвычайно специфических постановках, например, на евклидовой плоскости. Метрическая постановка задачи обладает полиномиальными алгоритмами с фиксированными факторами аппроксимации. В евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности задача аппроксимируема в классе полиномиальных приближенных схем (PTAS) [9]. Отдельно следует отметить результаты в области асимптотически точных алгоритмов для постановок задачи на случайных графах [10] и евклидовых постановок на максимум [11].

С другой стороны, аппроксимационные свойства асимметричной версии задачи, как и многих родственных задач комбинаторной маршрутизации, долгое время оставались слабо изученными. Например, в то время как аппроксимируемость метрической задачи коммивояжера в классе полиномиальных алгоритмов с фиксированными гарантиями известна давно, благодаря классическим результатам Н. Кристофидеса [12], А. Сердюкова [13] и Л. Уолси [14], для асимметричной задачи коммивояжера (ATSP) наилучшим результатом до недавнего времени оставался $O(\log n/ \log\log n)$-приближенный алгоритм (см. [15]).

В недавних работах О. Свенссона, Я. Тарнавского и Л. Вега [16], В. Трауб и Й. Вигена [17] предложен революционный подход к аппроксимации ATSP с неравенством треугольника, обеспечивший появление для этой задачи первого полиномиального алгоритма с константным фактором аппроксимации. Применение этого алгоритма в качестве "черного ящика" позволило обосновать аппроксимируемость с фиксированными гарантиями точности для ряда асимметричных версий близких комбинаторных задач: задач о штейнеровском цикле и сельском почтальоне, задачи маршрутизации транспортных средств (см. [18]) и задачи коммивояжера с призами (см. [19]). Одновременно выявились задачи, аппроксимируемость которых в классе таких алгоритмов путем сведения к одной или нескольким вспомогательным постановкам задачи ATSP обосновать не удается.

В данной работе подход Свенссона — Трауб распространяется на более широкий класс комбинаторных задач, включающий задачи Min-k-SCCP, и приводится первый приближенный алгоритм для этого класса задач с фиксированным фактором аппроксимации $\max\{22+\varepsilon, 4+k\}$ при произвольном $\varepsilon > 0$.

1. Постановка задачи

Зададимся произвольным ориентированным графом $G = (V, E)$ и весовой функцией $c\colon E \to \mathbb{R}_+$, определяющей стоимость $c_e = c(e) = c(u, v)$ перемещения по произвольной дуге $e = (u, v)$ графа G. Всюду ниже полагаем, что функция c удовлетворяет *неравенству тре-*

угольника, т. е. для произвольных дуг (u,v), (v,w) и (u,w)

$$c(u,v)+c(v,w)\geqslant c(u,w). \tag{1}$$

Произвольному подмультимножеству $E'\subset E$ (подмультиграфу (V',E')) сопоставим вектор инцидентности $x\colon E\to\mathbb{Z}_+$, задающий кратность вхождения произвольного ребра e в E', и стоимость $c(E')=\sum\limits_{e\in E}c_ex_e$.

З а д а ч а Min-k-SCCP. Задана упорядоченная пара (G,c). Требуется построить остовный эйлеров подмультиграф без изолированных вершин $(V,F)\subset G$ минимальной стоимости $c(F)$, число компонент связности которого не превосходит k.

Заметим, что приведенная постановка задачи Min-k-SCCP является немного более общей в сравнении с исследовавшейся ранее в работах [8; 10] и совпадает с ней при условии полноты графа G и ограничении (1). Кроме того, легко видеть, что классическая задача ATSP эквивалентна постановке Min-k-SCCP при $k=1$.

Полагая без ограничения общности $|V|>k$, введем в рассмотрение специализированную постановку задачи Min-k-SCCP$_S$, условие которой задается тройкой (G,c,S), где $S\subset V$, $|S|=k$, а множество допустимых подграфов стеснено дополнительным ограничением: каждая компонента связности допустимого подграфа имеет непустое пересечение с подмножеством S.

Воспользуемся стандартными обозначениями $\delta^+(U)=\{(v,u)\in E\colon v\in U,\ u\notin U\}$, $\delta^-(U)=\delta^+(V\setminus U)$ для исходящего и входящего разрезов, порождаемых непустым подмножеством $U\subset V$, и их объединения $\delta(U)=\delta^+(U)\cup\delta^-(U)$, а также сокращенной записью $\delta(v)=\delta(\{v\})$ для $U=\{v\}$. Сопоставим задаче Min-k-SCCP$_S$ приведенную ниже модель целочисленного линейного программирования (MILP-модель): найти

$$\min\sum_{e\in E}c_ex_e \qquad \text{при ограничениях} \tag{2}$$

$$x(\delta^-(v))-x(\delta^+(v))=0 \qquad (v\in V), \tag{3}$$

$$x(\delta(U))\geqslant 2 \qquad ((\varnothing\neq U\subset V\setminus S)\vee(U=\{u\}\colon u\in S)), \tag{4}$$

$$x_e\in\mathbb{Z}_+ \qquad (e\in E), \tag{5}$$

в которой ограничения (3) обеспечивают эйлеровость подграфа, а (4) — отсутствие изолированных вершин и верхнюю оценку числа компонент связности.

Через OPT и OPT(S) обозначим оптимальные значения постановки (G,c) исходной задачи Min-k-SCCP и соответствующих вспомогательных постановок (G,c,S) задачи Min-k-SCCP$_S$, параметризованных k-элементными подмножествами множества V.

Утверждение 1. *Для произвольного фиксированного k наличие полиномиального α-приближенного алгоритма для задачи* Min-k-SCCP$_S$ *влечет полиномиальную аппроксимируемость с фактором α для задачи* Min-k-SCCP.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив α-приближенный алгоритм, сопоставим каждой из вспомогательных постановок (G,c,S) эйлеров подграф $(V,F(S))$ так, что $\mathrm{OPT}(S)\leqslant c(F(S))\leqslant \alpha\,\mathrm{OPT}(S)$.

Постановка (G,c) задачи Min-k-SCCP разрешима в силу сильной связности графа G. Пусть $H^*=(V,F^*)$ — произвольное оптимальное решение (G,c) и S^* — k-элементное подмножество, имеющее непустое пересечение с множеством вершин каждой компоненты связности подграфа H^*. Тогда для подграфа $(V,F)=\arg\min\{c(F(S))\colon S\subset V,\ |S|=k\}$ имеем

$$\mathrm{OPT}\leqslant c(F)\leqslant c(F(S^*))\leqslant\alpha\,\mathrm{OPT}(S^*)\leqslant\alpha\,c(F^*)=\alpha\,\mathrm{OPT}\,.$$

Поскольку $\bigl|\{S\subset V\colon |S|=k\}\bigr|=O(n^k)$, задача Min-$k$-SCCP обладает полиномиальным приближенным алгоритмом с фактором аппроксимации α при произвольном фиксированном k. □

Для описания приближенного алгоритма для задачи Min-k-SCCP$_S$ введем в рассмотрение вещественную релаксацию $\mathcal{P}$ задачи (2)–(5) и двойственную ей задачу линейного программирования $\mathcal{D}$: найти

$$\begin{aligned} \max \sum_{\varnothing \neq U \in \mathcal{V}} 2y_U & \qquad \text{при ограничениях} \\ a_w - a_v + \sum_{U \in \mathcal{V}\colon\, e \in \delta(U)} y_U \leqslant c(e) & \qquad (e = (v,w) \in E), \\ y_U \geqslant 0 & \qquad (U \in \mathcal{V}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{V} = \{U\colon \varnothing \neq U \subset V \setminus S\} \cup \{\{u\}\colon u \in S\}$. При наших допущениях обе задачи разрешимы, и их оптимальные значения $\mathrm{OPT}(\mathcal{P})$ и $\mathrm{OPT}(\mathcal{D})$ совпадают.

2. Сведение к сильно ламинарной постановке

Следуя подходу Свенссона — Трауб, сведем задачу поиска приближенных решений задачи Min-k-SCCP$_S$ к задаче аппроксимации специальных постановок этой задачи, именуемых *сильно ламинарными*.

Семейство $\mathcal{L}$ подмножеств некоторого конечного множества V называется *ламинарным*, если для произвольных $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ выполняется одна из следующих альтернатив: $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$. Ламинарные семейства обладают сравнительно небольшой мощностью $|\mathcal{L}| = O(|V|)$ (см., например, [16]).

Сильно ламинарной постановкой задачи Min-k-SCCP$_S$ называем кортеж $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$, обладающий следующими свойствами:

$G = (V, E)$ — сильно связный ориентированный граф, $|V| > k$;

S — k-элементное подмножество V;

$\mathcal{L}$ — ламинарное семейство подмножеств $V \setminus S$, для каждого элемента L которого индуцированный подграф $G[L]$ сильно связен;

$x\colon E \to \mathbb{R}_+$ — решение подсистемы (3)–(4): $x(\delta(L)) = 2$ при каждом $L \in \mathcal{L}$;

y — отображение $\mathcal{L} \to \mathbb{R}_+$.

Произвольный кортеж $\mathcal{I}$ индуцирует постановку $(G, \bar{c}, S)$ задачи Min-k-SCCP$_S$, в которой

$$\bar{c}_e = \bar{c}\,(e) = \sum_{L \in \mathcal{L}\colon\, e \in \delta(L)} y_L \qquad (e \in E). \tag{6}$$

Определим $y'\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ соотношением $y'_U = \begin{cases} y_U, & \text{если } \ U \in \mathcal{L}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

По построению, x и $(0, y')$ удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости, следовательно они оптимальны в индуцированных задачах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{D}$ (договоримся обозначать их $\mathcal{P}_{ind}$ и $\mathcal{D}_{ind}$) и

$$\mathrm{LP}(\mathcal{I}) = \mathrm{OPT}(\mathcal{P}_{ind}) = \sum_{e \in E} \bar{c}_e x_e = \sum_{L \in \mathcal{L}} 2y_L = \mathrm{OPT}(\mathcal{D}_{ind}). \tag{7}$$

Понятие сильно ламинарной постановки Min-k-SCCP$_S$ является естественным обобщением аналогичного понятия для задачи ATSP (см., например, [17]) и совпадает с ним при $k = 1$. Договоримся использовать в этом случае более краткое обозначение $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, x, y)$.

Теорема 1. *Существование полиномиального алгоритма, находящего для некоторого $\alpha \geqslant 1$ приближенное решение произвольной сильно ламинарной постановки $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, l, S, x, y)$, $l \leqslant k$, стоимости, не превосходящей $\alpha \sum_{e \in E} \bar{c}_e x_e$, влечет возможность построения за полиномиальное время решения (V, F) стоимости $c(F) \leqslant \alpha\, \mathrm{OPT}(\mathcal{P})$ для произвольной постановки задачи* Min-k-SCCP$_S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную постановку (G, c, S) задачи Min-k-SCCP$_S$. Найдем оптимальное решение x^* задачи $\mathcal{P}$. Несмотря на экспоненциальное число ограничений задачи, поиск такого решения может быть произведен за полиномиальное время, например, методом эллипсоидов с полиномиальным оракулом [20]. Кроме того, без ограничения общности всегда можно полагать, что

$$\big|\{U \in \mathcal{V}\colon x^*(\delta(U)) = 2\}\big| = \mathrm{poly}(n). \tag{8}$$

По построению граф $G' = (V, E')$, в котором $E' = \{e \in E\colon x^* > 0\}$ обладает не более чем k компонентами сильной связности $W_1, \ldots, W_p$ для $p \leqslant k$. Кроме того, всегда существует разбиение $S_1 \cup \ldots \cup S_p$ множества S, для которого $S_i \subset W_i$ при произвольном $i = \overline{1,p}$. Через $x'[i]$ обозначим сужение x^* на $E'(W_i)$.

Нетрудно убедиться, что $x'[i]$ является оптимальным решением вещественной релаксации $\mathcal{P}_i$ модели (2)–(5), соответствующей постановке (W_i, k_i, S_i) для $k_i = |S_i|$. В самом деле, соотношения

$$x'[i](\delta^+(v)) = x'[i](\delta^-(v)) \quad (v \in V(W_i),$$
$$x'[i](\delta(U)) \geqslant 2 \quad (U \in \mathcal{V}_i),$$

где $\mathcal{V}_i = \{U\colon \varnothing \neq U \subset V(W_i) \setminus S_i\} \cup \{\{u\}\colon u \in S_i\}$, непосредственно следуют из выбора $x'[i]$ в качестве сужения x^* на компоненту связности W_i. Оптимальность $x'[i]$ в задаче $\mathcal{P}_i$ следует из оптимальности x^* (в задаче $\mathcal{P}$) и очевидной декомпозиции

$$\mathrm{OPT}(\mathcal{P}) = \sum_{e \in E} c_e x^*_e = \sum_{i=1}^{p} \sum_{e \in E'(W_i)} c_e\,(x'_e[i]). \tag{9}$$

Для каждого $i = \overline{1,p}$ найдем оптимальное решение $(a^*[i], y^*[i])$ двойственной задачи $\mathcal{D}_i$. В силу (8) эти вычисления также могут быть произведены за полиномиальное время. Применяя подход [21] и рассуждения, проведенные в [17, Lemma 3], каждому решению $(a^*[i], y^*[i])$ сопоставим оптимальное решение $(a'[i], y'[i])$ задачи $\mathcal{D}_i$, компонента $y'[i]$ которого обладает ламинарным носителем $\mathcal{L}_i = \{U \in \mathcal{V}_i\colon (y'_U[i]) > 0\}$, и для произвольного $L \in \mathcal{L}_i$ подграф $W_i[L]$ сильно связен.

Обозначив через $y''[i]$ сужение $y'[i]$ на $\mathcal{L}_i$, введем в рассмотрение сильно ламинарную постановку $\mathcal{I}_i = (W_i, \mathcal{L}_i, k_i, S_i, x'[i], y''[i])$. По построению допустимые множества задач $\mathcal{P}_i$ и $(\mathcal{P}_i)_{ind}$ совпадают, а коэффициенты целевых функций c_e и $\bar{c}_e$ для произвольной дуги $e = (v, w) \in E'(W_i)$ связаны соотношением $c_e = \bar{c}_e + (a'[i])_w - (a'[i])_v$, следующим из (6) и условий дополняющей нежесткости (для пар оптимальных решений $(x'[i], (a'[i], y'[i]))$ и $(x'[i], (0, y'[i]))$. Как следствие, для произвольного допустимого решения χ обеих задач имеем

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E'(W_i)} c_e \chi_e &= \sum_{e=(v,w) \in E'(W_i)} (\bar{c}_e + (a'_w[i]) - (a'_v[i]))\chi_e \\ &= \sum_{e \in E'(W_i)} \bar{c}_e \chi_e + \sum_{u \in V(W_i)} (\chi(\delta^-(u)) - \chi(\delta^+(u)))(a'[i])_u = \sum_{e \in E'(W_i)} \bar{c}_e \chi_e.\end{aligned} \tag{10}$$

По условию за полиномиальное время для сильно ламинарной постановки $\mathcal{I}_i$ может быть найдено решение (W_i, F_i) стоимости $\bar{c}(F_i) \leqslant \alpha\,\mathrm{LP}(\mathcal{I}_i)$, что в силу соотношения (10) влечет $c(F_i) \leqslant \alpha\,\mathrm{OPT}(\mathcal{P}_i)$. Таким образом, подграф $(V, F_1 \cup \ldots \cup F_p)$ — искомое приближенное решение стоимости

$$\sum_{i=1}^{p} c(F_i) \leqslant \alpha\,\mathrm{OPT}(\mathcal{P}) = \alpha \sum_{i=1}^{p} \mathrm{OPT}(\mathcal{P}_i)$$

исходной постановки (G, c, S), где последнее равенство непосредственно следует из соотношения (9). $\square$

Теорема 1 позволяет в дальнейшем все рассуждения, касающиеся аппроксимации задачи Min-k-SCCP$_S$, проводить в терминах сильно ламинарных постановок задачи.

3. Аппроксимируемость сильно ламинарных постановок

В этом разделе предлагается приближенный алгоритм для сильно ламинарных постановок задачи Min-k-SCCP$_S$. Пусть $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$ — произвольная сильно ламинарная постановка с индуцированной весовой функцией c. Нам потребуется ряд предварительных сведений и результатов.

3.1. Предварительные результаты

Пусть $u, v \in V$ и $W \in \mathcal{L} \cup \{V\}$ — минимальное по включению множество, содержащее обе вершины. Путь $P_{u,v}$, соединяющий вершины u и v в (сильно связном) подграфе $G[W]$ графа G и посещающий каждое подмножество $L \in \mathcal{L}$ не более одного раза, называется *$\mathcal{L}$-путем.*

Как следует из [17, Lemmas 7, 9], для произвольных вершин u и v такой путь $P_{u,v}$ может быть найден за полиномиальное время, и его стоимость определяется по формуле

$$c(E(P_{u,v})) = \sum_{L \in \mathcal{L}_W :\ L \cap V(P_{u,v}) \neq \varnothing} 2y_L - \sum_{L \in \mathcal{L}_W :\ u \in L} y_L - \sum_{L \in \mathcal{L}_W :\ v \in L} y_L, \tag{11}$$

где $\mathcal{L}_W = \{L \in \mathcal{L} \colon L \subset W\}$. Введем обозначения:

$$D_W(u, v) = c(E(P_{u,v})) + \sum_{L \in \mathcal{L}_W :\ u \in L} y_L + \sum_{L \in \mathcal{L}_W :\ v \in L} y_L \tag{12}$$

и

$$D_W = \max\{D_W(u, v) \colon u, v \in W\}. \tag{13}$$

Хребтом называется связный эйлеров мультиподграф $B \subset G$, в котором $V(B) \cap L \neq \varnothing$ для произвольного $L \in \mathcal{L}_{\geqslant 2} = \{L \in \mathcal{L} \colon |L| \geqslant 2\}$. Упорядоченная пара $(\mathcal{I}, B)$ называется *вертебральной.*

Предлагаемый нами подход существенно опирается на возможность эффективной достройки заданного хребта до связного остовного эйлерового подмультиграфа графа G, стоимость которого допускает теоретическую верхнюю оценку. Предложенный в работе [17] алгоритм, выполняющий такую достройку для сильно ламинарной постановки задачи ATSP (совпадающей с аналогичной постановкой Min-k-SCCP$_S$ при $k = 1$) и развивающий результаты [16; 22], назван авторами (κ, η)-алгоритмом.

Алгоритм, находящий за полиномиальное время для $\kappa, \eta \geqslant 0$ и произвольного представителя $(\mathcal{I}, B)$ заданного класса вертебральных пар мультимножество дуг F' стоимости

$$c(F') \leqslant \kappa\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}) + \eta \sum_{v \in V \setminus V(B) \colon \{v\} \in \mathcal{L}} 2y_{\{v\}}, \tag{14}$$

для которого $(V, E(B) \cup F')$ является эйлеровым связным подмультиграфом графа G, называется (κ, η)-*алгоритмом.*

Как показано в [17, Theorems 16, 35], для произвольного $\varepsilon > 0$ и класса вертебральных пар $(\mathcal{I}, B)$, где $\mathcal{I}$ — сильно ламинарная постановка задачи ATSP и B — произвольный хребет в графе G, существует $(2, 14 + \varepsilon)$-алгоритм. Наш подход опирается на немного более общий результат.

Утверждение 2. *Для произвольных $k > 1$, $\varepsilon > 0$ и класса вертебральных пар $(\mathcal{I}, B)$, где $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$ — сильно ламинарная постановка задачи* Min-k-SCCP$_S$ *и B — произвольный хребет, содержащий подмножество S, существует (κ, η)-алгоритм при $\kappa = 2$ и $\eta = 14 + \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения может быть получено по аналогии с рассуждениями, проведенными в работе [17] при доказательстве теорем 16 и 35. В самом деле, результат теоремы 35 о существовании (κ,η)-алгоритма для вертебральных пар при заданных значениях параметров $\kappa,\eta > 0$ следует из существования (α,κ,β)-алгоритма для вспомогательной задачи Subtour Cover Problem для подходящих положительных значений α и β. В свою очередь, обоснование существования такого алгоритма для $\alpha = 3$, $\kappa = 2$ и $\beta = 1$, проведенное в доказательстве теоремы 16, существенно опирается на технику перенаправления и округления потоков (см. [23], Corollary 12.2b), которая может быть применена при выполнении условия $x(\delta(U)) \geqslant 2$ для произвольного непустого подмножества $U \subset V \setminus V(B)$.

В задаче ATSP, вопросам аппроксимации которой посвящена работа [17], данное соотношение выполнено по условию. В задаче Min-k-SCCP$_S$ обеспечивается его справедливость введением дополнительного условия $S \subset B$. $\square$

3.2. Алгоритм для сильно ламинарной постановки

В этой работе предлагается алгоритм $\mathcal{A}$, который находит решение для сильно ламинарной постановки Min-k-SCCP$_S$.

Алгоритм $\mathcal{A}$ принимает на вход сильно ламинарную постановку Min-k-SCCP$_S$, а в качестве параметров — алгоритм для вертебральных пар $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$, достраивающий хребет B до остовного связного эйлерова подграфа, и алгоритм Свенссона — Трауб $\mathcal{A}^*_{ATSP}$ (см. [17], Algorithm 1) для поиска решений вспомогательных сильно ламинарных постановок ATSP. Результатом работы алгоритма $\mathcal{A}$ является связный эйлеров подмультиграф (V,F) графа G.

Основная идея алгоритма $\mathcal{A}$ состоит в построении вертебральной пары, соответствующей исходной постановке $\mathcal{I}$, и применении к построенной паре алгоритма $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$.

Если получающийся в результате подмультиграф не окажется остовным, он пополняется вспомогательными замкнутыми маршрутами и $\mathcal{L}$-путями.

На шаге 1 алгоритма $\mathcal{A}$ при создании заготовки $\mathcal{B}$ будущего хребта выбираются вершины $u^*, v^* \in V$, для которых $D_V(u^*,v^*) = D_V$ (см. (11)–(13)).

На шаге 2 алгоритма строится $\mathcal{L}$-путь P_{u^*,v^*} и v^*-u^*-маршрут, состоящий из $\mathcal{L}$-путей и посещающий вершины множества S в произвольном порядке. Объединение построенных путей образует связный эйлеров подграф $\mathcal{B}$ в графе G:

$$\mathcal{B} = P_{u^*,v^*} \cup P_{v^*,v_1} \cup P_{v_1,v_2} \cup \ldots \cup P_{v_k,u^*}.$$

Далее на шаге 4 проверяется условие, является ли $\mathcal{B}$ хребтом в постановке $\mathcal{I}$, эквивалентное равенству $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}} = \varnothing$ для множества $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}$, определенного на шаге 3. По построению множество $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}$ состоит из максимальных по включению $L \in \mathcal{L}_{\geqslant 2}$, для которых $L \cap V(\mathcal{B}) = \varnothing$.

Если $\mathcal{B}$ является хребтом, то $(\mathcal{I},\mathcal{B})$ — вертебральная пара, передав которую $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$ на шаге 13, алгоритм находит искомое решение $(V, E(\mathcal{B})\dot\cup F')$.

В противном случае алгоритм на шаге 5 формирует новую постановку $\mathcal{I}'$, преобразуя граф G в граф G', в котором произвольное $L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}$ сжимается в вершину v_L, строит новое ламинарное семейство $\mathcal{L}'$ и определяет веса его элементов y'. По построению пара $(\mathcal{I}',\mathcal{B})$ является вертебральной. На шаге 6 алгоритм строит эйлерово подмножество F', применяя к ней алгоритм $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$.

Возвращаясь к исходной постановке $\mathcal{I}$, на каждой итерации цикла 7–10 применяется алгоритм $\mathcal{A}^*_{ATSP}$ для поиска решения (L, F_L) вспомогательной задачи ATSP внутри подмножества $L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}$, и строится дополнительный $\mathcal{L}$-путь P_L для сохранения эйлеровости результирующего решения. Объединяя на шаге 11 построенные подмультиграфы, включая пути P_L, алгоритм $\mathcal{A}$ завершает построение искомого решения

$$\Big(V, \Big(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (F_L \cup P_L)\Big)\dot\cup E(\mathcal{B})\dot\cup F'\Big).$$

Algorithm $\mathcal{A}$

Input: Сильно ламинарная постановка $\mathcal{I} = (G, \mathcal{L}, k, S, x, y)$

Parameters: (κ, η)-алгоритм для вертебральных пар $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$;
алгоритм $\mathcal{A}^*_{ATSP}$;

Output: связный эйлеров подграф (V, F) графа G

1: Выбрать $u^*, v^* \in V$ так, что $D_V(u^*, v^*) = D_V$;
2: произвольным образом пронумерав вершины $v_1, \ldots, v_k$ множества S, построить $\mathcal{L}$-пути P_{u^*,v^*}, P_{v^*,v_1}, $P_{v_i,v_{i+1}}$, $i = \overline{1, k-1}$ и P_{v_k,u^*} и эйлеров подграф $\mathcal{B}$, являющийся их объединением;
3: задать $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}} = \big\{L \in \mathcal{L}_{\geqslant 2} \colon (V(\mathcal{B}) \cap L = \varnothing) \wedge (\forall U \in \mathcal{L} \colon L \subset U)(V(\mathcal{B}) \cap U \neq \varnothing)\big\}$.
4: **if** $\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}} \neq \varnothing$ **then**
5: сформировать сильно ламинарную постановку $\mathcal{I}' = (G', \mathcal{L}', k, S, x', y')$:
a: построить (мульти)граф $G' = (V', E')$, сжав каждое подмножество $L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}$ в вершину v_L;
b: задать ламинарное семейство

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{L \in \mathcal{L} \colon (\exists U \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}})(L \subseteq U)\} \bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \{v_L\};$$

c: определить x' как сужение x на E' и $y' \colon \mathcal{L}' \to \mathbb{R}_+$ соотношением:

$$y'_U = \begin{cases} y_U, & \text{если} \quad U \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}', \\ y_L + D_L/2, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{15}$$

6: Применив алгоритм $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$ к вертебральной паре $(\mathcal{I}', \mathcal{B})$, получить эйлерово мультимножество ребер F' (в графе G').
7: **for all** $L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}$ **do**
8: применив алгоритм $\mathcal{A}^*_{ATSP}$ к $(\mathcal{I}, L)$, получить мультимножество дуг F_L;
9: построить $\mathcal{L}$-путь P_L для сохранения эйлеровости.
10: **end for**
11: Положить $F = \Big(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (F_L \cup P_L)\Big) \dot{\cup} E(\mathcal{B}) \dot{\cup} F'$.
12: **else**
13: Применив алгоритм $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$ к вертебральной паре $(\mathcal{I}, \mathcal{B})$, получить F' и положить $F = E(\mathcal{B}) \dot{\cup} F'$.
14: **end if**
15: **return** (V, F).

Теорема 2. *Пусть для заданных $\kappa, \eta \geqslant 0$ существует (κ, η)-алгоритм $\mathcal{A}_{(\kappa,\eta)}$. Тогда для произвольной сильно ламинарной постановки* Min-k-SCCP$_S$ *алгоритм $\mathcal{A}$ за полиномиальное время находит решение (V, F) стоимости*

$$c(F) \leqslant \begin{cases} (3\kappa + \eta + 2)\ \mathrm{LP}(\mathcal{I}) & \text{при} \quad k \leqslant 2\kappa + \eta, \\ (\kappa + k + 2)\ \mathrm{LP}(\mathcal{I}), & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду неотрицательности весовой функции c достаточно обосновать оценку (16) в случае, рассмотренном на шаге 11 алгоритма $\mathcal{A}$, где

$$F = \Big(\bigcup_{L \in \mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (F_L \cup P_L)\Big) \dot{\cup} E(\mathcal{B}) \dot{\cup} F'.$$

Оценим по отдельности стоимость каждого подмножества дуг, входящих в это объединение. Учитывая соотношения (11)–(13), имеем

$$c(E(\mathcal{B})) = c(E(P_{u^*,v^*})) + c(E(P_{v^*,v_1})) + \ldots + c(E(P_{v_k,u^*})) \leqslant (k + 2)\, D_V. \tag{17}$$

По определению (κ,η)-алгоритма (соотношение (14)) для стоимости мультимножества F' справедливо неравенство

$$c(F') \leqslant \kappa\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}') + \eta \Big(\sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} 2y'_{\{v_L\}} + \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y'_{\{v\}} \Big).$$

Откуда с учетом (7) и (15) получаем

$$\begin{aligned} c(F') &\leqslant \kappa \Big(\sum_{L\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_L + \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (2y_L + D_L) \Big) + \eta \Big(\sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}} + \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (2y_L + D_L) \Big) \\ &= \kappa \sum_{L\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_L + (\kappa+\eta) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (2y_L + D_L) + \eta \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}}. \end{aligned}$$

Стоимость произвольного F_L, найденного на шаге 8, согласно [17, Lemma 12] оценивается следующим образом:

$$c(F_L) \leqslant (2\kappa+2)\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) + (\kappa+\eta)\, (\mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) - D_L) = (3\kappa+\eta+2)\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) - (\kappa+\eta)\, D_L,$$

где $\mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) = \sum_{U\in\mathcal{L}\colon U\subset L} 2y_U$.

Кроме того, стоимости дополнительных путей P_L в подграфах $G[L]$, восстанавливающих эйлеровость при объединении подмножеств F_L и F', учтены в оценках $c(F')$ и $c(F_L)$. Таким образом, для мультимножества $F'' = \big(\bigcup_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (F_L \cup P_L) \big) \dot\cup F'$ имеем

$$\begin{aligned} c(F'') = c(F') + \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} c(F_L) &\leqslant \kappa \sum_{L\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_L + (\kappa+\eta) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} (2y_L + D_L) \\ &+ \eta \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}} + (3\kappa+\eta+2) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) - (\kappa+\eta) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} D_L \\ &= \kappa \sum_{L\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_L + (\kappa+\eta) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} 2y_L + \eta \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}} + (3\kappa+\eta+2) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) \\ &= \kappa\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}) + \eta \Big(\sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} 2y_L + \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}} \Big) + (2\kappa+\eta+2) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L). \end{aligned}$$

Проведя рассуждения по аналогии с доказательством [17, Lemma 11], убедимся в справедливости неравенства

$$\sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} 2y_L + \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}} + \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) \leqslant \mathrm{LP}(\mathcal{I}) - D_V. \tag{18}$$

В самом деле, в силу (11)–(13)

$$\begin{aligned} \mathrm{LP}(\mathcal{I}) - \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} 2y_L - \sum_{v\notin V(B)\colon \{v\}\in\mathcal{L}\cap\mathcal{L}'} 2y_{\{v\}} - \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) &= \sum_{L\in\mathcal{L}\colon L\cap V(B)\neq\varnothing} 2y_L \\ \geqslant \sum_{L\in\mathcal{L}\colon L\cap V(P_{u^*,v^*})\neq\varnothing} 2y_L = D_V(u^*,v^*) = D_V. \end{aligned}$$

Как следует из неравенства (18),

$$\begin{aligned} c(F'') &\leqslant \kappa\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}) + \eta\, (\mathrm{LP}(\mathcal{I}) - D_V) + (2\kappa+2) \sum_{L\in\mathcal{L}_{\bar{\mathcal{B}}}} \mathrm{LP}(\mathcal{I}_L) \\ &\leqslant (3\kappa+\eta+2)\, \mathrm{LP}(\mathcal{I}) - (2\kappa+\eta+2)\, D_V. \end{aligned} \tag{19}$$

Комбинируя оценки (17) и (19), оценим стоимость построенного решения $F = E(\mathcal{B}) \dot\cup F''$:

$$c(F) = c(E(\mathcal{B})) + c(F'') \leqslant (k+2)\, D_V + (3\kappa + \eta + 2)\ \mathrm{LP}(\mathcal{I}) - (2\kappa + \eta + 2)\, D_V$$

$$= (3\kappa + \eta + 2)\ \mathrm{LP}(\mathcal{I}) + (k - (2\kappa + \eta))\, D_V.$$

Учитывая неравенство $D_V \leqslant \mathrm{LP}(\mathcal{I})$, выделим два возможных случая:

1) если $k \leqslant 2\kappa + \eta$, то $c(F) \leqslant (3\kappa + \eta + 2)\ \mathrm{LP}(\mathcal{I})$;

2) в противном случае $c(F) \leqslant (\kappa + k + 2)\ \mathrm{LP}(\mathcal{I})$. □

4. Результаты

Опираясь на доказанные выше утверждения, перейдем к обсуждению основных результатов данной статьи.

Теорема 3. *Для произвольных $k \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный алгоритм, сопоставляющий произвольной постановке (G, c, S) задачи* Min-k-SCCP$_S$ *приближенное решение (V, F_S) стоимости $c(F_S) \leqslant \alpha\ \mathrm{OPT}(\mathcal{P}_S)$, где $\mathcal{P}_S$ — вещественная релаксация* MILP*-модели* (2)–(5) *и*

$$\alpha = \begin{cases} 22 + \varepsilon, & \text{если} \quad k \leqslant 18 + \varepsilon, \\ 4 + k, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя доказательству теоремы 1, сопоставим заданной постановке задачи Min-k-SCCP$_S$ набор $\{\mathcal{I}_i \colon i = \overline{1,p},\ p \leqslant k\}$ сильно ламинарных постановок, соответствующих компонентам связности графа G'. По теореме 2 при наличии (κ, η)-алгоритма алгоритм $\mathcal{A}$ сопоставляет каждой постановке $\mathcal{I}_i$ приближенное решение, стоимость которого не превосходит $\max\{(3\kappa+\eta+2), (\kappa+k_i+2)\}\, LP(\mathcal{I}_i)$, объединение которых приводит к искомому приближенному решению (V, F_S) исходной задачи стоимости

$$c(F_S) \leqslant \max\{(3\kappa + \eta + 2), (\kappa + k + 2)\}\ \mathrm{OPT}(\mathcal{P}_S), \tag{21}$$

по теореме 1. Окончательная оценка (20) следует из утверждения 2 и (21). □

Теорема 4. *Для произвольных $k \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ задача* Min-k-SCCP *допускает аппроксимацию в классе α-приближенных полиномиальных алгоритмов, где α определяется по формуле* (20).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы непосредственно следует из утверждения 1 и теоремы 3.

Заключение

Данная статья развивает подход О. Свенссона и В. Трауб в области аппроксимируемости асимметричных маршрутных задач комбинаторной оптимизации. Полученные результаты впервые позволили обосновать аппроксимируемость задач о покрытии минимального веса реберно-взвешенного орграфа ограниченным числом циклов Min-k-SCCP при условии, что весовая функция удовлетворяет условию треугольника.

Заметим, что обоснованный в работе приближенный алгоритм ограничивается построением в каждой компоненте связности редуцированного графа связного остовного эйлерова подгиперграфа, приводящего к единственному (для данной компоненты) циклу в случае полноты исходного графа G. Это соображение позволяет надеяться на построение в будущем алгоритмов с лучшими верхними оценками фактора аппроксимации для данного класса задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гимади Э.Х., Хачай М.Ю.** Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016. 220 с.
2. **Sahni S., Gonzales T.** *P*-complete approximation problems // Journal of the ACM. 1976. Vol. 23. P. 555–565.
3. **Bläser Markus, Siebert Bodo.** Computing cycle covers without short cycles // Algorithms — ESA 2001 ed. F. Meyer auf der Heide. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. P. 368–379. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 2161). doi: 10.1007/3-540-44676-1_31
4. **Bläser Markus, Shankar Ram L., Sviridenko Maxim.** Improved approximation algorithms for metric maximum ATSP and maximum 3-cycle cover problems // Operations Research Letters. 2009. Vol. 37, no. 3. P. 176–180. doi: 10.1016/j.orl.2009.01.011
5. **Manthey Bodo.** On approximating restricted cycle covers // SIAM Journal on Computing. 2008. Vol. 38, no. 1. P. 181–206. doi: 10.1137/060676003
6. **Manthey Bodo.** Minimum-weight cycle covers and their approximability // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, no. 7. P. 1470–1480. doi: 10.1016/j.dam.2008.10.005
7. **Khachai M.Yu., Neznakhina E.D.** Approximability of the problem about a minimum-weight cycle cover of a graph // Dokl. Math. 2015. Vol. 91. P. 240–245. doi: 10.1134/S1064562415020313
8. **Khachay M., Neznakhina K.** Approximability of the Minimum-Weight k-Size Cycle Cover Problem // J. Global Optim. 2016. Vol. 66, no. 1. P. 65–82.
9. **Е. Д. Незнахина.** PTAS для задачи Min-k-SCCP в евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 268–278.
10. **Э. Х. Гимади, И. А. Рыков** Асимптотически точный подход к приближенному решению некоторых задач покрытия графа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 89–99.
11. **Gimadi E.Kh., Rykov I.A.** On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by m nonadjacent cycles of maximum total weight // Dokl. Math. 2016. Vol. 93. P. 117–120. doi: 10.1134/S1064562416010233
12. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the Traveling Salesman Problem // Proceedings of a Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity / ed. J. F. Traub. NY; San Francisco; London: Acad. Press., 1976. P. 441.
13. **Сердюков А.И.** О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы. 1978. №. 17. P. 76–79.
14. **Wolsey Laurence A.** Heuristic analysis, linear programming and branch and bound // Combinatorial Optimization II / ed. V.J. Rayward-Smith. Berlin, Heidelberg: Springer, 1980. P. 121–134.
15. **Asadpour Arash, Goemans Michel X., Mądry Aleksander, Gharan Shayan Oveis, Saberi Amin**. An $\mathrm{O}(\log \mathrm{n}/\log\log \mathrm{n})$-approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem // Operations Research. 2017. Vol. 65, no. 4. P. 1043–1061. doi: 10.1287/opre.2017.1603
16. **Svensson Ola, Tarnawski Jakub, and Végh László A.** A constant-factor approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem // J. ACM. 2020. Vol. 67, no. 6. doi: 10.1145/3424306
17. **Traub Vera and Vygen Jens**. An improved approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem // SIAM J. Comp. 2022. Vol. 51, no. 1. P. 139–173. doi: 10.1137/20M1339313
18. **М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина, К. В. Рыженко.** Приближенные алгоритмы с постоянной точностью для серии маршрутных комбинаторных задач, основанные на сведении к асимметричной задаче коммивояжера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Vol. 29, no. 3. P. 241–258. doi: 10.21538/0134-4889-2022-28-3-241-258
19. **Rizhenko Ksenia, Neznakhina Katherine, Khachay Michael**. Fixed ratio polynomial time approximation algorithm for the prize-collecting asymmetric traveling salesman problem // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, no. 1. P. 135–146. doi: 10.15826/umj.2023.1.012
20. **Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.** The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization // Combinatorica. 1981. Vol. 1, no. 2. P. 169–197. doi: 10.1007/BF02579273
21. **Karzanov Alexander V.** How to tidy up a symmetric set-system by use of uncrossing operations // Theoretical Computer Science. 1996. Vol. 157, no. 2. P. 215–225. doi: 10.1016/0304-3975(95)00160-3
22. **Frieze A.M., Galbiati G., Maffioli F.** On the worst-case performance of some algorithms for the asymmetric traveling salesman problem // Networks. 1982. Vol. 12, no. 1. P. 23–39. doi: 10.1002/net.3230120103

23. **Schrijver A.** Combinatorial optimization — polyhedra and efficiency. NY: Springer, 2003, 1189 p.

Поступила 4.08.2023
После доработки 18.08.2023
Принята к публикации 21.08.2023

Хачай Михаил Юрьевич
чл.-корр. РАН
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Незнахина Екатерина Дмитриевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
e-mail: eneznakhina@yandex.ru

Рыженко Ксения Валерьевна
аспирант, математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: kseniarizhenko@gmail.com

REFERENCES

1. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok* [Extremal problems on sets of permutations]. Yekaterinburg: UMC UPI Publ., 2016, 220 p. ISBN: 978-5-8295-0497-7 .
2. Sahni S., Gonzales T. *P*-complete approximation problems. *Journal of the ACM*, 1976, vol. 23, pp. 555–565.
3. Bläser Markus, Siebert Bodo. Computing cycle covers without short cycles. In: *Algorithms — ESA 2001*, ed. F. Meyer auf der Heide, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2161, Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001, pp. 368–379. doi: 10.1007/3-540-44676-1_31
4. Bläser Markus, Shankar Ram L., Sviridenko Maxim. Improved approximation algorithms for metric maximum ATSP and maximum 3-cycle cover problems. *Operations Research Letters*, 2009, vol. 37, no. 3, pp. 176–180. doi: 10.1016/j.orl.2009.01.011
5. Manthey Bodo. On approximating restricted cycle covers. *SIAM Journal on Computing*, 2008, vol. 38, no. 1, pp. 181–206. doi: 10.1137/060676003
6. Manthey Bodo. Minimum-weight cycle covers and their approximability. *Discrete Appl. Math.*, 2009, vol. 157, no. 7, pp. 1470–1480. doi: 10.1016/j.dam.2008.10.005
7. Khachai M.Yu., Neznakhina E.D. Approximability of the problem about a minimum-weight cycle cover of a graph. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, pp. 240–245. doi: 10.1134/S1064562415020313
8. Khachay M., Neznakhina K. Approximability of the Minimum-Weight k-Size Cycle Cover Problem. *J. Global Optim.*, 2016, vol. 66, no. 1, pp. 65–82.
9. Neznakhina E.D. PTAS for Min-k-SCCP in Euclidean space of arbitrary fixed dimension. *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. S120–S130. doi: 10.1134/S0081543816090133
10. Gimadi E.Kh., Rykov I.A. Asymptotically optimal approach to the approximate solution of several problems of covering a graph by nonadjacent cycles. *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, 2016, vol. 295, suppl. 1., pp. S57–S67. doi: 10.1134/S0081543816090078
11. Gimadi E.Kh., Rykov I.A. On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by m nonadjacent cycles of maximum total weight. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, pp. 117–120. doi: 10.1134/S1064562416010233

12. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the Traveling Salesman Problem. In: *Proceedings of a Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity*, ed. J. F. Traub. NY; San Francisco; London: Acad. Press., 1976, p. 441.
13. Serdyukov A.I. Some extremal bypasses in graphs. *Upravliaemie Systemy*, 1978, iss. 17, pp. 76–79 (in Russian).
14. Wolsey Laurence A. Heuristic analysis, linear programming and branch and bound. In: *Combinatorial Optimization* II, ed. V.J. Rayward-Smith, Berlin, Heidelberg: Springer, 1980, p. 121–134.
15. Asadpour Arash, Goemans Michel X., Mądry Aleksander, Gharan Shayan Oveis, Saberi Amin. An O(log n/loglog n)-approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *Operations Research*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 1043–1061. doi: 10.1287/opre.2017.1603
16. Svensson Ola, Tarnawski Jakub, and Végh László A. A constant-factor approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *J. ACM*, 2020, vol. 67, no. 6. doi: 10.1145/3424306
17. Traub Vera and Vygen Jens. An improved approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *SIAM J. Comp.*, 2022, vol. 51, no. 1, pp. 139–173. doi: 10.1137/20M1339313
18. Khachay M.Yu., Neznakhina E.D., Ryzhenko K.V. Constant-factor approximation algorithms for a series of combinatorial routing problems based on the reduction to the asymmetric traveling salesman problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S140–S155. doi: 10.1134/S0081543822060128
19. Rizhenko Ksenia, Neznakhina Katherine, Khachay Michael. Fixed ratio polynomial time approximation algorithm for the prize-collecting asymmetric traveling salesman problem. *Ural Math. J.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 135–146. doi: 10.15826/umj.2023.1.012
20. Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1981, vol. 1, no. 2, pp. 169–197. doi: 10.1007/BF02579273
21. Karzanov Alexander V. How to tidy up a symmetric set-system by use of uncrossing operations. *Theoretical Computer Science*, 1996, vol. 157, no. 2, pp. 215–225. doi: 10.1016/0304-3975(95)00160-3
22. Frieze A.M., Galbiati G., Maffioli F. On the worst-case performance of some algorithms for the asymmetric traveling salesman problem. *Networks*, 1982, vol. 12, no. 1, pp. 23–39. doi: 10.1002/net.3230120103
23. Schrijver A. *Combinatorial optimization — polyhedra and efficiency.* NY: Springer, 2003. 1189 p.

Received August 4, 2023
Revised August 18, 2023
Accepted August 21, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00672).

Mikhail Yur'evich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

Ekaterina Dmitrievna Neznakhina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: eneznakhina@yandex.ru .

Kseniya Valer'evna Ryzhenko, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: kseniarizhenko@gmail.com .

Cite this article as: M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina, K. V. Ryzhenko. Polynomial approximability of the asymmetric problem of covering a graph by a bounded number of cycles. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 261–273 .