ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.6

ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ВЫПУКЛОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

О. В. Хамисов

В работе рассматривается задача выпуклого параметрического программирования, в которой целевая функция и функции-ограничения являются выпуклыми функциями внешнего параметра. Предлагаются процедуры для нахождения максимального и минимального значения оптимального значения функции и для нахождения внутренних и внешних аппроксимаций множества параметров, при которых исследуемая задача совместна. Все процедуры основаны на применении опорных функций. Приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: параметрическая оптимизация, функция оптимального значения, опорные функции, внешняя и внутренняя аппроксимация.

O. V. Khamisov. Optimization of the optimal value function in problems of convex parametric programming.

We consider a problem of convex parametric programming in which the objective function and the constraint functions are convex functions of an outer parameter. Computational procedures are suggested for finding the maximal and minimal values of the optimal value function and for finding inner and outer approximations of the set of parameters for which the problem is consistent. All procedures are based on the application of support functions. Illustrative examples are provided.

Keywords: parametric optimization, optimal value function, support function, inner and outer approximation.

MSC: 28X04

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-247-260

1. Введение

Рассматривается следующая задача выпуклого параметрического программирования:

$$f(x,p) \to \inf_x, \tag{1.1}$$

$$g_i(x,p) \leqslant 0, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1.2}$$

$$x \in X, \tag{1.3}$$

где $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R},\ g_i\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R},\ i = 1,\dots,m,$ — непрерывно дифференцируемые функции, выпуклые по аргументу x при фиксированном p и выпуклые по аргументу p при фиксированном x, $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \varnothing$ — выпуклое компактное множество. Параметр p варьируется в пределах выпуклого компактного множества $P \subset \mathbb{R}^s$.

Задачи параметрического программирования вида (1.1)–(1.3) исследуются уже давно и имеют широкое практическое применение. В ряде монографий и статей рассматриваются вопросы, связанные с различными свойствами непрерывности, стабильности, чувствительности, топологических свойств решений задачи вида (1.1)–(1.3) в зависимости от вариаций параметра (см., например, [1–6]).

[1]Работа выполнена в рамках проекта государственного задания № FWEU-2021-0006 (регистрационный номер АААА-А21-121012090034-3).

Задачи параметрического программирования естественным образом возникают при анализе и корректировке противоречивых моделей экономики [7; 8]. Описание теории и методов решения таких задач можно найти, например, в [9].

Определим стандартным образом функцию оптимального значения задачи (1.1)–(1.3):

$$v(p) = \inf_{x \in X}\{f(x,p)\colon g_i(x,p) \leqslant 0, i = 1,\dots,m\}. \tag{1.4}$$

Исследуемая в статье задача состоит в следующем: определить величину

$$\overline{v} = \sup_{p \in P} v(p). \tag{1.5}$$

При сделанных предположениях функция v является полунепрерывной снизу [10] и $v(p) > -\infty\ \forall p \in P$. Вычисление значения функции v, несмотря на то что она задана неявно, есть задача выпуклого программирования и, следовательно, эффективно разрешима. В общем случае v — многоэкстремальная как с точки зрения минимизации, так и с точки зрения максимизации, функция. В [11] показано, что если f — выпуклая по совокупности переменных функция, а $g_i,\ i = 1,\dots,m$, — квазивыпуклые по совокупности переменных функции, то v — выпуклая функция. Условия обобщенной в том или ином смысле выпуклости функции v описаны теми же авторами в [12]. При достаточно общих условиях в [13; 14] исследуются свойства липшицевости или гельдеровости функции оптимального значения.

Для решения задачи максимизации v применяются различные подходы. В [15] методология решения основана на понятии квазиметрики, в [10] используются штрафные функции, в работе [16] исследования основаны на методах полубесконечного программирования. В данной статье будет использоваться аппарат нелинейных опорных функций [17; 18].

Отметим, что задача нахождения $\underline{v} = \inf\limits_{p \in P} v(p)$ может быть сведена к задаче одновременной минимизации по паре (x,p):

$$f(x,p) \to \inf_{x,p}, \quad g_i(x,p) \leqslant 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad x \in X, \quad p \in P. \tag{1.6}$$

Задача (1.6) относится к классу так называемых задач бивыпуклой минимизации, является многоэкстремальной, тем не менее для ее решения может быть применен ряд специально разработанных методов [19–21].

Нахождение величин $\overline{v}$ и $\underline{v}$ сводится к решению задач невыпуклой, многоэкстремальной оптимизации. Принципиальная разница между этими задачами состоит в том, что нахождение $\overline{v}$ есть задача неявной оптимизации, в отличие от нахождения $\underline{v}$. Сложность оптимизации функции v показывают следующие два примера.

Пример 1. В задаче (1.1)–(1.3) $n = 1,\ s = 1,\ f(x,p) = x,\ g(x,p) = p^2x^2 \leqslant 0,\ X = [-2,2]$, $P = [-3,3]$. Если $p \neq 0$, то из неравенства $p^2x^2 \leqslant 0$ следует, что параметрическое допустимое множество состоит всего из одной точки $\{0\}$, которая и является точкой параметрического оптимума, $x^*(p) = 0$. Если $p = 0$, то $x^*(0) = \arg\min\limits_x\{x:\ x \in [-2,2]\} = -2$. Функция оптимального значения определяется как

$$v(p) = \begin{cases} 0, & p \neq 0; \\ -2, & p = 0. \end{cases}$$

Максимальное значение $\overline{v} = 0$ достигается в любой точке множества $P \setminus \{0\}$, множество точек максимума v невыпукло и несвязно. Минимальное значение $\underline{v} = -2$ достигается в единственной точке $p = 0$ и в этой точке v имеет разрыв первого рода. Максимальное и минимальное значения достижимы, и операции sup и inf могут быть заменены на операции max и min соответственно.

П р и м е р 2. В данном случае $n = s = 1$, $f(x,p) = 0.5(x-p-2)^2$, $g(x,p) = p^2x^2 \leqslant 0$, $X = [-1,2]$, $P = [-1,0]$. По аналогии с примером 1 $x^*(p) = 0$, если $p \neq 0$ и, если $p = 0$, то решение $x^*(0) = \arg\min\limits_x\{(x-2)^2 :\ x \in [-1,2]\} = 2$. Функция оптимального значения

$$v(p) = \begin{cases} 0.5(p+2)^2, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0. \end{cases}$$

Функция v возрастает на $[-1,0)$, в точке $p = 0$ терпит разрыв первого рода, достигая в этой точке наименьшего значения $\underline{v} = 0$. Нетрудно убедиться, что $\overline{v} = 2$, но не существует p, при котором это значение достигается. В этом примере операцию inf на операцию min заменить можно, а операцию sup на операцию max — нельзя.

Проанализируем свойства функции оптимального значения с точки зрения теории двойственности. Поскольку допустимое множество в задаче (1.1)–(1.3) ограничено, то исследуемая задача выпуклого параметрического программирования не имеет разрыва двойственности при любом фиксированном значении параметра p и функция v может быть определена следующим образом (см. [22]):

$$v(p) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m_+}\min_{x\in X}\Big\{f(x,p) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x,p)\Big\}. \qquad (1.7)$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^\top$ — вектор множителей Лагранжа (двойственных переменных), соответствующий ограничениям (1.2); $\mathbb{R}^m_+ = \{y \in \mathbb{R}^m \colon y_j \geqslant 0,\ j = 1,\ldots,m\}$ — неотрицательный ортант. Двойственная по Лагранжу функция имеет вид

$$\Theta(\lambda) = \min_{x\in X}\Big\{f(x,p) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x,p)\Big\}.$$

Для примера 1 двойственная функция $\Theta_1(\lambda) = -\dfrac{1}{4\lambda p^2}$, $p \neq 0$, и $\Theta_1^* = \sup\limits_{\lambda\geqslant 0}\Theta_1(\lambda) = 0 = v(p)$. Аналогично, для примера 2 двойственная функция $\Theta_2(\lambda) = 0.5(p+2)^2\Big(1 - \dfrac{1}{1+2\lambda p^2}\Big)$, $p \neq 0$, и $\Theta_2^* = \sup\limits_{\lambda\geqslant 0}\Theta_2(\lambda) = 0.5(p+2)^2 = v(p)$. В обоих случаях двойственная задача не имеет решения, хотя разрыва двойственности нет и представление (1.7) справедливо. Как мы видим, без дополнительных предположений использование функции оптимального значения для решения задачи (1.5) в виде (1.7) столь же не конструктивно, как и в виде (1.4). Конструктивным выражение (1.7) станет в том случае, когда соответствующая двойственная задача будет иметь конечное решение и мы сможем операцию sup в (1.7) заменить на операцию max.

Введем в рассмотрение точечно-множественное (многозначное) отображение $\Omega\colon \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, которое каждой точке $p \in P$ ставит в соответствие допустимое множество, задаваемое ограничениями (1.2), (1.3), $\Omega(p) = \{x \in X \colon g_i(x,p) \leqslant 0,\ i = 1,\ldots,m\}$. Эффективная область Ω определяется как $\operatorname{dom}\Omega = \{p \in P \colon \Omega(p) \neq \varnothing\}$.

Сделаем основное предположение нашего исследования.

Предположение А. *Если dom* $\Omega = P$, *то существует константа* $\gamma > 0$ *такая, что множители Лагранжа, являющиеся решением задачи* (1.7), *принадлежат симплексу* $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \colon \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i \leqslant \gamma\}$ *для любого* $p \in P$.

Предположение А означает равномерную ограниченность оптимальных множителей Лагранжа относительно параметра p. В условиях предположения А и свойств функций f и g_i, $i = 1,\ldots,m$, функцию оптимального значения в (1.7) можно записать следующим образом:

$$v(p) = \max_{\lambda\in\Lambda}\min_{x\in X}\Big\{f(x,p) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x,p)\Big\} = \min_{x\in X}\max_{\lambda\in\Lambda}\Big\{f(x,p) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x,p)\Big\}. \qquad (1.8)$$

Пусть $\tilde{p} \in \operatorname{dom} \Omega$ и пара $(\tilde{x}, \tilde{p})$ — решение прямой и двойственной задач. Определим функцию

$$\psi_v(p, \tilde{p}) = \max_{\lambda \in \Lambda} \Big\{ f(\tilde{x}, p) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\tilde{x}, p) \Big\}.$$

Тогда из (1.8) получаем

$$v(\tilde{p}) = f(\tilde{x}, \tilde{p}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i g_i(\tilde{x}, \tilde{p}) = \psi_v(\tilde{p}, \tilde{p}), \tag{1.9}$$

$$v(p) \leqslant \psi_v(p, \tilde{p}) \ \forall p \in P. \tag{1.10}$$

Из (1.9), (1.10) следует, что $\psi_v(\cdot, \tilde{p})$ — функция-мажоранта функции v, опорная в точке $\tilde{p}$. Нетрудно видеть, что $\psi_v(\cdot, p)$ — выпуклая, кусочно-гладкая непрерывная функция $\forall p \in \operatorname{dom} \Omega$. Следовательно, при выполнении предположения A, v — нижняя огибающая семейства непрерывных выпуклых функций-мажорант, т. е. v — полунепрерывная сверху функция на $\operatorname{dom} \Omega$. Ранее упоминалось, что v обладает свойством полунепрерывности снизу. Поэтому если выполнено предположение A, то v — непрерывная на компактном множестве $\operatorname{dom} \Omega$ функция.

Функция-мажоранта ψ_v используется для нахождения величины $\overline{v}$ при условии $\operatorname{dom} \Omega = P$ (иначе, $\overline{v} = +\infty$). Перейдем к ее описанию процедуры максимизации. Пусть $p^i \in P, i = 0, \ldots, k$. Определим функцию

$$\Psi_k^v(p) = \min_{0 \leqslant i \leqslant k} \psi_v(p, p^i).$$

Вычислим рекордную величину $\overline{v}_k = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} v(p^i) \leqslant \overline{v}$. Найдем точку

$$p^{k+1} \in \operatorname{Arg} \max_{p \in P} \Psi_k^v(p). \tag{1.11}$$

В силу (1.10) $\Psi_k^v(p) \geqslant v(p) \ \forall p \in P$. По построению

$$\Psi_0^v(p^1) \geqslant \Psi_1^v(p^2) \geqslant \ldots \geqslant \Psi_k^v(p^{k+1}) \geqslant \overline{v}.$$

Справедлива двусторонняя оценка $\overline{v}_k \leqslant \overline{v} \leqslant \Psi_k^v(p^{k+1})$. Если $\Psi_k^v(p^{k+1}) - \overline{v}_k \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, то стоп: $\Psi_k^v(p^{k+1})$ — ε-приближенная оценка сверху величины $\overline{v}$. В противном случае вычислительный процесс продолжается. Применимость предлагаемой процедуры основывается на следующем результате (см. [23–25]): если семейство функций $\{\Psi_k^v(p)\}_{k=0}^{\infty}$ — равностепенно непрерывное семейство, то каждая предельная точка последовательности $\{p^k\}_{k=0}^{\infty}$ есть точка глобального максимума v на P.

Следует отметить, что в том случае, когда функции f и g_i, $i = 1, \ldots, m$, билинейны, для решения задачи (1.11) могут использоваться методы кусочно-линейного программирования [26].

2. Проверка параметрической совместности системы ограничений

Предположение A подразумевает выполнение условия $\operatorname{dom} \Omega = P$, что приводит к необходимости исследования совместность ограничений (1.2), (1.3) при варьировании параметра p. Для этого введем в рассмотрение функцию параметрической совместности $w\colon P \to \mathbb{R}$,

$$w(p) = \min_{x \in X} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i(x, p). \tag{2.1}$$

Функция w непрерывна [10], следовательно, $w(p)$ — конечная величина $\forall p \in P$. Если при некотором $\tilde{p} \in P$ значение $w(\tilde{p}) > 0$, то $\Omega(\tilde{p}) = \varnothing$ и $v(\tilde{p}) = +\infty$. Если $w(p) > 0 \ \forall p \in P$, то $\Omega(p) = \varnothing$ и $v(p) = +\infty \ \forall p \in P$. Если $w(p) \leqslant 0 \ \forall p \in P$, то $\Omega(p) \neq \varnothing$ и $v(p) < +\infty \ \forall p \in P$. Таким образом, возможность принятия функцией v значения $+\infty$ эквивалентна возможности принятия функцией w положительных значений. Поскольку w — конечная функция, то с ней можно производить более эффективные вычислительные действия, чем с v.

Прежде всего отметим, что нахождение величины $\underline{w} = \min\limits_{p\in P} w(p)$ в силу (2.1) эквивалентно решению задачи бивыпуклой минимизации

$$z \to \min_{x,p,z}, \quad g_i(x,p) \leqslant z, \quad i = 1,\dots,m, \quad x \in X, \quad p \in P. \tag{2.2}$$

Если $\underline{w} > 0$, то система несовместна при любом $p \in P$, $\operatorname{dom}\,\Omega = \varnothing$ и $\underline{v} = \overline{v} = +\infty$. С вычислительной точки зрения задача (2.2) решается легче, поскольку целевая функция в ней линейна. Если $\underline{w} \leqslant 0$, то при $p = \underline{p}^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{p\in P} w(p)$, система (1.2), (1.3) совместна, $\operatorname{dom}\,\Omega \neq \varnothing$.

Пусть $\tilde{p} \in P$ — произвольная точка. Снова в силу (2.1) вычисление значения $w(\tilde{p})$ эквивалентно решению задачи выпуклого программирования

$$z \to \min_{x,z}, \tag{2.3}$$

$$g_i(x,\tilde{p}) \leqslant z, \quad i = 1,\dots,m, \tag{2.4}$$

$$x \in X. \tag{2.5}$$

Данная задача всегда имеет конечное решение $(\tilde{x},\tilde{z})$ и $w(\tilde{p}) = \tilde{z}$. Если $w(\tilde{p}) \leqslant 0$, то задача (1.1)–(1.3) при $p = \tilde{p}$ имеет конечное оптимальное значение $v(\tilde{p})$ и $\operatorname{dom}\,\Omega \neq \varnothing$. На самом деле, из решения задачи (2.3)–(2.5) можно извлечь больше информации, чем разрешимость исходной задачи при заданном значении параметра p. Определим выпуклую непрерывную функцию

$$\psi_w(p,\tilde{p}) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(\tilde{x},p).$$

Тогда

$$w(\tilde{p}) = \psi_w(\tilde{p},\tilde{p}) \quad \text{и} \quad w(p) \leqslant \psi_w(p,\tilde{p}) \ \ \forall p \in P. \tag{2.6}$$

Определим выпуклое компактное множество

$$P^w_{in}(\tilde{p}) = \{p \in P \colon \psi_w(p,\tilde{p}) \leqslant 0\}. \tag{2.7}$$

В силу (2.6) $w(p) \leqslant 0 \ \forall p \in P^w_{in}(\tilde{p})$. Следовательно, $v(p) < +\infty \ \forall p \in P^w_{in}(\tilde{p})$ и $P^w_{in}(\tilde{p}) \subset \operatorname{dom}\,\Omega$. Например, если $w(\tilde{p}) < 0$, то множество $P^w_{in}(\tilde{p})$ состоит более чем из одной точки. Если $w(\tilde{p}) > 0$, то в соответствии с рассуждениями из разд. 1 $v(\tilde{p}) = \overline{v} = +\infty$ и $\operatorname{dom}\,\Omega \neq P$.

Поставим перед собой следующую задачу. Найти точку $\hat{p} \in P \colon w(\hat{p}) > 0$, либо установить, что $w(p) \leqslant 0 \ \forall p \in P$. Используемая итеративная процедура следующая. Пусть известны $p^i \in P$, $i = 0,\dots,k$, такие, что $w(p^i) \leqslant 0 \ \forall i$. Определим функцию $\Psi^w_k(p) = \min\limits_{0\leqslant i\leqslant k} \psi_w(p,p^i)$ и найдем точку

$$p^{k+1} \in \operatorname{Arg}\max_{p\in P} \Psi^w_k(p). \tag{2.8}$$

Если $w(p^{k+1}) > 0$, то стоп: при $p = p^{k+1}$ система (1.2), (1.3) несовместна. При этом $w(p^i) \leqslant 0$, $i = 0,\dots,k$, поэтому для любого $p \in P^{w,k}_{in} = \bigcup\limits_{i=0}^{k} P^w_{in}(p^i)$ система (1.2), (1.3) совместна. Множество $P^{w,k}_{in}$ представляет собой внутреннюю аппроксимацию $\operatorname{dom}\,\Omega$. Если $w(p^{k+1}) \leqslant 0$, то вычислительный процесс продолжается. По построению

$$\alpha_k = \max_{0\leqslant i\leqslant k} w(p^i) \leqslant \max_{p\in P} w(p) = \overline{w} \leqslant \Psi^w_k(p^{k+1}) \leqslant \Psi^w_{k-1}(p^k)) \leqslant \ldots \leqslant \Psi_0(p^1).$$

Поэтому если $\Psi^w_k(p^{k+1}) \leqslant 0$, то $w(p) \leqslant 0 \ \forall p \in P$, т.е. система (1.2), (1.3) совместна $\forall p \in P$, $\operatorname{dom}\,\Omega = P$, $\underline{v}$ и $\overline{v}$ — конечные величины. Теоретическое обоснование предложенной процедуры аналогично тому, что было дано в разд. 1: если функции $\{\Psi^w_k(p)\}_1^\infty$ образуют семейство равностепенно непрерывных функций, то любая предельная точка последовательности, определяемой соотношением (2.8), есть точка глобального максимума функции w на P. Следовательно, при выполнении свойства равностепенной непрерывности либо будет найдена точка с положительным значением w, либо будет установлено, что система (1.2), (1.3) совместна для любого $p \in P$, т. е. установлен факт $\operatorname{dom}\Omega = P$.

Задача (2.8) есть задача максимизации функции минимума конечного семейства выпуклых функций. Такая задача является многоэкстремальной. Тем не менее она может быть сведена к задаче вогнутого программирования [18] с дальнейшим применением соответствующих методов из [27], или эта задача может быть решена с помощью метода отсечений, описанного в работе [28] и специально предназначенного для решения подобных задач.

П р и м е р 3. Размерности $n = 2$, $s = 1$, система ограничений задана следующим образом.

$$g_1(x,p) = 10p^2x_1^2 + x_2 - 2 \leqslant 0, \quad g_2(x,p) = -x_1 - 0.5px_2 + 3.5 \leqslant 0, \quad -5 \leqslant x_j \leqslant 5, \quad j = 1,2, \tag{2.9}$$

$p \in P = [-2, 5]$. Для этой системы $\operatorname{dom}\Omega = [-2, -1.1] \cup [-0.3, 0.2] \cup [3.5, 5]$. Зададим $p^0 = 5$, тогда

$$\Psi_0^w(p) = \psi_w(p, 5) = \max\{3.499 - 0.786p, 0.001p^2 - 0.429\}.$$

Графики функций w и $\psi^w(\cdot, 5)$ показаны на рис. 1. Из рис. 1 видно, что w — невыпуклая, многоэкстремальная функция.

Результаты соответствующего итеративного процесса приведены в табл. 1 (на итерации 4 использовалось вычисленное значение $p^5 = 0.272$), графическая интерпретация — на рис. 2. Поскольку $w(p^4) = 0.303 > 0$, то при $p = 0.227$ исследуемая система несовместна. Из табл. 1 следует, что $\alpha_4 = 0.303 \leqslant \overline{w} \leqslant 3.285 = \Psi_4(p^5)$ (истинное значение $\overline{w} = w(p^{\max}) = 2.083$ достигается при $p^{\max} = 0.52$). Далее по аналогии с (2.7) определим множества $P_{in}^w(p^0) = [4.454, 5]$, $P_{in}^w(p^1) = [-2, -1.257]$, $P_{in}^w(p^2) = [-0.132, 0.132]$, $P_{in}^w(p^3) = [-0.187, 0.187]$, а также внутреннюю аппроксимацию

$$P_{in}^{w,3} = \bigcup_{i=0}^{3} P_{in}^w(p^i) = [-2, -1.257] \cup [-0.187, 0.187] \cup [4.454, 5].$$

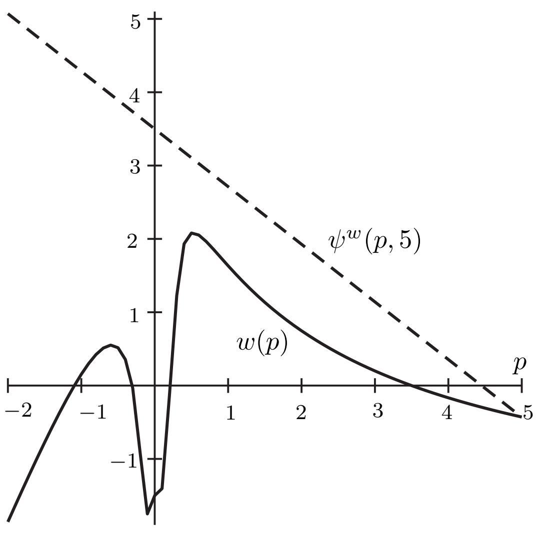

Рис. 1. Функция $w(p)$ изображена сплошной линией, функция $\psi^w(p, 5)$ — пунктирной линией.

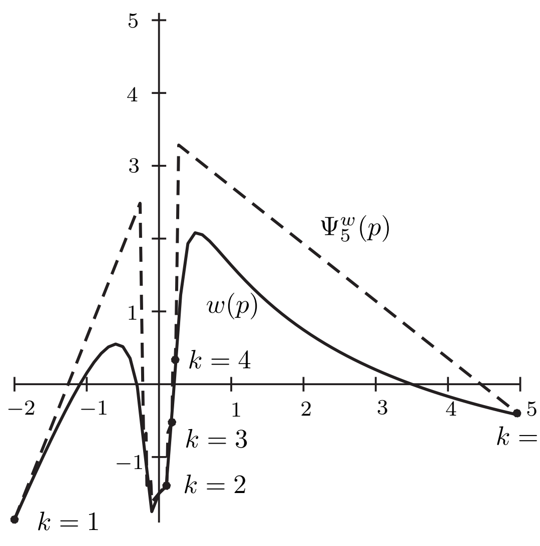

Рис. 2. График функции $\Psi_5^w(p)$ показан пунктирной линией, точки, соответствующие итерациям $k = 0, 1, 2, 3, 4$ — черным цветом.

Т а б л и ц а 1

Результаты итеративного процесса

k	p^k	$w(p^k)$	$\psi_k^w(p,p^k)$	$\Psi_k^w(p^{k+1})$
0	5	-0.429	$\max\{\ 3.499 - 0.786p,\quad 0.001p^2 - 0.429\}$	5.070
1	-2	-1.859	$\max\{\ 3.141 + 2.500p,\quad 1.285p^2 - 7.000\}$	3.413
2	0.109	-1.372	$\max\{-1.500 + 1.197p, 250.000p^2 - 4.393\}$	3.361
3	0.176	-0.604	$\max\{-0.971 + 2.500p, 199.951p^2 - 7.000\}$	3.321
4	0.227	0.303	$\max\{-0.227 + 2.500p, 138.908p^2 - 7.000\}$	3.285

Вернемся к анализу свойств функции w на P. Предположим, что применяя процедуру (2.8) мы нашли точку $\tilde{p}$:

$$w(\tilde{p}) > 0.$$

Функцию w можно переопределить следующим способом:

$$w(p) = \min_{x \in X} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i(x,p) = \min_{x \in X} \max_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x,p), \tag{2.10}$$

где $U = \left\{u \in \mathbb{R}_+^m \colon \sum\limits_{i=1}^{m} u_i = 1\right\}$. В силу линейности по u, выпуклости по x, выпуклой компактности множеств X и U операции min и max в (2.10) можно поменять местами. Тогда

$$w(p) = \max_{u \in U} \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x,p). \tag{2.11}$$

При заданном $\tilde{p}$ решением задачи (2.11) является пара $(\tilde{x}, \tilde{u})$, в которой $\tilde{u}$ — вектор оптимальных двойственных переменных, соответствующих ограничениям (2.4) [29]. Определим функцию

$$\varphi_w(p,\tilde{p}) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i g_i(x,p).$$

Тогда $w(\tilde{p}) = \varphi_w(\tilde{p},\tilde{p})$ и $w(p) \geqslant \varphi_w(p,\tilde{p})$ $\forall p \in P$. В общем случае $\varphi(\cdot,\tilde{p})$ — невыпуклая (и невогнутая), неявно заданная функция, имеющая как локальные, так и глобальные точки минимума и максимума. Используя известное неравенство $|\min_{y\in Y} F_1(y) - \min_{y \in Y} F_2(y)| \leqslant \max_{y \in Y} |F_1(y) - F_2(y)|$, где F_1 и F_2 — непрерывные функции, Y — компактное множество, оценим модуль разности

$$\begin{gathered} \left|\varphi_w(p^1,\tilde{p}) - \varphi_w(p^2,\tilde{p})\right| = \left|\min_{x\in X} \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i g_i(x,p^1) - \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i g_i(x,p^2)\right| \\ \leqslant \max_{x \in X} \left| \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \Big[g_i(x,p^1) - g_i(x,p^2)\Big] \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \max_{x\in X} \left|g_i(x,p^1) - g_i(x,p^2)\right|. \end{gathered} \tag{2.12}$$

В силу свойства монотонности градиента $\nabla_p g_i(x,p) = \left(\dfrac{\partial g_1(x,p)}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial g_1(x,p)}{\partial p_s}\right)^{\top}$ константа Липшица $L_i(x)$ функции $g_i(x,p)$ гладкой и выпуклой по переменной p при фиксированном x определяется как

$$L_i(x) = \max_{p \in ext(P)} \|\nabla_p g_i(x,p)\|,$$

где $ext(P)$ — множество экстремальных точек P. В частности, если $P = co\{\hat{p}^1, \ldots, \hat{p}^N\}$ — выпуклая оболочка точек $\hat{p}^1, \ldots, \hat{p}^N$, то $L_i(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \|\nabla_p g_i(x, \hat{p}^i)\|$. Тогда из (2.12) следует

$$\left|\varphi_w(p^1, \tilde{p}) - \varphi_w(p^2, \tilde{p})\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \max_{x \in X} L_i(x) \|p^1 - p^2\| = L(\tilde{p}) \|p^1 - p^2\|, \tag{2.13}$$

$$L(\tilde{p}) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i \max_{x \in X} L_i(x). \tag{2.14}$$

В итоге на основании (2.13) получаем при $p^1 = p,\ p^2 = \tilde{p}$

$$w(p) \geqslant w(\tilde{p}) - L(\tilde{p}) \|p - \tilde{p}\| = \varphi_L(p, \tilde{p}).$$

Следовательно, множество

$$P_{\varnothing}(\tilde{p}) = \{p \in P \colon \varphi_L(p, \tilde{p}) > 0\} \tag{2.15}$$

состоит из таких точек p, для которых $w(p) > 0$, что эквивалентно тому, что при $p \in P_{\varnothing}(\tilde{p})$ система (1.2), (1.3) несовместна.

Константа Липшица $L(\tilde{p})$ функции $\varphi_w(\cdot, \tilde{p})$ в силу (2.14) определяется неявно. Как правило, максимизация в (2.14) сводится к нахождению максимума разности двух выпуклых функций на выпуклом компактном множестве. Для решения этой задачи или получения оценки максимума сверху можно использовать методы, описанные, например, в монографии [27]. Мы будем предполагать, что величина $L(\tilde{p})$ вычисляема для любого $\tilde{p}$.

П р и м е р 4. Для системы (2.9) примера 3

$$\nabla_p g_1(x, p) = 20 p x_1^2, \quad \nabla_p g_2(x, p) = -0.5 x_2,$$

$$L_1(x) = \max_{p \in \{-2,5\}} 20|p| x_1^2 = 100 x_1^2, \quad L_2(x) = \max_{p \in \{-2,5\}} 0.5 x_2 = 0.5 x_2$$

и

$$L(\tilde{p}) = 100 \tilde{u}_1 \big(\max_{-5 \leqslant x_2 \leqslant 5} x_1^2 \big) + 2.5 \big(\max_{-5 \leqslant x_1 \leqslant 5} |x_2| \big) = 2500 \tilde{u}_1 + 2.5 \tilde{u}_2.$$

Положительное значение w в примере 1 было получено при $\tilde{p} = p^4 = 0.227$, $w(\tilde{p}) = 0.303$, соответствующие двойственные переменные $\tilde{u}_1 = 0.205$, $\tilde{u}_2 = 0.795$. Константа Липшица $L(\tilde{p}) = 514.31$, функция $\varphi_L(p, 0.227) = 0.303 - 514.31|p - 0.227|$, и в соответствии с (2.15) множество $P_{\varnothing}(\tilde{p}) = (0.2265, 2275)$. Диаметр множества $P_{\varnothing}(\tilde{p})$ равен 0.001, это достаточно малая величина. Данный пример показывает, что построение множества $P_{\varnothing}(\tilde{p})$, основанное на липшицевой миноранте, φ наиболее эффективно при малых значениях градиентов функций g_i.

Аппроксимация множества dom Ω в том случае, когда функции $g_i(x, p)$ линейны по x при фиксированном p и линейны по p при фиксированном x, множества X и P — выпуклые многогранники, исследовалась в [30]. В этом случае опорная функция ψ_w — явная выпуклая кусочно-линейная функция по первому аргументу, опорная функция φ_w — явная вогнутая кусочно-линейная функция по первому аргументу.

Рассмотрим вопрос конструктивной проверки предположения А. Очевидно, что неравенство $\underline{v} < +\infty$ является необходимым условием выполнения данного предположения, поэтому будем считать, что величина $\underline{v}$ известна. Как показано в [31], для задач выпуклого программирования условие Слейтера является необходимым и достаточным условием ограниченности оптимальных множителей Лагранжа. Пусть $x^0 \in X$ — такая точка, что

$$g_i(x^0, p) < 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ \ \forall p \in P. \tag{2.16}$$

Точку x^0, если она существует, будем называть равномерной точкой Слейтера. Пусть $\lambda^*(p)$ — оптимальные множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (1.2). Зная равномерную точку Слейтера, естественным образом можно обобщить результат из [32]:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(p) \leqslant \max_{p \in P} \left\{ \frac{f(x^0,p) - v(p)}{\min\{-g_i(x^0,p) : i = 1,\ldots,p\}} \right\} \ \forall p \in P.$$

Введем в рассмотрение функцию $\sigma(x) = \max\limits_{p\in P} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x,p)$. Предположим, что

$$P = co\{\pi^1,\ldots,\pi^M\}, \tag{2.17}$$

т. е. P — выпуклая оболочка конечного числа точек $\pi^1,\ldots,\pi^m$. Тогда в силу выпуклости функций g_i по переменной p имеем $\sigma(x) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant M} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} g_i(x,\pi^j)$ — максимум из конечного (возможно экспоненциального) числа выпуклых функций. Решив задачу выпуклого программирования, найдем точку

$$x^0 \in \operatorname{Arg}\min_{x\in X} \sigma(x). \tag{2.18}$$

Если $\sigma^0 = \sigma(x^0) < 0$, то условие (2.16) выполнено. В этом случае, применяя методы вогнутого программирования [27], найдем оценку $\overline{f}^0 \geqslant \max\limits_{p\in P} f(x^0,p)$. Тогда в качестве константы γ можно использовать величину

$$\gamma = \frac{\overline{f}^0 - \underline{v}}{(-\sigma^0)}. \tag{2.19}$$

Во многих практических задачах размерность вектора параметров p не велика, поэтому, если даже P — выпуклый многогранник, то количество вершин в представлении (2.17) является приемлемой с вычислительной точки зрения величиной.

3. Задача выпуклой квадратичной оптимизации специального вида

В данном разделе рассматривается частный случай задачи (1.1)–(1.3), в котором возможно аналитическое решение вспомогательных задач. Исследуемая задача имеет вид

$$f(x,p) = x^\top Qx + p^\top Hx + c^\top x + d^\top p \to \min_x, \tag{3.1}$$

$$Ax \leqslant Bp + g; \tag{3.2}$$

здесь Q — положительно определенная ($Q \succ 0$) $n \times n$-симметричная матрица, H — $s \times n$-матрица, B — $m \times s$-матрица, A — $m \times n$-матрица, $c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^s, g \in \mathbb{R}^m$. Ограничения (3.2) в виде (1.2) имеют вид

$$g_i(x,p) = a_i x + b_i p - g_i \leqslant 0, \quad i = 1,\ldots,m,$$

где a_i — i-я строка матрицы A, b_i — i-я строка матрицы B, g_i — i-я компонента вектора g, $i = 1,\ldots,m$. Ограничение $x \in X$ отсутствует. Как и ранее, параметр $p \in P$.

Будем предполагать, что множество $\Omega(p)$ ограничено $\forall p \in P$. Тогда функция параметрической совместности $w(p) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \{a_i x + b_i p - g_i\}$ ограничена снизу на P. Вычисление значений w по аналогии с (2.3), (2.4) эквивалентно решению задачи линейного программирования

$$z \to \min_{x,z}, \tag{3.3}$$

$$a_i x + b_i p + g_i \leqslant z, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{3.4}$$

Пусть $\tilde{p} \in P$. Решив задачу (3.3), (3.4) при $p = \tilde{p}$, получим пару $(\tilde{x}, \tilde{z})$. Выпуклая кусочно-линейная мажоранта, опорная к функции w в точке $p = \tilde{p}$, имеет вид

$$\psi_w(p, \tilde{p}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{a_i \tilde{x} + b_i p - g_i\}.$$

Параметрическая функция Лагранжа задается следующим образом:

$$L(x, \lambda, p) = f(x, p) + \lambda^\top (Ax - Bp - g),$$

двойственная функция —

$$\Theta(\lambda, p) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda, p) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Big\{ x^\top Q x + p^\top H x + c^\top x + d^\top p + \lambda^\top (Ax - Bp - g) \Big\}. \qquad (3.5)$$

Решение задачи (3.5) находим в виде

$$x^\sharp(\lambda, p) = -\frac{1}{2} Q^{-1} \left(H^\top p + c + A^\top \lambda \right)$$

и

$$\Theta(\lambda, p) = L(x^\sharp(\lambda, p), \lambda, p) = -\frac{1}{4}\lambda^\top A Q^{-1} A^\top \lambda - \frac{1}{2}\left(A Q^{-1} H^\top p + A Q^{-1} c + 2Bp + 2g \right)^\top \lambda$$
$$- \frac{1}{4} p^\top H Q^{-1} H^\top p - \frac{1}{2}\left(H Q^{-1} c - 2d \right)^\top p - \frac{1}{4} c^\top Q^{-1} c.$$

Функция оптимального значения имеет вид

$$v(p) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \Theta(\lambda, p) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} \Big\{ -\frac{1}{4}\lambda^\top A Q^{-1} A^\top \lambda - \frac{1}{2}\left(A Q^{-1} H^\top p + A Q^{-1} c + 2Bp + 2g \right)^\top \lambda \Big\}$$
$$- \frac{1}{4} p^\top H Q^{-1} H^\top p - \frac{1}{2}\left(H Q^{-1} c - 2d \right)^\top p - \frac{1}{4} c^\top Q^{-1} c.$$

Пусть $\tilde{p} \in P$. Определим функцию, получаем $\varphi_v(p, \tilde{p}) = \Theta(\tilde{\lambda}, p)$. Функция φ_v — опорная миноранта функции оптимального значения, аналогичная опорной миноранте φ_w из разд. 2. В данном случае φ_v имеет явный вид. Для задачи (3.1), (3.2) опорная миноранта используется для нахождения величины $\underline{v}$, и использование миноранты φ_v обусловлено тем, что она эффективно аппроксимирует v снизу. Оптимизационная процедура аналогична процедуре максимизации (2.8). Пусть $p^i \in P$, $i = 0, \ldots, k$, заданы. Определим функцию

$$\Phi^v_k(p) = \max_{0 \leqslant i \leqslant k} \varphi_v(p, p^i). \qquad (3.6)$$

Вычислим рекордную величину $\underline{v}_k = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} v(p^i) \geqslant \underline{v}$. Найдем точку

$$p^{k+1} \in \operatorname{Arg}\min_{p \in P} \Phi^v_k(p). \qquad (3.7)$$

По построению $\Phi^v_k(p) \leqslant v(p)$ $\forall p \in P$ и $\Phi^v_0(p^1) \leqslant \Phi^v_1(p^2) \leqslant \ldots \leqslant \Phi^v_k(p^{k+1}) \leqslant \underline{v}$. Описываемая итеративная процедура строит две последовательности оценок сверху и снизу значения $\underline{v}$: $\Phi^v_k(p^{k+1}) \leqslant \underline{v} \leqslant v^k$ $\forall k$. Поэтому если $v^k - \Phi^v_k(p^{k+1}) \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, то стоп: $\Phi^v_k(p^{k+1})$ есть ε-оценка снизу величины $\underline{v}$. В противном случае вычислительный процесс продолжается.

П р и м е р 5. Задача параметрической выпуклой квадратичной оптимизации имеет вид

$$x^2 + (9 - p)x \to \min_x, \qquad (3.8)$$

$$3 - p \leqslant x \leqslant 12 - p. \qquad (3.9)$$

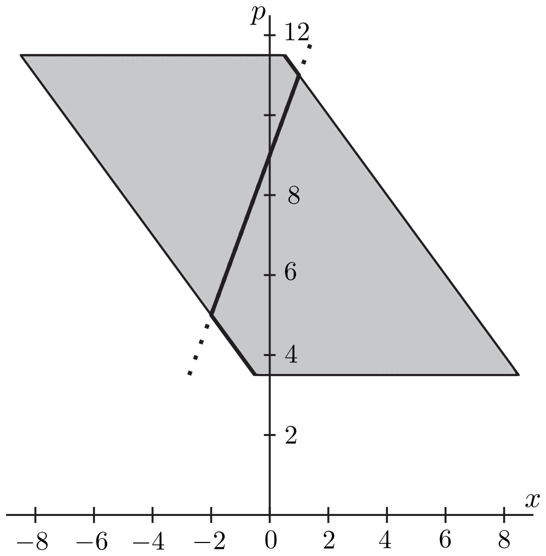

Рис. 3. Линия безусловного параметрического минимума показана пунктиром, условного — сплошной черной линией.

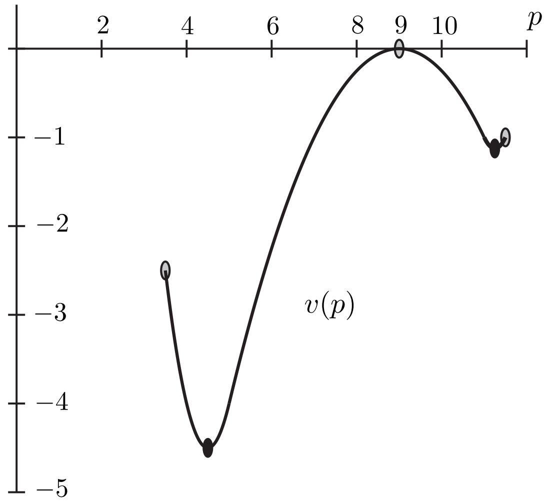

Рис. 4. График функции v, черные точки — точки минимума, серые точки — точки максимума.

Данная задача — частный случай задачи (3.1), (3.2), в которой $n = 1,\ m = 2,\ s = 1,$

$$Q = (1),\quad H = (-1),\quad c = (9),\ d = (0),\quad A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция и ограничения зависят от скалярного параметра $p \in P = [3.5, 11.5]$. Нас будет интересовать поведение функции оптимального значения

$$v(p) = \min_x \{x^2 + (9-p)x\colon 3 - p \leqslant x \leqslant 12 - p\}$$

на отрезке P.

Нетрудно определить, что параметрический аргминимум $x^*(p)$ задачи (3.8), (3.9) задается следующим образом:

$$x^*(p) = \begin{cases} 3 - p, & 3.5 \leqslant p \leqslant 5, \\ \dfrac{p-9}{2}, & 5 \leqslant p \leqslant 11, \\ 12 - p, & 11 \leqslant p \leqslant 11.5. \end{cases}$$

Функция оптимального значения при этом имеет вид

$$v(p) = \begin{cases} 2p^2 - 18p + 36, & 3.5 \leqslant p \leqslant 5, \\ -\dfrac{(p-9)^2}{4}, & 5 \leqslant p \leqslant 11, \\ 2p^2 - 45p + 252, & 11 \leqslant p \leqslant 11.5. \end{cases}$$

Геометрические интерпретации параметрической зависимости решения от p, функции оптимального значения v, точек минимума и максимума v на P показаны на рис. 3 и 4.

Функция v не является ни выпуклой, ни вогнутой, она многоэкстремальна. Точка $p_1^{\min} = 4.5$ — точка глобального минимума, $v(p_1^{\min}) = -4.5$; точка $p_2^{\min} = 11.25$ — точка локального минимума, $v(p_2^{\min}) = -1.125$; точка $p_1^{\max} = 3.5$ — точка локального максимума, $v(p_1^{\max}) = -2.5$; точка $p_2^{\max} = 9.0$ — точка глобального максимума, $v(p_2^{\max}) = 0.0$; точка $p_2^{\max} = 11.5$ — точка локального максимума, $v(p_3^{\max}) = -1.0$. Применение процедуры (3.6), (3.7) находит $\underline{v} = -4.492$ за 5 итераций. Решение задачи (2.18) достигается в точке $x^0 = 0$ и $\sigma^0 = -0.5$. Константа γ в соответствии с (2.19) равна 9. Применение процедуры максимизации (2.8) находит величину $\overline{v} = 0$ за 3 итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Измаилов А.Ф.** Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006. 248 с.
2. **Левитин Е.С.** Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1992. 360 с.
3. **Bank G., Guddat J., Klatte K., Kummer B., Tammer K.** Non-linear parametric optimization. Basel: Birkhäuser, 1982. 228 p. doi: 10.1007/978-3-0348-6328-5
4. **Guddat J., Vasquez V.G., Jongen H.Th.** Parametric optimization: singularities, pathfollowing and jumps. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 1990. 191 p. doi: 10.1007/978-3-663-12160-2
5. **Klatte D., Kummer B.** Nonsmooth equations in optimization. Regularity, calculus, methods and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 362 p. doi: 10.1007/b130810
6. **Zlobec S.** Stable parametric programming. NY: Springer-Science, 2001. 329 p. doi: 10.1007/978-1-4615-0011-7
7. **Еремин И.И.** Противоречивые модели модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
8. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. Сб. статей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 136 с.
9. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
10. **Федоров В.В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
11. **Fiacco A.V., Kyparisis J.** Convexity and concavity properties of the optimal value function in parametric nonlinear programming // J. Optim. Theory Appl. 1986. Vol. 48. P. 95–126. doi: 10.1007/BF00938592
12. **Kyparisis J., Fiacco A.V.** Generalized convexity and concavity of the optimal value function in nonlinear programming // Math. Progr. 1987. Vol. 39. P. 285–304. doi: 10.1007/BF02592078
13. **Aubin J.P.** Lipschitz behaviour of solutions to convex minimization problems // Math. Oper. Research. 1984. Vol. 9, no. 1. P. 87–111. doi: 10.1287/moor.9.1.87
14. **Gfrerer H., Klatte D.** Lipschitz and Hölder stability of optimization problems and generalizex equations // Math. Progr., Ser A. 2016. Vol. 158. P. 35–75. doi: 10.1007/s10107-015-0914-1
15. **Сухарев А.Г.** Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. М.: Наука, 1989. 304 с.
16. **Левитин Е.С.** О редукции невыпуклых задач обобщенного полубесконечного математического программирования к выпуклым задачам полубесконечного программирования // Автоматика и телемеханика. 1998. № 1. С. 28–34.
17. **Булатов В.П.** Методы решения многоэкстремальных задач (глобальный поиск) // Методы численного анализа и оптимизации / ред. Б. А. Бельтюков, В. П. Булатов. Новосибирск, 1987. С. 133–157.
18. **Хамисов О.В.** Глобальная оптимизация функций с вогнутой минорантой // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1552–1563.
19. **Floudas C.A.** Deterministic global optimization. Theory, methods and applications. NY: Springer, 2000. 742 p.
20. **Gorski J., Pfeuffer F., Klamroth K.** Biconvex sets and optimization with biconvex functions: a survey and extensions // Math. Meth. Oper. Res. 2007. Vol. 66. P. 373–407. doi: 10.1007/s00186-007-0161-1
21. **Meng Z., Jiang M., Shen R., Xu L., Dang C.** An objective penalty function method for biconvex programming // J. Glob. Optim. 2021. Vol. 81. P. 599–620. doi: 10.1007/s10898-021-01064-5
22. **Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.** Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 368 с.
23. **Булатов В.П.** Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 164 с.
24. **Булатов В.П., Белых Т.И.** Численные методы решения многоэкстремальных задач, связанные с обратными задачами математического программирования // Изв. вузов. Математика. 2007. Т. 48, № 2. С. 14–20.
25. **Норкин В.И.** О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 7. С. 992–1006.
26. **Еремин И.И.** Некоторые вопросы кусочно-линейного программирования // Изв. вузов. Математика. 1997. № 12. С. 49–61.
27. **Horst R., Tuy H.** Global optimization (Deterministic approaches). Berlin: Springer-Verlag, 1996. 727 p.

28. **Булатов В.П., Хамисов О.В.** Методы отсечения в E^{n+1} для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1830–1842.
29. **Пшеничный Б.Н.** Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 144 с.
30. **Khamisov O.V.** Approximation of parametrically given polyhedral sets // Proceedings of the Workshop on Applied Mathematics and Fundamental Computer Science / eds. Sergei S. Goncharov, Yuri G. Evtushenko. Omsk, 2020. URL: https://ceur-ws.org/Vol-2642/paper10.pdf .
31. **Gaivin J.** A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming // Math. Progr. 1977. Vol. 12. P. 136–138. doi: 10.1007/BF01593777
32. **Hiriart-Urruty J.-B., Lemarèchal C.** Convex analysis and minimization algorithms I. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 431 p. doi: 10.1007/978-3-662-02796-7

Поступила 13.06.2023
После доработки 14.08.2023
Принята к публикации 21.08.2023

Хамисов Олег Валерьевич
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
зав. отделом
Институт систем энергетики им Л. А. Мелентьева СО РАН
г. Иркутск
e-mail: khamisov@isem.irk.ru

REFERENCES

1. Izmailov A.F. *Chuvstvitel'nost' v optimizatsii* [Sensitivity in optimization], Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 248 p. ISBN: 978-5-9221-0655-9 .
2. Levitin E.S. *Perturbation theory in mathematical programming and its applications*, Chichester, NY, Wiley & Sons, 1994, 383 p. ISBN: 9780471939351 . Original Russian text was published in Levitin E.S., *Teoriya vozmushchenii v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1992, 360 p. ISBN: 5-02-014887-3 .
3. Bank B., Guddat J., Klatte D., Kummer B., Tammer K. *Non-linear parametric optimization*, Basel, Birkhäuser, 1982, 228 p. doi: 10.1007/978-3-0348-6328-5
4. Guddat J., Vasquez F.G., Jongen H.Th. *Parametric optimization: singularities, pathfollowing and jumps.* Wiesbaden, Springer Fachmedien, 1990. 191 p. doi: 10.1007/978-3-663-12160-2
5. Klatte D., Kummer B. *Nonsmooth equations in optimization. Regularity, calculus, methods and applications*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002, 362 p. doi: 10.1007/b130810
6. Zlobec S. *Stable parametric programming*, NY, Springer, 2001, 329 p. doi: 10.1007/978-1-4615-0011-7
7. Eremin I.I. *Protivorechivye modeli optimal'nogo planirovaniya* [Contradictory models of optimal planning], Moscow, Nauka Publ., 1988, 160 p. ISBN: 5-02-013773-1 .
8. *Parametric optimization and approximation methods of improper mathematical programming problems.* Collection of articles. Sverdlovsk, Ucheb. Nauch. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1985, 136 p.
9. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming], Moscow, Nauka Publ., 1983, 336 p.
10. Fedorov V.V. *Chislennye metody maksimina* [Numerical maximin methods], Moscow, Nauka Publ., 1979, 280 p.
11. Fiacco A.V., Kyparisis J. Convexity and concavity properties of the optimal value function in parametric nonlinear programming. *J. Optim. Theory Appl.*, 1986, vol. 48, pp. 95–126. doi: 10.1007/BF00938592
12. Kyparisis J., Fiacco A.V. Generalized convexity and concavity of the optimal value function in nonlinear programming *Math. Progr.*, 1987, vol. 39, no. 3, pp. 285–304. doi: 10.1007/BF02592078
13. Aubin J.P. Lipschitz behaviour of solutions to convex minimization problems. *Math. Oper. Research*, 1984, vol. 9, no. 1, pp. 87–111. doi: 10.1287/moor.9.1.87
14. Gfrerer H., Klatte D. Lipschitz and Hölder stability of optimization problems and generalized equations. *Math. Progr, Ser. A*, 2016, vol. 158, no. 1–2, pp. 35–75. doi: 10.1007/s10107-015-0914-1

15. Sukharev A.G. *Minimax models in the theory of numerical methods*, Dordrecht, Springer, 1992, 258 p. doi: 10.1007/978-94-011-2759-2 Original Russian text was published in Sukharev A. G., *Minimaksnye algoritmy v zadachakh chislennogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 304 p. ISBN: 9785020139428 .
16. Levitin E.S. Reduction of nonconvex problems of generalized semi-infinite mathematical programming to convex problems of semi-infinite programming. *Autom. Remote Control*, 1998, vol. 59, no. 1, pp. 22–27.
17. Bulatov V.P. *Methods for solving multiextremal problems (global search).* In: *Methods of numerical analysis and optimization*, eds. B.A. Bel'tyukov, V.P. Bulatov, Novosibirsk, Nauka Publ., 1987, pp. 133–157 (in Russian).
18. Khamisov O.V. Global optimization of functions with concave support minorant. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 9, pp. 1473–1483.
19. Floudas C.A. *Deterministic Global Optimization. Theory, Methods and Applications*, NY, Springer, 2000, 742 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4949-6
20. Gorski J., Pfeuffer F., Klamroth K. Biconvex sets and optimization with biconvex functions: a survey and extensions. *Math. Meth. Oper. Res.*, 2007, vol. 66, pp. 373–407. doi: 10.1007/s00186-007-0161-1
21. Meng Z., Jiang M., Shen R., Xu L., Dang C. An objective penalty function method for biconvex programming. *J. Glob. Optim.*, 2021, vol. 81, pp. 599–620. doi: 10.1007/s10898-021-01064-5
22. Sukharev A.G., Timokhov A.V., and Fedorov V.V. *Kurs metodov optimizatsii* [Course of optimization methods]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 368 p.
23. Bulatov V.P. *Metody pogruzheniya v zadachakh optimizatsii* [Embedding methods in optimization problems], Novosibirsk, Nauka Publ., 1977, 164 p.
24. Bulatov V.P., Belykh T.I. Numerical solution methods for multiextremal problems connected with inverse problems in mathematical programming. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 6, pp. 11–17. doi: 10.3103/S1066369X07060023
25. Norkin V.I. Piyavskij's method for solving the general global optimization problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 7, pp. 873–886.
26. Eremin I.I. Some questions of piecewise linear programming. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 12, pp. 47–59.
27. Horst R., Tuy H. Global optimization (deterministic approaches), Berlin, Springer-Verlag, 1996, 727 p. doi: 10.1007/978-3-662-03199-5
28. Bulatov V.P., Khamisov O.V. Cutting methods in E^{n+1} for global optimization of a class of functions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 11, pp. 1756–1767. doi: 10.1134/S0965542507110036
29. Pshenichnyi B.N. *Neobkhodimye usloviya ekstremuma* [Necessary conditions for an extremum], Moscow, Nauka Publ., 1982, 144 p.
30. Khamisov O.V. Approximation of parametrically given polyhedral sets. In: *Proceedings of the Workshop on Applied Mathematics and Fundamental Computer Science*, eds. Sergei S. Goncharov, Yuri G. Evtushenko, Omsk, 2020. Available on: https://ceur-ws.org/Vol-2642/paper10.pdf .
31. Gaivin J. A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming. *Math. Progr.*, 1977, vol. 12, no. 1, pp. 136–138. doi: 10.1007/BF01593777
32. Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C. *Convex analysis and minimization algorithms*, Part I, Berlin, Springer-Verlag, 1993, 418 p. doi: 10.1007/978-3-662-02796-7

Received June 13, 2023
Revised August 14, 2023
Accepted August 21, 2023

Funding Agency: This work was carried out under the state task project no. FWEU-2021-0006 (registration number AAAA-A21-121012090034-3).

Oleg V. Khamisov, Dr. Phys.-Math. Sci., Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: khamisov@isem.irk.ru .

Cite this article as: O. V. Khamisov. Optimization of the optimal value function in problems of convex parametric programming. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 247–260 .