

УДК 519.874

**ТОКЕНИЗАЦИЯ АКТИВОВ И СВЯЗАННЫЕ ЗАДАЧИ****В. Н. Фролов, А. А. Ватолин, А. П. Романчук**

На протяжении ряда лет авторы работают в сфере токенизации активов, в частности драгоценных металлов. Разработан подход (включая алгоритмы, математические модели и программную реализацию) к задаче управления запасами золота. Данный подход позволяет эффективно управлять золотым запасом с учетом того, что чем быстрее оборачиваются деньги, тем меньше золота требуется для обеспечения функционирования финансовой системы. Кроме того, перевод платежей в онлайн-режим резко снижает потребность в оборотных средствах, а значит, и необходимое для этого количество золота. Авторы рассматривают представленные алгоритмы как очень важную часть возможной системы расчетов с золотым обеспечением, позволяющую решить проблему организации международных платежей между странами в их национальных валютах во избежание доминирования какой-либо одной фиатной валюты.

Ключевые слова: резерв золота, золотой стандарт, управление ресурсами, токенизация.

**V. N. Frolov, A. A. Vatolin, A. P. Romanchuk. Asset tokenization and related problems.**

For a number of years, the authors have been working in the sphere of asset tokenization, especially in connection with precious metals. An approach (including algorithms, mathematical models, and software implementation) to the gold reserve management problem has been developed. This approach allows to effectively manage the gold reserve, taking into account the fact that the faster the money is turned over, the less gold is required to ensure the functioning of the financial system. Moreover, the transfer of payments to the online mode dramatically reduces the need for working capital, and hence the amount of gold required for it. The authors consider the provided algorithms as a very important part of a possible gold-backed settlement system that allows to solve a problem of organizing international payment transactions between countries in their national currencies to avoid the dominance of a single fiat currency.

Keywords: gold reserve, gold standard, resource management, tokenization.

MSC: 90X10

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-231-246

*Авторы этой статьи д-р экон. наук, профессор В. Н. Фролов и д-р физ.-мат. наук А. А. Ватолин многие годы работали под руководством академика И. И. Ерёмкина в отделе математического программирования Института математики и механики УрО РАН. Наша научная деятельность была тесно связана с тематикой, развиваемой И. И. Ереминым, в области анализа противоречивых задач математического программирования [1]. Мы благодарны и признательны за его неоценимый вклад в наше становление как научных сотрудников.*

**1. Почему токенизация не работает как ожидалось?**

Токенизация всевозможных активов<sup>1</sup>, начиная с драгоценных металлов и наличных денег и заканчивая электроэнергией, — своеобразная примета нашего времени. В первую очередь

---

<sup>1</sup>Токенизация, простыми словами, — это процесс превращения реальных активов, таких как ценные бумаги, драгоценные металлы, недвижимость в цифровые токены, а токены соответственно — цифровые сертификаты, записи в электронном реестре, гарантирующие их владельцу право владения данным активом.

это связано с появлением технологической базы для создания криптографически защищенных реестров, например с использованием технологии блокчейн<sup>2</sup>. Гонка проектов токенизации продолжается до сих пор, однако по прошествии нескольких лет мы видим, что с прикладной точки зрения проблема перевода активов в цифровую форму нигде не решена (существует огромное количество заявлений и намерений, а результатов почти нет); см., например, обзоры в [2; 3].

На это есть несколько причин. Первая из них — технологическая незавершенность многих проектов: очень часто токены выпускаются только в какой-то блокчейн-сети (например, в Ethereum), номинально привязаны к какому-то активу, после чего производится лишь несколько стандартных транзакций перевода с одного кошелька на другой (см. обзор проектов в [4]). На этом проект заканчивается. Однако распределенный реестр — это лишь самая нижняя часть реальной системы, которая, по сути, отвечает только за записи в системе учета. Чтобы начать, например, торговый бизнес, недостаточно купить и настроить учетную систему. Необходимо создать большую инфраструктуру: арендовать склад, наладить логистику, купить транспорт, открыть счет в банке, нанять кладовщика, экспедитора, продавца, арендовать торговую точку, сделать в ней ремонт, чтобы она была привлекательной, и т. д.

Аналогично обстоят дела и с проектами по запуску токенизации: нужно хранилище для обеспечения выпускаемых токенов (например, депозитарий драгметаллов), нужны поставщики, банковские счета, подключение к товарным биржам, комплаенс-офицеры (KYC<sup>3</sup>, AML<sup>4</sup>), нужен высокоуровневый API<sup>5</sup> для использования токена сторонними разработчиками. Также нужны клиентские мобильные или веб-приложения, чтобы можно было легко и понятно подключиться к сервису.

Вторая причина — отсутствие фундаментальной проработки того, как должно быть построено управление обеспечением применительно к торговле самим электронным токеном (активом). Также необходимо решить проблему эффективного управления внешними, в том числе денежными, ресурсами, чтобы не было ситуации, когда электронная валюта продается на рынке, а для нее нет резерва в хранилище.

Третья причина заключается в том, что часто отсутствует понимание того, зачем вообще нужна цифровая валюта, обеспеченная ресурсами. Во многих случаях токенизация проводится только для отслеживания движения конкретного продукта. Однако валюта, обеспеченная некоторыми ресурсами, может играть роль полноценного платежного инструмента. Его могут купить банки, брокеры, страховые компании, другие участники экосистемы для обеспечения ценовых рисков, связанных с данным ресурсом, а также со всеми его производными. Обеспечение цифровой валюты означает, что ее владелец всегда может получить от эмитента валюты либо сам ресурс, либо его справедливую рыночную стоимость в денежном выражении.

Некоторые авторы (например, [5]) пытались описать и реализовать платежную систему для электронной валюты, связанной с золотом (см. их проект [6]). Но такой подход не предусматривает создание каких-либо эффективных алгоритмов управления ресурсами. Современные проекты токенизации, связанные с золотом, также используют очень простой метод создания токенов на блокчейне и не принимают во внимание управление обеспечением (см. [7]).

Для решения вышеуказанных задач нами была разработана и протестирована модель управления запасами драгоценных металлов с непрерывным потоком заявок на покупку и продажу. В данной статье дается несколько сокращенное описание этой модели.

---

<sup>2</sup>Суть технологии блокчейн состоит в создании децентрализованной сети, хранящей реестр транзакций с токенами в виде цепочки блоков. Блоки и транзакции связаны друг с другом криптографическими методами так, что система может автоматически проверять достоверность любой операции.

<sup>3</sup>KYC (Know Your Customer) — принцип идентификации своих клиентов.

<sup>4</sup>AML (Anti-Money Laundering) — принцип борьбы с отмыванием денежных средств, полученных преступным путем.

<sup>5</sup>API (Application Programming Interface) — концепция организации доступа к функциям информационных систем при помощи программных средств.

## 2. Проблема Коперника — Грешема

Примечательно, что создание этой обеспеченной золотом валюты осуществлялось на основе исследования проблемы разрушения систем золотого стандарта. Эта проблема стоит перед человечеством около пятисот лет и известна как проблема Коперника — Грешема (или закон Грешема в англоязычной литературе). Суть ее заключается в том, что любая система “лучших” валют, обеспеченных каким-то ценным ресурсом, всегда будет разрушена из-за способности государств бесконечно долго выпускать “худшие”, необеспеченные фиатные валюты, и покупать “лучшие” валюты.

Около пятисот лет назад польский астроном, экономист и математик Николай Коперник и английский финансист Томас Грешем сформулировали экономический закон: “*Худшие деньги вытесняют из обращения лучшие*” (см. обзор [8]). Под “лучшими” понимаются деньги, которые (в отличие от “худших”) имеют “внутреннюю” стоимость не ниже их номинальной стоимости.

Перенесем этот закон на современные реалии, максимально упростив ситуацию. Например, какая-либо страна вводит золотой стандарт (“хорошие” деньги). Допустим, есть сто тонн золота, обеспечивающего эмиссию этих денег. Эмиссия ограничена размером золотого запаса: сколько граммов в сотне тонн, столько и денежных единиц. На рынке также есть необеспеченные фиатные (“плохие”) деньги. Их эмиссия не ограничена. В этом случае страны-эмитенты фиатных денег проводят эмиссию на покупку золотой валюты, покупают ее, а затем предъявляют эмитенту и забирают золотой запас в размере ста тонн. Таким образом, с рынка исчезают обеспеченные золотом деньги и остаются только необеспеченные фиатные деньги. Это проблема Коперника — Грешема в современной редакции.

Любой специалист, знающий эту проблему, считает тех, кто хотел бы ввести обеспеченную золотом валюту, маргиналами. Он сошлется на крах Генуэзской и Бреттон-Вудской валютных систем (см., например, [9]). Сам крах произошел не только в связи с проблемой Коперника — Грешема, но данная проблема также сыграла свою роль в исчезновении этих валютных систем. В частности, Бреттон-Вудская система прекратила свое существование после того, как Франция предъявила Соединенным Штатам обеспеченный золотом доллар и вывезла из США во Францию несколько тысяч тонн золотого запаса [10].

Проблема валюты, обеспеченной золотом, может серьезно обсуждаться, если будет решена проблема Коперника — Грешема.

Мы предложили инновационный подход к решению проблемы, при котором не только обращаются “хорошие” деньги, но и устраняются риски скупки их за “плохие”. Основная идея заключается в реализации *динамической системы управления запасами* физического золота, лежащего в обеспечении.

Для эффективной работы платежной системы, построенной на обеспеченной золотом электронной валюте, необходима адекватная математическая модель управления динамически изменяющимся золотым запасом с учетом ограничений и требований рынка. Количество выпущенной электронной валюты не должно превышать ее золотое обеспечение.

Важнейшим требованием является поддержание оборота золота на уровне, достаточном для непрерывной работы системы. Если клиенты системы используют фиатные деньги для покупки валюты, обеспеченной золотом, то одновременно увеличивается золотой запас системы. При выходе из золотой валюты соответственно продается часть золотого запаса системы.

Пользователи системы имеют возможность купить любое количество электронной валюты, даже доли грамма. Однако купить золото на внешнем рынке (по курсу, близкому к оптимальному) можно только в объемах, кратных мерному, т. е., например, не менее одного килограмма.

Математическая модель должна учитывать все особенности рынка: сроки поставки физического золота, включая выходные и праздничные дни, поступление заявок в систему на покупку и продажу золота, рыночную цену золота, вес слитков и другие условия оперативно-го управления резервом золота для обеспечения оперативного режима работы.

В результате проведенного нами исследования были сформулированы критерии оптималь-

ности обеспечения, приобретаемого и реализуемого на внешнем рынке. Они основаны на строгом математическом утверждении о необходимой величине собственного резерва компании.

Алгоритм, основанный на этой модели, позволяет поддерживать резерв на оптимальном уровне, обеспечивает выполнение всех поступающих распоряжений, управляет эмиссией и резервами (золота и валюты), исходя из следующих основных требований:

- полное обеспечение электронного золота физическим в любой момент времени;
- проведение всех конвертаций, выполняемых как для управления собственными резервами (капиталом) компании, так и для удовлетворения заявок клиентов, по курсам, близким к оптимальным;
- поддержание доли операций (конвертаций), выполняемых в режиме онлайн, не ниже заданного уровня;
- поддержание длительности операций (конвертаций), выполняемых офлайн, не дольше заданного уровня;
- гарантирование (практически) нулевого уровня курсовых рисков по валютам и золоту;
- обеспечение защиты средств клиентов и капитала компании от спекулятивных атак (в том числе роботов) и скачков/потрясений на биржах;
- обеспечение выполнения всех перечисленных требований при минимальном уровне расходов и минимальном уровне “замороженного” капитала компании.

Основным результатом предлагаемой математической модели управления балансом ликвидности является возможность поддерживать работу системы, избегая неоправданно больших или недостаточных объемов эмиссии электронной валюты.

Обладая строго ограниченным запасом собственного золота, система способна поддерживать выпуск и обращение обеспеченной электронной валюты сколь угодно долго без риска быть скупленной “плохими” деньгами.

### 3. Контроль за формированием резервов

Опишем представление о том, как на практике должна работать система управления запасами.

Периодически модуль управления ликвидностью (эмиссионный центр) автоматически анализирует состояние резерва ценностей (например, золота), находящегося в собственности компании, оператора платформы (далее — оператор), в специализированном хранилище, и на основании предложенного способа управления запасами направляет товарному брокеру заявку на приобретение необходимого количества ценностей.

После завершения приобретения ценностей брокером модуль ликвидности осуществляет дополнительную (последующую) эмиссию, которая также доступна для продажи. Эмиссионный центр отслеживает поток заявок от пользователей, и если общая сумма заявок на покупку электронной валюты превысит объем эмитированной валюты, автоматически формируется запрос на покупку обеспечивающих резервных ценностей у брокера; при этом обслуживание заявок на покупку электронной валюты в объеме, превышающем эмитированный, до момента подтверждения покупки золота и выполнения дополнительной эмиссии приостанавливается.

Величина резервов обеспечения виртуальной валюты, необходимая для успешного функционирования системы, определяется на основе математической модели, учитывающей динамику спроса на виртуальную валюту. Пример такой модели приведен ниже. Если в ходе непрерывного мониторинга достаточности резервов по данной модели система обнаружит, что поступившие заявки на покупку суммы виртуальной валюты превышают сумму резервов на счетах оператора, сначала покупается количество золота, необходимое для выполнения регламента, после чего виртуальная валюта выпускается и зачисляется на счет клиента. Такой подход гарантирует строгое соблюдение принципа 100%-го обеспечения виртуальной валюты физическим золотом.

В реальных рыночных условиях не всегда есть возможность моментально купить физическое золото. Особые трудности возникают в выходные. Хотя их можно несколько нивелировать, покупая золото в разных часовых поясах (о мгновенности речь не идет). Кроме того, существуют комиссии при покупке и продаже физического золота на бирже, причем эти комиссии зависят от веса слитка. Они могут составлять от четверти процента для слитков в несколько килограммов и быть в десятки раз больше для мелких слитков весом в десятки и сотни граммов. Поэтому для снижения комиссий необходимо покупать золотые слитки весом не менее одного килограмма.

Для обеспечения низких комиссий и онлайн-удовлетворения заявок на валюту, обеспеченную золотом, оператор должен владеть собственным запасом золота. Описанная математическая модель позволяет определить как вес первоначально закупленного золота, так и минимальное количество золота, при котором пополняется золотой запас. Способ управления резервом включает формирование дополнительного резерва путем создания валютного резерва как минимум в одной традиционной валюте (фиатной валюте), хранящейся на счетах оператора в системе и на банковском счете оператора.

Для обеспечения круглосуточной работы системы обращения электронных валют в режиме онлайн текущие покупки и продажи электронной валюты осуществляются с использованием электронной валюты на счетах оператора и не менее одной традиционной (фиатной) валюты из валютного резерва оператора. Электронная валюта и традиционные валюты, принадлежащие оператору, составляют капитал оператора.

При покупке электронной валюты в системе с использованием капитала оператора электронная валюта предоставляется моментально из резервов оператора по курсу, действующему на момент покупки, и зачисляется на счет покупателя, а сумма денег в виде фиатной валюты зачисляется на счет оператора. При продаже в системе электронной валюты электронная валюта зачисляется на счет оператора, увеличивая его резерв электронной валюты, а сумма в фиатной валюте переводится по текущему курсу на момент продажи на счет продавца. За счет усовершенствованного метода управления резервами обеспечивается ускорение расчетов в системе электронного валютного обращения.

В целях сокращения количества операций, выполняемых в офлайн-режиме, оператор осуществляет операцию покупки/продажи обеспечения электронной валюты на внешнем рынке, выпуская электронную валюту на приобретаемую сумму обеспечения, зачисления ее на счет электронной валюты оператора. При этом пороговые объемы электронной валюты, при достижении которых оператор инициирует операции по покупке/продаже обеспечения на внешнем рынке, задаются переменными  $G_{\min}/G_{\max}$  на основе расчетов, выполненных с использованием модели, описанной ниже.

Объемы залога купленного/продаваемого  $\hat{G}_{\text{buy}}^*/\hat{G}_{\text{sell}}^*$  также устанавливаются на основе расчетов, выполненных с использованием модели.

#### 4. Описание модели

Поскольку полное описание модели баланса ликвидности (управления резервами) заняло бы слишком много места, опишем упрощенный вариант. Будем считать, что система использует только одну фиатную валюту, один вид обеспечения (золото) и одного брокера для покупки/продажи этого обеспечения. Мы также исключим ряд элементов (в частности, таких как использование деривативов и форекс-брокеров), позволяющих повысить эффективность системы, но при этом значительно усложняющих ее.

Для имитационного моделирования необходимо принять законы распределения следующих величин:

- моменты времени поступления заказов на покупку (золото);
- моменты времени поступления заявок на продажу (золото);
- объем заявки на покупку;

- объем заявки на продажу.

Для первых двух пунктов будут взяты распределения, определяемые пуассоновскими потоками. Потоки покупки и продажи могут быть объединены в один поток, в нем тип заявки (покупка/продажа) определяется случайным образом (биномиальное распределение с вероятностью покупки 0.5 при равном среднем количестве заявок на покупку и продажу). Для объемов заявок мы также возьмем одно и то же логарифмически нормальное распределение, присвоив положительное значение заявкам клиентов на продажу золота и отрицательное значение заявкам на покупку золота.

Введем обозначения:

- $K$  — капитал компании-оператора;
- $G(t)$  — вес всего золота, находящегося под управлением компании (т. е. принадлежащего как компании, так и клиентам) в хранилищах в момент времени  $t$ ;
- $g(t)$  — часть  $G(t)$ , принадлежащая компании (еще не проданная покупателям) в момент времени  $t$ ;
- $g^*(t)$  — часть  $G(t)$ , принадлежащая клиентам в момент времени  $t$ ;
- $a(t)$  — объем заказа, поступающего в момент времени  $t$ ; если  $a(t) > 0$ , то клиент продает золото, если  $a(t) < 0$ , то покупает;
- $c(t)$  — объем валюты на счете компании в момент времени  $t$ ;
- $T_b/T_s$  — время, необходимое для покупки либо продажи золота из хранилища на внешнем рынке;
- $g_{git}(t)$  — объем золота (товаров в пути), который, как ожидается, поступит оператору; в момент времени  $t$  не находится в распоряжении компании в связи с длительностью  $T_b$  операции по покупке золота на рынке;
- $c_{git}(t)$  — сумма валюты, которую предполагается зачислить на счет компании; не находится на счете компании в момент времени  $t$  в связи с длительностью  $T_s$  операции по продаже золота на рынке;
- $e$  — стоимость 1 грамма золота (например, в долларах США или рублях); в рамках данной модели это значение можно считать постоянным;
- $\Delta$  — мерный объем золота;
- $of_{buy}(t) = 1$ , если  $a(t) < 0$  и  $g(t) + a(t) < 0$  (т. е.  $a(t)$  — это заявка на покупку золота, которая выполняется офлайн), иначе  $of_{buy}(t) = 0$ ;
- $of_{sell}(t) = 1$ , если  $a(t) > 0$  и  $c(t) - e a(t) < 0$  (т. е.  $a(t)$  есть распоряжение на продажу золота офлайн), иначе  $of_{sell}(t) = 0$ ;
- $G_{min}$  — минимальный (пороговый) объем золота  $g(t)$ , при достижении которого инициируется покупка дополнительного золота в хранилище;
- $G_{buy}(t) = 1$ , если  $g(t) + (1 - of_{buy}(t))a(t) + g_{git}(t) < G_{min}$ , иначе  $G_{buy}(t) = 0$ ;
- $G_{buy}$  — фиксированный объем золота, используемый для расчета объема золота, покупка которого на внешнем рынке должна быть инициирована в момент времени  $t$ , если  $G_{buy}(t) = 1$ ;
- $G_{max}$  — максимальный (пороговый) объем золота  $g(t)$  в хранилище, при достижении которого необходимо инициировать продажу части запаса  $g(t)$  для увеличения объема  $c(t)$ ;
- $G_{sell}(t) = 1$ , если  $g(t) + (1 - of_{sell}(t))a(t) + g_{git}(t) > G_{max}$ , иначе  $G_{sell}(t) = 0$ ;
- $G_{sell}$  (искомый параметр) — фиксированный объем золота, используемый для расчета объема золота, продажа которого на внешний рынок должна быть инициирована в момент времени  $t$ , если  $G_{sell}(t) = 1$ ;
- $E_{store}$  — стоимость хранения 1 грамма золота в единицу времени;
- $r$  — ставка (в расчете на единицу времени), по которой могут быть размещены средства, связанные в капитале  $K = g(t) + e^{-1}c(t)$ ; в рамках этой модели значение  $r$  можно считать постоянным;
- $E_{of}(P)$  — репутационные (и в конечном счете материальные) потери, выраженные в деньгах, от (увеличившейся) доли  $P$  офлайн-операций; самый простой подход — установить

жесткое ограничение  $P_0$  на долю  $P$ :  $E_{\text{of}}(P) = 0$ , если  $P \leq P_0$ , и  $E_{\text{of}}(P)$  равно очень большому значению (сравнимому с рыночной стоимостью компании), если  $P > P_0$ ;

○ ComSt — комиссия, взимаемая с компании за операцию покупки/продажи золота (в пересчете на покупку/продажу 1 грамма золота);

○ ComCl — комиссия, взимаемая с клиента за операцию покупки/продажи золота (в пересчете на покупку/продажу 1 грамма золота);

○  $|a|$  — абсолютное значение числа  $a$ .

Рассмотрим две разные стратегии управления объемами покупки/продажи золота. Введем для них обозначения:  $G'_{\text{buy}}(t)/G'_{\text{sell}}(t)$  и  $G''_{\text{buy}}(t)/G''_{\text{sell}}(t)$ .

**Стратегия 1.** Если  $(g(t) + a(t)) \in [0, g(t) + e^{-1}c(t)] - [G_{\min}, G_{\max}]$  (здесь минус означает операцию вычитания множеств, в данном случае двух отрезков), то объемы  $G'_{\text{sell}}(t)$  и  $G'_{\text{buy}}(t)$  составляют

$$G'_{\text{buy}}(t) = G_{\text{buy}}, \quad G'_{\text{sell}}(t) = G_{\text{sell}}.$$

Если  $(g(t) + a(t)) \notin [0, g(t) + e^{-1}c(t)]$ , то объемы  $G'_{\text{buy}}(t)$  и  $G'_{\text{sell}}(t)$  полагаем

$$G'_{\text{buy}}(t) = |a(t)|, \quad G'_{\text{sell}}(t) = a(t).$$

Объединяя эти два случая, получаем

$$G'_{\text{buy}}(t) = |a(t)| \cdot \text{of}_{\text{buy}}(t) + G_{\text{buy}}(t) (1 - \text{of}_{\text{buy}}(t)) G_{\text{buy}},$$

$$G'_{\text{sell}}(t) = a(t) \cdot \text{of}_{\text{sell}}(t) + G_{\text{sell}}(t) (1 - \text{of}_{\text{sell}}(t)) G_{\text{sell}}.$$

**Стратегия 2.** Суть стратегии заключается в том, что если  $(g(t) + a(t)) \notin [G_{\min}, G_{\max}]$ , то объемы  $G''_{\text{buy}}(t)$  и  $G''_{\text{sell}}(t)$  таковы, что итоговая позиция количества золота после завершения операции занимает одну из позиций  $G_{\min} + G_{\text{buy}}$  или  $(G_{\max} - G_{\text{sell}})$  соответственно. Финальная запись выглядит следующим образом:

$$G''_{\text{buy}}(t) = G_{\text{buy}}(t) (|a(t)| (1 - \text{of}_{\text{buy}}(t)) - g(t) - g_{\text{git}}(t) + G_{\min} + G_{\text{buy}}) + \text{of}_{\text{buy}}(t) |a(t)|,$$

$$G''_{\text{sell}}(t) = G_{\text{sell}}(t) (a(t) (1 - \text{of}_{\text{sell}}(t)) + g(t) + g_{\text{git}}(t) - G_{\max} + G_{\text{sell}}) + \text{of}_{\text{sell}}(t) a(t).$$

Применим смешанную стратегию, представляющую собой выпуклую комбинацию стратегий 1 и 2, где объемы  $G^*_{\text{buy}}(t)$  и  $G^*_{\text{sell}}(t)$ , купленного и проданного золота, вычисляются по формулам

$$G^*_{\text{buy}}(t) = \alpha G'_{\text{buy}}(t) + (1 - \alpha) G''_{\text{buy}}(t), \quad G^*_{\text{sell}}(t) = \alpha G'_{\text{sell}}(t) + (1 - \alpha) G''_{\text{sell}}(t)$$

при  $\alpha \in [0, 1]$ .

Необходимость купить/продать на внешнем рынке объем золота, кратный  $\Delta$ , требует округления объема купленного/проданного золота  $G^*_{\text{buy}}(t)/G^*_{\text{sell}}(t)$  до  $\hat{G}^*_{\text{buy}}(t)/\hat{G}^*_{\text{sell}}(t)$ , что кратно величине  $\Delta$  мерного объема золота.

Введем обозначения:

$\lceil x \rceil / \lfloor x \rfloor$  — округление числа  $x$  вправо/влево до целого числа;

$\text{rnd}(t)$  — момент, ближайший к  $t$  слева (т. е. предыдущий) в потоке заявок на покупку/продажу золота, где по определению

$$\text{rnd}(t_k - T_b) = 0 \quad \forall t_k \in [t_1; t_1 + T_b), \quad \text{rnd}(t_k - T_s) = 0 \quad \forall t_k \in [t_1; t_1 + T_s);$$

здесь  $t_1$  — время поступления первой заявки (начало периода поступления заявок), а для зависящих от времени функций  $f(\cdot)$ , используемых в описании модели и определяемых в момент  $t_k$  поступления заказов, будем использовать общее обозначение типа

$$f(\text{rnd}(t_k - T_b)) = \begin{cases} f(\text{rnd}(t_k - T_b)), & \text{если } t_k \geq t_1 + T_b, \\ 0, & \text{если } t_k < t_1 + T_b; \end{cases}$$

и, подобным же образом,

$$f(\text{rnd}(t_k - T_s)) = \begin{cases} f(\text{rnd}(t_k - T_s)), & \text{если } t_k \geq t_1 + T_s, \\ 0, & \text{если } t_k < t_1 + T_s. \end{cases}$$

Объемы  $\hat{G}_{\text{buy}}^*(t)/\hat{G}_{\text{sell}}^*(t)$  вычисляются по следующим формулам:

$$\hat{G}_{\text{buy}}^*(t_k) = \begin{cases} \left\lceil \frac{G_{\text{buy}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rceil \Delta, & \text{если } k = 1, \\ \left\lceil \frac{G_{\text{buy}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rceil \Delta, & \text{если } \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{\text{buy}}(t_i) + \left\lceil \frac{G_{\text{buy}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rceil \Delta - G_{\text{buy}}^*(t_k) < \Delta, \quad k \geq 2, \\ \left\lfloor \frac{G_{\text{buy}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rfloor \Delta, & \text{если } \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{\text{buy}}(t_i) + \left\lceil \frac{G_{\text{buy}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rceil \Delta - G_{\text{buy}}^*(t_k) \geq \Delta, \quad k \geq 2; \end{cases}$$

$$\hat{G}_{\text{sell}}^*(t_k) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{G_{\text{sell}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rfloor \Delta, & \text{если } k = 1, \\ \left\lfloor \frac{G_{\text{sell}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rfloor \Delta, & \text{если } \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{\text{sell}}(t_i) + \left\lfloor \frac{G_{\text{sell}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rfloor \Delta - G_{\text{sell}}^*(t_k) < \Delta, \quad k \geq 2, \\ \left\lceil \frac{G_{\text{sell}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rceil \Delta, & \text{если } \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{\text{sell}}(t_i) + \left\lfloor \frac{G_{\text{sell}}^*(t_k)}{\Delta} \right\rfloor \Delta - G_{\text{sell}}^*(t_k) \geq \Delta, \quad k \geq 2, \end{cases}$$

где

$$\delta_{\text{buy}}(t_k) = \hat{G}_{\text{buy}}^*(t_k) - G_{\text{buy}}^*(t_k), \quad \delta_{\text{sell}}(t_k) = \hat{G}_{\text{sell}}^*(t_k) - G_{\text{sell}}^*(t_k).$$

Таким образом, объем купленного/проданного на внешнем рынке золота для компании определяется параметрами  $G_{\text{min}}$ ,  $G_{\text{buy}}$ ,  $G_{\text{max}}$ ,  $G_{\text{sell}}$ ,  $\alpha$ . Значения всех переменных, зависящих от  $t$ , интерпретируются как соответствующие “началу” этого момента. Данные значения в следующий момент (из пуассоновского потока) равны значениям в (предыдущий) момент  $t$  плюс сумма всех значений всех изменений, сделанных в момент  $t$ .

Пронумеруем значения моментов времени поступления заявок на покупку/продажу из рассматриваемого пуассоновского потока:  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . В начальный момент времени  $t_1$  мы полагаем  $g(t_1) = K/2$ ,  $c(t_1) = K/2e$ ,  $G(t_1) = g(t_1) = K/2$ . Далее, для всех моментов  $t$  суммы  $g(t) + e^{-1}c(t)$  равны или близки к  $K$  (небольшая неточность может появиться в паузах, во время которых золото покупается/продается на внешнем рынке).

Значения  $g_{\text{git}}(t)$ ,  $g(t)$ ,  $g^*(t)$ ,  $G(t)$ ,  $c_{\text{git}}(t)$ ,  $c(t)$  вычисляются последовательно по следующим формулам:

$$\begin{aligned} g_{\text{git}}(t_{k+1}) &= g_{\text{git}}(t_k) + \hat{G}_{\text{buy}}^*(t_k) - \text{of}_{\text{buy}}(t_k) |a(t_k)| - \hat{G}_{\text{buy}}^*(\text{rnd}(t_k - T_b)) \\ &\quad + \text{of}_{\text{buy}}(\text{rnd}(t_k - T_b)) |a(\text{rnd}(t_k - T_b))|, \\ g(t_{k+1}) &= g(t_k) + a(t_k) (1 - \text{of}_{\text{buy}}(t_k) - \text{of}_{\text{sell}}(t_k)) + \hat{G}_{\text{buy}}^*(\text{rnd}(t_k - T_b)) \\ &\quad - \text{of}_{\text{buy}}(\text{rnd}(t_k - T_b)) |a(\text{rnd}(t_k - T_b))| - \hat{G}_{\text{sell}}^*(t_k) + \text{of}_{\text{sell}}(t_k) a(t_k), \\ g^*(t_{k+1}) &= g^*(t_k) - a(t_k) (1 - \text{of}_{\text{buy}}(t_k) - \text{of}_{\text{sell}}(t_k)) \\ &\quad + \text{of}_{\text{buy}}(\text{rnd}(t_k - T_b)) |a(\text{rnd}(t_k - T_b))| - \text{of}_{\text{sell}}(t_k) a(t_k), \\ G(t_{k+1}) &= g(t_{k+1}) + g^*(t_{k+1}), \\ c_{\text{git}}(t_{k+1}) &= c_{\text{git}}(t_k) + e \hat{G}_{\text{sell}}^*(t_k) - e \text{of}_{\text{sell}}(t_k) a(t_k) - e \hat{G}_{\text{sell}}^*(\text{rnd}(t_k - T_s)) \\ &\quad + e \text{of}_{\text{sell}}(\text{rnd}(t_k - T_s)) a(\text{rnd}(t_k - T_s)), \\ c(t_{k+1}) &= c(t_k) - e a(t_k) (1 - \text{of}_{\text{buy}}(t_k) - \text{of}_{\text{sell}}(t_k)) - e \hat{G}_{\text{buy}}^*(t_k) + e \text{of}_{\text{buy}}(t_k) |a(t_k)| \\ &\quad + e \hat{G}_{\text{sell}}^*(\text{rnd}(t_k - T_s)) - e \text{of}_{\text{sell}}(\text{rnd}(t_k - T_s)) a(\text{rnd}(t_k - T_s)). \end{aligned}$$

Чем больше вложенный капитал  $K = g(t) + e^{-1} c(t)$ , тем реже происходят офлайн-операции купли-продажи золота, т.е. сокращаются затраты на организацию офлайн-операций, но при этом растут затраты на хранение золота и прибыль от размещения средств на рынке (по курсу  $r$ ) теряется.

Пусть Trend — тренд (линейная часть скорости) изменения функции

$$S(T) = \sum_{k=1,2,\dots,\text{rnd}(T)} a(t_k),$$

т.е. сумма берется по всем моментам пуассоновского потока между моментами времени  $t_1$  и  $T$ . Текущий момент времени будет принят за  $T$ . В случае достаточно длительного процесса тренд целесообразнее определять не на всем интервале от  $t_1$  до  $T$ , а на некотором интервале от какого-то промежуточного момента времени до  $T$ . В конце концов, критерием здесь является минимизация параметра  $K$  и функции  $\text{Ex}(\cdot)$ , определенных ниже.

Понятно, что разным трендам соответствуют разные значения искомым параметров  $G_{\min}$ ,  $G_{\text{buy}}$ ,  $G_{\max}$ ,  $G_{\text{sell}}$ . Например, в начале запуска системы ожидается отрицательный тренд (т.е. преобладание продаж электронной валюты клиентам). В этих условиях более оптимальными будут бóльшие значения  $G_{\min}$ ,  $G_{\text{buy}}$  и меньшие  $(K - G_{\max})$ ,  $G_{\text{sell}}$ . Моделирование заданного уровня тренда возможно благодаря изменению вероятности положительности  $a(t)$  (т.е. отклонению вероятности от исходного значения, равного 0.5). В то же время ненулевое значение параметра Trend целесообразно использовать только в ситуации, когда сформировался достаточно устойчивый тренд.

Ниже под вероятностью случайного события, синхронизированного с моментами получения заявок от клиентов, будем понимать частоту появления этого события на интервале наблюдения  $[t_1, T]$ .

Вероятность исполнения заказов офлайн

$$P(K, \text{Trend}, G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\max}, G_{\text{sell}}, \alpha) = \frac{\sum_{k=1,2,\dots,L} (\text{of}_{\text{buy}}(t_k) + \text{of}_{\text{sell}}(t_k))}{L},$$

где  $L = \text{rnd}(T)$ , определяется параметрами  $K$ , Trend,  $G_{\min}$ ,  $G_{\text{buy}}$ ,  $G_{\max}$ ,  $G_{\text{sell}}$ ,  $\alpha$ . Суммарные расходы с учетом репутационных потерь  $E_{\text{of}}(\cdot)$  за период длительностью  $T$  (включая заявки  $k = 1, 2, \dots, L$  потока), характеризующие Trend, находятся как

$$\begin{aligned} & \text{Ex}(K, \text{Trend}, G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\max}, G_{\text{sell}}, \alpha) \\ &= \sum_{k=1,2,\dots,L} \text{ComSt}(\hat{G}_{\text{buy}}^*(t_k) + \hat{G}_{\text{sell}}^*(t_k)) - \sum_{k=1,2,\dots,L} \text{ComCl}|a(t_k)| + \sum_{k=1,2,\dots,L} E_{\text{store}} G(t_k) (t_k - t_{k-1}) \\ & \quad + e^{-1} K r T + E_{\text{of}} \left( \frac{\sum_{k=1,2,\dots,L} (\text{of}_{\text{buy}}(t_k) + \text{of}_{\text{sell}}(t_k))}{L} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого набора искомым параметров  $G_{\min}$ ,  $G_{\text{buy}}$ ,  $G_{\max}$ ,  $G_{\text{sell}}$ ,  $\alpha$  проводим серию испытаний по описанной имитационной модели, добиваясь в результате оценки величин  $P(K, \text{Trend}, G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\max}, G_{\text{sell}}, \alpha)$  и  $\text{Ex}(K, \text{Trend}, G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\max}, G_{\text{sell}}, \alpha)$ .

Для эффективного функционирования системы нам необходимо обеспечить определенный уровень вероятности исполнения ордеров в онлайн-режиме, используя при этом минимальное значение капитала  $K$ .

Пусть задано пороговое значение  $P_0$  вероятности выполнения заявок в режиме офлайн. Тогда с помощью рассматриваемой имитационной модели последовательно решаются следующие задачи.

**З а д а ч а 1.**  $K_{\min} = \min\{K : P(K) \leq P_0\}$ .

**Задача 2.**  $Ex_{\min} = \min\{Ex(K_{\min}, Trend, G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\text{max}}, G_{\text{sell}}, \alpha)\}$  для всех допустимых значений  $G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\text{max}}, G_{\text{sell}}, \alpha$ .

Следует отметить, что минимизация случайных значений понимается как минимизация среднего или заданного процентиля.

Таким образом, для обеспечения вероятности исполнения заявок в режиме офлайн не выше уровня  $P_0$  требуется привлечение капитала в размере  $K_{\min}$ , в то же время для минимизации затрат требуется использовать решения, найденные при решении задачи 2 с параметрами  $G_{\min}, G_{\text{buy}}, G_{\text{max}}, G_{\text{sell}}, \alpha$ .

## 5. Необходимый и достаточный резерв капитала

В процессе выполнения клиентских заявок на покупку/продажу золота возникает необходимость покупки/продажи золота на внешнем рынке. При этом объем купленного/проданного золота необходимо округлить до кратного мерному объему  $\Delta$ . Для поддержания ликвидности и обеспечения достаточности капитала компании при выполнении клиентских заявок на покупку/продажу золота важно решение вопроса об алгоритме округления объема купленного/проданного золота на внешнем рынке.

Этот вопрос имеет точную математическую формулировку, приведенную ниже в теоремах 1 и 2. Утверждения (чисто прикладного характера), рассмотренные в теоремах 1 и 2, возникли для нас достаточно неожиданно в процессе разработки и программирования, описанных в разд. 2–4 алгоритмов управления ликвидностью. Они достаточно специфичны, и нам не удалось найти их аналога в работах других авторов.

Введем следующие обозначения и предположения.

А)  $D = \Delta$  — вес мерного слитка золота, используемого для покупки/продажи золота компанией на внешнем рынке, т. е. покупка/продажа осуществляется в объемах  $nD$  граммов, где  $n$  — любое натуральное число.

В)  $d$  — вес золота, используемый при покупке/продаже золота клиентами, т. е. покупка/продажа осуществляется в объемах  $md$ , где  $m$  — любое натуральное число. В этом случае  $D/d$  и  $g_1/d$  — целые числа; здесь  $g_1$  — начальное количество золота в резерве.

С)  $e$  — цена грамма золота. Для простоты будем считать его постоянным, хотя это же доказательство с минимальными дополнительными оговорками годится и для случая, когда при каждом изменении  $e$  от значения  $e_1$  до  $e_2$  текущий объем валюты  $c$  в резерве корректируется на  $c/e_1 - c/e_2$  (для сохранения ее объема в золотом эквиваленте).

**Теорема 1** (Необходимый и достаточный размер резерва капитала). *Пусть условия А, В и С, указанные выше, выполнены. В модели округления продаваемого/покупаемого компанией и клиентами объема золота до величин  $D$  и  $d$  соответственно для обеспечения способности системы выполнять все поступающие заказы на покупку/продажу золота (онлайн или офлайн) необходимо и достаточно, чтобы в начальный момент в системе общий объем резерва золота и валюты был не менее (в пересчете на золото)  $D - d$ . Иными словами,  $D - d$  — это точная нижняя оценка объема этого резерва.*

**Доказательство.** Предположим, что в начальный момент у нас есть резерв  $R_{gc}$ , включающий некоторое количество золота  $g_1$  и валюты  $c_1$ , так что выполняются следующие условия:

$$g_1 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad g_1 + c_1/e = D - d. \quad (5.1)$$

Обозначим через  $g_2$  и  $c_2$  объемы золота и валюты в  $R_{gc}$  после исполнения распоряжения клиента на покупку или продажу золота. Покажем, что этого резерва будет достаточно для поддержания способности системы выполнять все заказы на покупку/продажу золота. Предположим, мы получили заказ на покупку  $X$  граммов золота и

$$X = nD + md,$$

где  $n$  и  $m$  — целые неотрицательные числа и  $md < D$ . Если  $n > 0$ , то мы (компания) купим (офлайн)  $n$ -мерных золотых слитков. Таким образом, мы конвертируем  $nDe$  единиц валюты клиента в  $nD$  граммов золота, которое также становится собственностью клиента. Таким образом, сумма резерва  $R_{gc}$  не изменится.

Далее нам нужно конвертировать  $mde$  единиц валюты клиента в золото. Рассмотрим два случая.

Если  $md > g_1$ , то мы покупаем золото в объеме  $D$ , используя  $mde$  единиц валюты клиента плюс  $(D - md)e$  единиц валюты из резерва  $R_{gc}$ . Мы можем сделать это, потому что

$$(D - md)e - c_1 = (D - md)e - (D - g_1)e = (g_1 - md)e < 0.$$

После вычитания  $md$  граммов золота, переданного клиенту,  $R_{gc}$  будет содержать  $g_2$  граммов золота, где

$$g_2 = g_1 + D - md \geq g_1 + d \geq d,$$

поскольку  $md < D$  и  $D/d$  — целое число. Для  $c_2$  имеем

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 - (D - md)e = c_1 + mde - De = c_1 + g_1e + (md - g_1)e - De \\ &\geq c_1 + g_1e + de - De = (D - d)e + de - De = 0 \end{aligned}$$

ввиду того, что  $md \geq g_1 + d$  (так как начальное количество золота в резерве кратно  $d$ ) и

$$c_1 + g_1e = (D - d)e.$$

В то же время

$$g_2 + c_2/e = g_1 + D - md + c_1/e - (D - md) = g_1 + c_1/e = D - d.$$

Таким образом, выполняются условия (5.1), в которых  $g_1$  и  $c_1$  заменяются на  $g_2$  и  $c_2$  соответственно. Обратим внимание, что в этом случае новый объем золота  $g_2$  в резерве  $R_{gc}$  (и, следовательно,  $c_2/e$ ) также составляет целое число  $d$ .

Если  $md \leq g_1$ , то в резерве  $R_{gc}$  достаточно золота для конвертации  $mde$  единиц валюты клиента в золото. В результате будем иметь

$$g_2 = g_1 - md \geq 0, \quad c_2 = c_1 + mde \geq 0,$$

$$g_2 + c_2/e = g_1 - md + c_1/e + md = g_1 + c_1/e = D - d.$$

Следовательно, и в этом случае аналог условия (5.1) выполняется, а новое количество золота  $g_2$  в резерве  $R_{gc}$  (и, значит,  $c_2/e$ ) также составляет целое число  $d$ . Заметим, что в рассматриваемом случае (т.е. когда клиент покупает золото) при  $n = 0$  и  $md \leq g_1$  вся операция может быть выполнена онлайн.

Предположим теперь, что от клиента поступил заказ на продажу  $nD + md$  граммов золота, где  $n$  и  $m$  — целые неотрицательные числа, а  $0 \leq md < D$ .

Если  $n > 0$ , то аналогично продаем (офлайн)  $nD$  граммов (клиентского) золота. Полученная валюта в размере  $nDe$  также становится собственностью клиента, оставляя неизменным объем резервов  $R_{gc}$ . Далее нам нужно конвертировать  $md$  граммов золота в валюту.

Если  $md > c_1/e$ , мы продадим  $D$  граммов золота из  $md$  граммов золота, поступающего от клиента, и  $D - md$  граммов из объема  $g_1$  в резерве  $R_{gc}$ . Это возможно благодаря тому, что

$$(D - md) - g_1 = (D - md) - (D - d - c_1/e) = c_1/e - md + d \leq -d + d = 0.$$

Здесь мы используем неравенство  $md \geq c_1/e + d$ , которое следует из (5.1), предположения  $md > c_1/e$  и того факта, что  $g_1/e$  является целым числом.

После оплаты клиенту  $mde$  валютных единиц  $R_{gc}$  будет содержать  $c_2$  валютных единиц и  $c_2 = c_1 + De - mde > de > 0$ , поскольку  $md < D$  и  $D/d$  — целое число. Из равенства  $c_1 + g_1 e = (D - d)e$  получаем

$$g_2 = g_1 - (D - md) = g_1 + md - D \geq g_1 + c_1/e + d - D = 0,$$

так как  $md \geq c_1/e + d$ , как мы видели выше. Кроме того,

$$g_2 + c_2/e = g_1 - (D - md) + c_1/e + (D - md) = g_1 + c_1/e = D - d.$$

Таким образом, выполняются условия (5.1), в которых  $c_2$  и  $g_2$  заменяют  $c_1$  и  $g_1$  соответственно. Помимо этого,  $D/d$  и  $g_1/d$  — целые числа, значит,  $g_2/d$  и  $c_2/(ed)$  также являются целыми числами.

Если  $md \leq c_1/e$ , то мы можем использовать валюту из  $c_1$  для оплаты клиенту конвертированного количества золота  $md$ . Тогда  $g_2$  и  $c_2$  вычисляются по формулам

$$g_2 = g_1 + md \geq 0, \quad c_2 = c_1 - mde \geq 0,$$

$$g_2 + c_2/e = g_1 + md + c_1/e - md = g_1 + c_1/e = D - d,$$

т. е. снова выполняются условия (5.1), в которых  $c_2$  и  $g_2$  заменяют  $c_1$  и  $g_1$  соответственно, и, кроме того,  $g_2/d$  и  $c_2/(ed)$  — целые числа. Заметим, что в рассматриваемом случае (т. е. при исполнении клиентского заказа на продажу золота), если  $n = 0$  и  $md \leq c_1/e$ , вся эта операция также может быть выполнена онлайн.

Таким образом, мы показали, что любого начального резерва  $R_{gc}$ , удовлетворяющего условию (5.1), достаточно для выполнения любого числа заказов клиентов на покупку/продажу золота.

Сформулируем теперь следующее

**Предположение 1.** Пусть имеется начальный резерв  $R_{gc}$ , содержащий  $g_1$  граммов золота и  $c_1$  единиц валюты, удовлетворяющих условиям

$$g_1 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad g_1 + c_1/e = D_1 \tag{5.2}$$

для некоторых  $D_1 < D - d$ , и такой, что он может обеспечить способность системы выполнять неограниченное количество заказов клиентов на покупку/продажу золота.

Рассмотрим последовательность заказов на покупку  $X = D - d$  граммов золота. Согласно (5.2)

$$g_1 \leq g_1 + c_1/e = D_1 < D - d.$$

Таким образом, мы не можем просто обменять  $Xe = (D - d)e$  единиц денег клиента на  $D - d$  граммов золота, взятых из резерва  $g_1$ . Поэтому единственный способ удовлетворить первый заказ — это купить  $D$  граммов золота на внешнем рынке, используя  $Xe = (D - d)e$  единиц денег клиента плюс  $de$  единиц, взятых из  $c_1$  (если  $c_1 < de$ , то этот заказ не может быть выполнен, следовательно, предположение 1 неверно). После этой операции клиент получает  $D - d$  граммов купленного золота, а оставшиеся  $d$  граммов добавляются в резерв. Резерв принимает вид  $g_2 + c_2/e$ , где  $g_2 = g_1 + d$ ,  $c_2 = c_1 - de$ , так что

$$g_2 + c_2/e = g_1 + d + c_1/e - d = D_1,$$

т. е. обновленный резерв также удовлетворяет (5.2). Следовательно, второй заказ (и аналогично все последующие) должен выполняться точно так же. После выполнения каждого из следующих заказов денежная часть ( $c_2, c_3, \dots$ ) от  $R_{gc}$  будет уменьшаться на  $de$ . Значит, он будет исчерпан максимум после  $(D - d)/d$  заказов, и дальнейшие покупки станут невозможны

вопреки предположению 1. Таким образом, предположение 1 неверно и объем резерва  $g_1 + c_1/e$  не может быть меньше  $D - d$ .  $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда все ограничения пункта В, указанные выше (о том, что объемы покупаемого/продаваемого золота должны быть кратны некоторому  $d > 0$ ), сняты. Необходимый и достаточный размер резерва капитала для этого случая определяет следующая теорема.

**Теорема 2** (Произвольные объемы покупки/продажи золота клиентом). *Пусть условия А и С выполнены. В модели округления продаваемого/покупаемого компанией объема золота до величины  $D$  для обеспечения способности системы выполнять все поступающие заказы на покупку/продажу золота (онлайн или офлайн) необходимо и достаточно иметь в началь- ный момент в системе общий объем резерва золота и валюты не менее (в пересчете на золото)  $D$ . Другими словами,  $D$  — это точная нижняя оценка величины этого резерва.*

**Доказательство.** Для доказательства достаточности заменим (5.1) на

$$g_1 \geq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad g_1 + c_1/e = D, \quad (5.3)$$

а произведение  $md$  будем рассматривать как некоторое неотрицательное число, меньшее  $D$ . Тогда, как и прежде, распоряжение на покупку золота имеет вид  $X = nD + md$ .

Посредством аналогичных рассуждений мы показываем, что в случае  $md > g_1$  можно купить золото в объеме  $D$ , используя  $mde$  единиц валюты клиента плюс  $(D - md)e$  единиц валюты из резерва  $R_{gc}$  так, чтобы

$$g_2 = g_1 + D - md \geq 0,$$

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 - (D - md)e = c_1 + mde - De = c_1 + g_1e + (md - g_1)e - De \\ &\geq c_1 + g_1e - De = De - De = 0, \end{aligned}$$

$$g_2 + c_2/e = g_1 + D - md + c_1/e - (D - md) = g_1 + c_1/e = D.$$

Мы видим, что соотношение (5.3) выполняется также для  $g_2$  и  $c_2$  (если их подставить вместо  $g_1$  и  $c_1$ ). Если  $md \leq g_1$ , то в резерве  $R_{gc}$  золота достаточно для конвертации  $mde$  единиц валюты клиента в золото. В итоге будем иметь

$$g_2 = g_1 - md \geq 0, \quad c_2 = c_1 + mde \geq 0,$$

$$g_2 + c_2/e = g_1 - md + c_1/e + md = g_1 + c_1/e = D,$$

т. е. снова (5.3) выполняется для  $g_2$  и  $c_2$ .

Если клиент продает  $nD + md$  граммов золота, то аналогичные рассуждения показывают, что и в этом случае (5.3) также выполняется для  $g_2$  и  $c_2$ .

Для доказательства необходимости заменим в предположении 1 условие  $D_1 < D - d$  на  $D_1 < D$ . Кроме того, вместо последовательности заказов на покупку  $X = D - d$  граммов золота рассмотрим последовательность заказов на покупку  $X = D - z$  граммов золота, где  $z$  — любое число, удовлетворяющее условию  $0 < z < D - D_1$ . Заменяя  $d$  на  $z$  в последующих рассуждениях, мы получаем, что предположение 1, обновленное, как указано выше (с условием  $D_1 < D$ ), неверно, а объем резерва  $g_1 + c_1/e$  не может быть меньше  $D$ .  $\square$

Теоремы 1 и 2 имеют ключевое значение при решении задачи обеспечения достаточности капитала компании для выполнения заказов на покупку/продажу золота. Они дают оценки необходимого и достаточного значения резервного капитала при покупке/продаже золота на внешнем рынке. Необходимый общий объем капитала  $K$  рассчитывается на основе модели с учетом вероятности совершения офлайн-транзакций, не превышающей заданный порог  $P_0$ .

## 6. Практическое использование модели в реальной работе системы

Для простоты изложения рассмотрим моновалютный случай работы системы, однако все сказанное, очевидно, будет применимо и к мультивалютному варианту работы системы.

Возьмем  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_q\}$  как репрезентативное семейство различных вариантов моделей, поступающих в систему потоков заявок, характеризуемых такими параметрами, как интенсивность потоков заказов, тренд, распределение количества заказов.

С помощью имитационной модели поддержания баланса ликвидности операций клиентов по покупке/продаже золота рассчитываем управляющие параметры  $K(M_i)$ ,  $G_{\min}(M_i)$ ,  $G_{\text{buy}}(M_i)$ ,  $G_{\max}(M_i)$ ,  $G_{\text{sell}}(M_i)$ ,  $\alpha(M_i)$  в результате решения задач 1 и 2 для каждого варианта  $M_i \in M$ . В итоге будет создана база

$$B = \{(M_i, K(M_i), G_{\min}(M_i), G_{\text{buy}}(M_i), G_{\max}(M_i), G_{\text{sell}}(M_i), \alpha(M_i)) : M_i \in M\}$$

оптимальных стратегий управления системой для вариантов диапазона  $M$ .

В практической работе системы используется модуль, который непрерывно мониторит входной поток заявок и классифицирует его для каждого значимого отрезка времени, находя ближайший аналог в базе данных  $B$ . После идентификации класса входного потока в практической реализации системы используются параметры  $K(M_i)$ ,  $G_{\min}(M_i)$ ,  $G_{\text{buy}}(M_i)$ ,  $G_{\max}(M_i)$ ,  $G_{\text{sell}}(M_i)$ ,  $\alpha(M_i)$  ближайшего аналога  $M_i \in M$  в качестве управляющих параметров системы.

Таким образом, описанная технология управления балансом ликвидности для операций покупки/продажи золота клиентами системы позволяет минимизировать объем капитала компании, используемого для проведения онлайн-операций покупки/продажи золота для заданного порога вероятности выполнения заявок в режиме офлайн.

Для рабочего объема капитала  $K$  компании используются управляющие параметры  $G_{\min}$ ,  $G_{\text{buy}}$ ,  $G_{\max}$ ,  $G_{\text{sell}}$ ,  $\alpha$ , позволяющие минимизировать затраты компании на поддержание операций по выполнению заявок клиентов на покупку/продажу золота.

Система может поддерживать в качестве обеспечения не только золото, но и любую другую ценность или актив. Описанная математическая модель управления балансом ликвидности может быть также успешно применена для любых других видов ценностей или активов.

Система позволяет клиентам работать в режиме 24/7. При этом внешние операции по конвертации и купле/продаже золота осуществляются в режиме 24/5, т. е. исключая выходные. Рассматриваемая модель адаптирована с учетом привлечения нескольких центров проведения операций внешней конвертации валюты и операций купли/продажи золота, расположенных в регионах с разными часовыми поясами, с целью минимизации выделенного капитала  $K$ .

## Заключение

Итак, мы не только смогли предложить математическое решение, но и работаем над программной реализацией этой задачи. В определенном смысле наш подход к выпуску обеспеченной золотом валюты позволяет полноценно реализовать систему золотого стандарта, что стало возможным благодаря современным технологиям и идее использования динамического обеспечения для валюты.

Математическая модель и ее программная реализация являются идеальной технологической основой для реализации проектов по выпуску и обращению электронной валюты, обеспеченной золотом. Это решение позволяет возродить идею валют с золотым содержанием как для отдельных юридических лиц, так и для государств в целом.

Еще один принципиально важный момент заключается в том, что чем быстрее оборачиваются деньги, тем меньше золота требуется для обеспечения функционирования финансовой системы. Перевод платежей в онлайн-режим резко снижает потребность в оборотных средствах, а значит, и необходимое для этого количество золота. Кроме того, снимаются все риски неисполнения платежей. Этот момент является принципиальным, так как резко снижает

требования к объему золотого резерва для обеспечения функционирования глобальных платежных систем. Другими словами, в случае онлайн-платежа требуется непропорционально меньшее количество золота, чем при текущей платежной системе.

Мы можем использовать не только золото, но и любой другой актив, имеющий рыночную стоимость, например платину, палладий и достаточно широкий спектр других видов залога или даже их комбинации.

Система с минимально возможными рисками — одно из главных преимуществ нашего времени в связи с постоянно возникающей турбулентностью на финансовых рынках.

Мы полагаем, что предложенное решение проблемы Коперника — Грешема можно отнести к разряду революционных в сфере организации платежных систем, обслуживающих золотой оборот.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 159 с.
2. **Ebrahimiyan N., Ghahroudi M.L., Allah Abadi S.B., Jafari F.** Tokenization and its application in different countries // J. FinTech and Artificial Intelligence. 2021. Vol. 1, no. 1. P. 014–019. doi: 10.47277/JFAI/1(1)019
3. **Heines R., Dick C., Pohle C., Jung R.** The tokenization of everything: towards a framework for understanding the potentials of tokenized assets // Pacific Asia Conference on Information Systems (PACIS 2021): Proc. 2021. Art. no. 40. URL: <https://aisel.aisnet.org/pacis2021/40>.
4. **Dietrich F., Kuenster N., Louw L., Palm D.** Review of blockchain-based tokenization solutions for assets in supply chains // 3rd Conference on Production Systems and Logistics (CPSL 2022): Proc. / eds. D. Herberger, M. Hubner. Hannover: Publish-Ing., 2022. P. 775–784. doi: 10.15488/12147
5. **Turk J.J., Turk G.** Electronic cash eliminating payment risk. US Patent: No. 6415271. 2002.
6. **Goldmoney:** [website]. URL: <https://www.goldmoney.com>.
7. **Perez E.** Stablecoins backed by precious metals — How do they work? [e-resource]. URL: <https://cointellegraph.com/news/stablecoins-backed-by-precious-metals-how-do-they-work>.
8. **Emblemsvag M.S., Emblemsvag J.** Developing a generic model of Gresham's law for qualitative analyses // International J. of General Systems. 2023. Vol. 52, no. 2. P. 113–130. doi: 10.1080/03081079.2022.2104270
9. **Seddon J.** The fate of international monetary systems: how and why they fall apart [e-resource]. Published online by Cambridge University Press: 31 July 2020. doi: 10.1017/S1537592720002315
10. **Bordo M. D., Simard D., White E. N.** France and the breakdown of the bretton woods international monetary system // Working Paper of the International Monetary Fund. 1994. P. 9–28.

Поступила 07.07.2023

После доработки 1.08.2023

Принята к публикации 7.08.2023

Фролов Владимир Николаевич  
д-р экон. наук, профессор  
науч. руководитель  
АО «Цифровая Динамика»  
г. Екатеринбург  
e-mail: frolov@anr.ru

Ватолин Анатолий Анатольевич  
д-р физ.-мат. наук  
науч. консультант  
АО «Цифровая Динамика»  
г. Екатеринбург  
e-mail: v.anatoliy512@gmail.com

Романчук Алексей Петрович  
техн. директор

АО “Цифровая Динамика”

г. Екатеринбург

e-mail: alexey.p.romanchuk@gmail.com

## REFERENCES

1. Eremin I.I. *Protivorechivye modeli optimal'nogo planirovaniya* [Contradictory models of the optimal planning]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 159 p.
2. Ebrahimiyan N., Ghahroudi M.L., Allah Abadi S.B., Jafari F. Tokenization and its application in different countries. *J. FinTech and Artificial Intelligence*, 2021, vol. 1, no. 1, pp. 014–019. doi: 10.47277/JFAI/1(1)019
3. Heines R., Dick C., Pohle C., Jung R. The tokenization of everything: towards a framework for understanding the potentials of tokenized assets. In: *Pacific Asia Conference on Information Systems (PACIS 2021)*, Proc., 2021, art. no. 40. Available on <https://aisel.aisnet.org/pacis2021/40>.
4. Dietrich F., Kuenster N., Louw L., Palm D. Review of blockchain-based tokenization solutions for assets in supply chains. In: *3rd Conference on Production Systems and Logistics (CPSL 2022)*, Proc., eds. D. Herberger, M. Hübner, Hannover: Publish-Ing., 2022, pp. 775–784. doi: 10.15488/12147
5. Turk J.J., Turk G. *Electronic cash eliminating payment risk*. US Patent: No. 6415271, 2002.
6. *Goldmoney* [website]. Available on <https://www.goldmoney.com>.
7. Perez E. *Stablecoins backed by precious metals — How do they work?* [e-resource]. Available on <https://cointelegraph.com/news/stablecoins-backed-by-precious-metals-how-do-they-work>.
8. Emblemvag M.S., Emblemvag J. Developing a generic model of Gresham’s law for qualitative analyses. *International J. of General Systems*, 2023, vol. 52, no. 2, pp. 113–130. doi: 10.1080/03081079.2022.2104270
9. Seddon J. *The fate of international monetary systems: how and why they fall apart* [e-resource]. Published online by Cambridge University Press: 31 July 2020. doi: 10.1017/S1537592720002315
10. Bordo M.D., Simard D., White E.N. France and the breakdown of the bretton woods international monetary system. In: *Working Paper of the International Monetary Fund*, 1994, pp. 9–28.

Received July 7, 2023

Revised August 1, 2023

Accepted August 7, 2023

Vladimir Nikolaevich Frolov, Dr. Econ. Sci., Prof., Scientific Supervisor, “Digital Dynamics” LLC, Yekaterinburg, Russia, e-mail: frolov@anr.ru.

Anatolii Anatolievich Vatolin, Dr. Phys.-Math. Sci., Scientific Advisor, “Digital Dynamics” LLC, Yekaterinburg, Russia, e-mail: v.anatoliy512@gmail.com.

Alexey Petrovich Romanchuk, Chief Technology Officer, “Digital Dynamics” LLC, Yekaterinburg, Russia, e-mail: alexey.p.romanchuk@gmail.com.

Cite this article as: V. N. Frolov, A. A. Vatolin, A. P. Romanchuk. Asset tokenization and related problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 231–246.