ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 517.984

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ШЕСТИЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ХАББАРДА. ВТОРОЕ СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

С. М. Ташпулатов

Рассматривается оператор энергии шестиэлектронных систем в модели Хаббарда и исследуются структура существенного спектра и дискретный спектр системы для второго синглетного состояния системы. Показано, что в одномерном и двумерном случаях существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета состоит из объединений семи отрезков, а дискретный спектр системы — из единственного собственного значения, лежащего ниже (выше) области нижнего (верхнего) края существенного спектра этого оператора. В трехмерном случае имеют место следующие ситуации: а) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета состоит из объединений семи отрезков, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета — из единственного собственного значения; б) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета состоит из объединений четырех отрезков, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета — из пустого множества; в) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета состоит из объединений двух отрезков, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета пуст; г) существенный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора шестиэлектронного второго синглета пуст. Найдены условия, когда имеет место каждая ситуация.

Ключевые слова: модель Хаббарда шестиэлектронных систем, спектр, существенный спектр, дискретный спектр, октетное состояние, квинтетное состояние, триплетное состояние, синглетное состояние.

S. M. Tashpulatov. The structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator for six-electron systems in the Hubbard model. The second singlet state.

We consider the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model and study the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the system for the second singlet state of the system. In the one- and two-dimensional cases, it is shown that the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of unions of seven segments, and the discrete spectrum of the system consists of a single eigenvalue lying below (above) the domain of the lower (upper, respectively) edge of the essential spectrum of this operator. In the three-dimensional case, there are the following situations: (a) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of unions of seven segments, and the discrete spectrum of this operator consists of a single eigenvalue; (b) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of unions of four segments, and the discrete spectrum of this operator is empty; (c) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of unions of two segments, and the discrete spectrum of this operator is empty; (d) the essential spectrum of the six-electron second singlet state operator consists of a single segment, and the discrete spectrum of this operator is empty. Conditions are found under which each of the situations takes place.

Keywords: Hubbard model of six-electron systems, spectrum, essential spectrum, discrete spectrum, octet state, quintet state, triplet state, singlet state.

MSC: 62M15, 46L60, 47L90, 46M05, 47A75

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-210-230

Введение

В 1963 г. почти одновременно и независимо появились три работы [1–3], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной в теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием. Гамильтониан модели содержит всего два параметра: параметр B перескока электрона с узла на соседний узел решетки и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов на одном узле. В представлении вторичного квантования гамильтониан записывается в виде

$$H = B \sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma} a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow} a_{m,\uparrow} a^{+}_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow}. \quad (1)$$

Здесь через $a^{+}_{m,\gamma}$ $(a_{m,\gamma})$ обозначен ферми-оператор рождения (уничтожения) электрона со спином γ на узле m; суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Предложенная в [1–3] модель получила название модели Хаббарда в честь Джона Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле [4]. Напомним также, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина — Вонсовского [5], появившейся за тридцать лет до работ [1–3]. В модели Шубина — Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле учитывается взаимодействие электронов на соседних узлах.

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсивно изучаемых многоэлектронных моделей металла (см. [6–8], а также [9, гл. III, с. 75–191]). В обзоре [7] обобщены полученные результаты по модели Хаббарда; чем больше прогресса достигается в получении теоретических решений, тем яснее, что эта простая модель может демонстрировать поразительный набор фаз и режимов, многие из которых имеют четкие параллели с наблюдаемым поведением широкого спектра сложных материалов. Например, имеются убедительные доказательства того, что ферромагнетизм, различные формы антиферромагнетизма, нетрадиционная сверхпроводимость, волны плотности заряда, электронные жидкокристаллические фазы и топологические упорядоченные фазы (например “спиновые жидкости”) среди прочих фаз встречаются в конкретных реализациях модели Хаббарда. В [7] обсуждается роль модели Хаббарда в изучении высокотемпературной сверхпроводимости в купратах. Показано также, что положительные собственные значения в модели Хаббарда (соответствующие отталкивающим эффективным взаимодействиям) ослаблевают, а отрицательные растут. Различные собственные функции соответствуют, но не полностью определяются, неприводимым представлением группы кристаллических точек в модели Хаббарда.

Получение точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, представляет большой интерес. В работе [10] изучались спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. В работе [11] изучались спектр и волновые функции системы трех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что трехэлектронные системы могут находиться в трех состояниях: квартетном (1 тип) и дублетном (2 типа) [11]. В работе [12] изучались спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в триплетном состоянии системы. Четырехэлектронные системы могут находиться в шести состояниях: квинтетном (1 тип), триплетном (3 типа) и синглетном (2 типа) состояниях [12]. Триплетным состояниям соответствуют следующие базисные функции:

$${}^{1}t^{1}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow} a^{+}_{n,\uparrow} a^{+}_{p,\uparrow} a^{+}_{r,\downarrow} \varphi_0, \quad {}^{2}t^{1}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow} a^{+}_{n,\uparrow} a^{+}_{p,\downarrow} a^{+}_{r,\uparrow} \varphi_0, \quad {}^{3}t^{1}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow} a^{+}_{n,\downarrow} a^{+}_{p,\uparrow} a^{+}_{r,\uparrow} \varphi_0.$$

В этих обозначениях t — это триплетное состояние, левые верхние индексы $1, 2, 3$ соответственно — номера этих триплетных состояний, а верхний индекс 1 означает, что в триплетных состояниях полный спин системы равен 1. Мы видим, что здесь существуют три типа триплетных состояний и они имеют различное происхождение.

В работе [13] изучались спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в квинтетном и синглетном состояниях системы. Квинтетному состоянию соответствует свободные движения четырех электронов в решетке со следующими базисными функциями: $q^{2}_{m,n,p,r} = a^{+}_{m,\uparrow} a^{+}_{n,\uparrow} a^{+}_{p,\uparrow} a^{+}_{r,\uparrow} \varphi_0$. Здесь q — квинтетное состояние, а верхний индекс 2 означает, что в квинтетном состоянии полный спин системы равен 2. В работе [13] доказано, что спектр системы в квинтетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с отрезком $[4A-8B\nu, 4A+8B\nu]$ и в системе отсутствует четырехэлектронные связанные состояния или четырехэлектронные антисвязанные состояния. Синглетному состоянию соответствуют следующие базисные функции:

$$^1s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \quad ^2s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0.$$

Здесь s — синглетное состояние, а 0 означает, что в синглетных состояниях полный спин системы равен 0, и эти два синглетных состояния имеют различное происхождение.

В пятиэлектронных системах существуют секстетное состояние, пять типов дублетных состояний и четыре типа квартетных состояний.

В работе [14] изучались структура существенного спектра и дискретный спектр пятиэлектронных систем в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в дублетных состояниях системы.

Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора шестиэлектронных систем в модели Хаббарда для первого квинтетного состояния и первого синглетного состояния исследовалась в работе [15] (отметим, что здесь также подробно изложена история задачи). Мы доказываем, что спектр шестиэлектронного октета чисто непрерывен и состоит из отрезка $[6A-12B\nu, 6A+12B\nu]$, где ν — размерность решетки Z^ν. Через $^1\widetilde{H}^q_2$ обозначим первый шестиэлектронный квинтет; здесь q — квинтетное состояние, левый верхний индекс 1 означает номер рассматриваемого квинтетного состояния, а нижный индекс 2 указывает, что в квинтетных состояниях полный спин системы равен 2. В работе [15] мы также доказываем, что если $\nu = 1$ и $U < 0$ $(U > 0)$, то существенный спектр оператора первого шестиэлектронного квинтета $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из объединений семи отрезков, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ — не более чем из одного собственного значения, т. е. дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из единственного собственного значения или он пуст. Если $\nu = 3$ и $U < 0$ $(U > 0)$, то существенный спектр оператора первого шестиэлектронного квинтета $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из объединений семи отрезков, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ — не более чем из одного собственного значения, т. е. дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из единственного собственного значения или он пуст; либо существенный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из объединений четырех отрезков, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ пуст; либо существенный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из объединений двух отрезков, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ пуст; либо существенный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^q_2$ пуст. Для первого синглетного состояния системы $^1\widetilde{H}^0_s$ (здесь s — синглетное состояние, а 0 означает, что полный спин системы равен 0) доказаны аналогичные результаты.

В данной работе мы продолжаем исследования, начатые ранее в [11–15]. В разд. 2 описываются второе синглетное состояние системы и соответствующие пространства, доказываются теоремы 1 и 2, посвященные действию оператора шестиэлектронного второго синглета в координатном и квазиимпульсном представлениях. В разд. 3 представлены результаты исследования спектров этих операторов в виде теорем 3–5. В разд. 4 изложены основные результаты работы, доказаны теоремы 6–9, описывающие структуры существенного и дискретного спекторов оператора второго синглетного состояния системы. Следует отметить, что результаты исследования структур существенного и дискретного спектров оператора энергии шестиэлектронного второго синглета сильно отличаются от результатов работы [15].

1. Гамильтониан системы

В настоящей работе рассматривается оператор энергии шестиэлектронных систем в модели Хаббарда и описываются структура существенного спектра и дискретный спектр системы для второго синглетного состояния системы в решетке. Гамильтониан рассматриваемой модели

имеет вид
$$H = A\sum_{m,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^{+}_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^{+}_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^{+}_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \tag{2}$$

Здесь A — энергия электрона в узле решетке; B — интеграл переноса между соседними узлами (для удобства считаем, что $B>0$); $\tau=\pm e_j,\ j=1,2,\ldots,\nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям; U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле; γ — спиновый индекс, $\gamma=\uparrow$ или $\gamma=\downarrow$; через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; $a^{+}_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ соответственно — операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m\in Z^{\nu}$.

В шестиэлектронных системах существуют октетное состояние, квинтетные, триплетные и синглетные состояния. Энергия системы зависит от ее полного спина S. Наряду с гамильтонианом N_e-электронная система характеризуется полным спином
$$S,\ S=S_{\max},\ S_{\max}-1,\ldots,S_{\min},\ S_{\max}=\frac{N_e}{2},\ S_{\min}=0,\frac{1}{2}.$$

Гамильтониан (2) коммутирует со всеми компонентами оператора $S=(S^{+},S^{-},S^{z})$ полного спина системы, поэтому структура собственных функций и собственные значения системы зависят от S. Гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока $\mathtt{H}_{as}=l_2^{as}((Z^{\nu})^6)$, где $l_2^{as}((Z^{\nu})^6)$ есть подпространство антисимметричных функций из $l_2((Z^{\nu})^6)$. Конструкция Фоковского пространства $\mathtt{F}(\mathtt{H})$ описана в ([16], гл. II, § 4, с. 68–69).

2. Шестиэлектронное второе синглетное состояние в модели Хаббарда

Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathtt{H}_{as}$. Второе синглетное состояние соответствует свободному движению шести электронов на решетке и их взаимодействию, и ему отвечают следующие базисные функции:
$${}^2s^0_{p,q,r,t,k,n\in Z^{\nu}} = a^{+}_{p,\uparrow}a^{+}_{q,\downarrow}a^{+}_{r,\uparrow}a^{+}_{t,\downarrow}a^{+}_{k,\uparrow}a^{+}_{n,\downarrow}\varphi_0.$$

Подпространство ${}^2\mathtt{H}^0_s$, соответствующее второму синглетному состоянию, есть множество всех векторов вида
$${}^2\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t,k,n\in Z^{\nu}} f(p,q,r,t,k,n)\,{}^2s^0_{p,q,r,t,k,n\in Z^{\nu}}, \quad f\in l_2^{as},$$
где l_2^{as} — подпространство антисимметричных функций из пространства $l_2((Z^{\nu})^6)$. Обозначим через ${}^2H^0_s$ сужение оператора H на подпространство ${}^2\mathtt{H}^0_s$.

Теорема 1. *Подпространство ${}^2\mathtt{H}^0_s$ инвариантно относительно оператора H, и сужение ${}^2H^0_s$ оператора H на подпространство ${}^2\mathtt{H}^0_s$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\overline{H}^0_s$, действующий в пространстве l_2^{as} по формуле*
$$\begin{aligned}{}^2\overline{H}^0_s\,{}^2\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t,k,n\in Z^{\nu}}\Big[&6Af(p,q,r,t,k,n)\\ &+B\sum_{\tau}\big[f(p+\tau,q,r,t,k,n)+f(p,q+\tau,r,t,k,n)+f(p,q,r+\tau,t,k,n)\\ &+f(p,q,r,t+\tau,k,n)+f(p,q,r,t,k+\tau,n)+f(p,q,r,t,k,n+\tau)\big]\\ &+U\big[\delta_{p,q}+\delta_{q,r}+\delta_{p,t}+\delta_{q,k}+\delta_{p,n}+\delta_{r,n}+\delta_{r,t}+\delta_{k,n}+\delta_{t,k}\big]f(p,q,r,t,k,n)\Big].\end{aligned} \tag{3}$$

Сам оператор ${}^2H^0_s$ на вектор ${}^2\psi^0_s\in{}^2\mathtt{H}^0_s$ действует по формуле
$${}^2H^0_s\,{}^2\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t,k,n\in Z^{\nu}} ({}^2\overline{H}^0_s f)(p,q,r,t,k,n)\,{}^2s^0_{p,q,r,t,k,n\in Z^{\nu}}. \tag{4}$$

Доказательство. Подействуем гамильтонианом H на векторы ${}^2\psi_s^0 \in {}^2\mathtt{H}_s^0$ с использованием обычных антикоммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах:

$$\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}^+\} = \delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}, \quad \{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a_{m,\gamma}^+, a_{n,\beta}^+\} = \theta,$$

а также учтем, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — нулевой элемент пространства ${}^2\mathtt{H}_s^0$. Отсюда получается утверждение теоремы, что оператор ${}^2\overline{H}_s^0$ действует по формуле (3). Пусть $F = (f(p,q,r,t,k,n))_{p,q,r,t,k,n\in Z^\nu}$ — элемент из пространства $l_2((Z^\nu)^6)$, тогда

$$||F|| = \sqrt{\sum_{p,q,r,t,k,n\in Z^\nu} |f(p,q,r,t,k,n)|^2}$$

и

$$||{}^2\,\overline{H}_s^0 F|| = \sqrt{[{}^2\,\overline{H}_s^0 f)(p,q,r,t,k,n)]^2} \le C_\nu ||F||,$$

где $C_\nu = 6|A| + 12|B|\nu + 9|U|$. Ограниченность оператора ${}^2H_s^0$ следует из формулы (4). □

Лемма 1. *Спектры операторов ${}^2H_s^0$ и ${}^2\overline{H}_s^0$ совпадают.*

Доказательство леммы получается с использованием критерия Вейля (см. [16], гл. VII, § 3, с. 262–263). □

Лемма 1 дает возможность вместо спектра оператора ${}^2H_s^0$ изучить спектр оператора ${}^2\overline{H}_s^0$.

Оператор ${}^2H_s^0$ будем называть *оператором шестиэлектронного второго синглета в модели Хаббарда.*

Обозначим через $\mathtt{F}$ преобразование Фурье: $\mathtt{F} : l_2((Z^\nu)^6) \to L_2((T^\nu)^6) \equiv {}^2\widetilde{\mathtt{H}}_s^0$, где T^ν — ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^2\widetilde{H}_s^0 = \mathtt{F}\,{}^2\overline{H}_s^0\mathtt{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^2\overline{H}_s^0$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^6)$, где L_2^{as}– подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^6)$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье переводит оператор ${}^2\overline{H}_s^0$ в ограниченный самосопряженный оператор ${}^2\widetilde{H}_s^0 = \mathtt{F}\,{}^2\overline{H}_s^0\mathtt{F}^{-1}$, действующий в пространстве ${}^2\widetilde{\mathtt{H}}_s^0$ по формуле*

$$\begin{gathered}
{}^2\widetilde{H}_s^0\,{}^2\psi_s^0 = h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi) f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi) \\
+ U \int_{T^\nu} \Big[f(t,\lambda+\mu-t,\gamma,\theta,\eta,\xi) + f(t,\mu,\gamma,\lambda+\theta-t,\eta,\xi) \\
+ f(t,\mu,\gamma,\theta,\eta,\lambda+\xi-t) + f(\lambda,t,\mu+\gamma-t,\theta,\eta,\xi) + f(\lambda,t,\gamma,\theta,\mu+\eta-t,\xi) \qquad (5)\\
+ f(\lambda,\mu,t,\gamma+\theta-t,\eta,\xi) + f(\lambda,\mu,t,\theta,\eta,\gamma+\xi-t) + f(\lambda,\mu,\gamma,t,\theta+\eta-t,\xi) + f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,t,\eta+\xi-t)\Big] dt,
\end{gathered}$$

где $h(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi) = 6A + 2B\sum_{i=1}^\nu[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i + \cos\eta_i + \cos\xi_i]$.

Доказательство проводится непосредственным применением в формуле (3) преобразования Фурье. □

Оператор ${}^2\widetilde{H}_s^0$ — частично интегральный оператор в пространстве $L_2((T^\nu)^6)$. В операторах ${}^2\widetilde{H}_s^0$ интегральные операторы являются частично интегральными операторами; в интегральных операторах интегрирование ведется по некоторыми аргументами, а остальные аргументы остаются свободными переменными, поэтому эти частично интегральные операторы можно представить как некие интегральные операторы и тензорные произведения единичных операторов I.

Используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах [17] и учитывая, что функция $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)$ — антисимметричная функция, можно убедиться, что оператор ${}^2\widetilde{H}_s^0$ представим в виде

$$
{}^2\widetilde{H}_s^0\,{}^2\psi_s^0 = \{(\widetilde{H}_2^1 f)(\lambda,\mu)\}\otimes I\otimes I + I\otimes\{(\widetilde{H}_2^2 f)(\gamma,\theta)\}\otimes I + I\otimes I\otimes\{(\widetilde{H}_2^3 f)(\eta,\xi)\}, \tag{6}
$$

где

$$
(\widetilde{H}_2^1 f)(\lambda,\mu) = \Big\{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i]\Big\} f(\lambda,\mu)
$$

$$
+ U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\theta-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\xi-s)ds,
$$

$$
(\widetilde{H}_2^2 f)(\gamma,\theta) = \Big\{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i + \cos\theta_i]\Big\} f(\gamma,\theta)
$$

$$
+ U\int\limits_{T^\nu} f(s,\gamma+\theta-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\mu+\gamma-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\mu+\theta-s)ds,
$$

и

$$
(\widetilde{H}_2^3 f)(\eta,\xi) = \Big\{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\eta_i + \cos\xi_i]\Big\} f(\eta,\xi)
$$

$$
+ U\int\limits_{T^\nu} f(s,\eta+\xi-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\gamma+\xi-s)ds + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\theta+\eta-s)ds;
$$

здесь I — единичный оператор в пространстве двухэлектронных состояний $\widetilde{\mathtt{H}}_2$. Формула (6) дает возможность выражать спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ через спектры операторов двухэлетронных систем $\widetilde{H}_2^1$, $\widetilde{H}_2^2$ и $\widetilde{H}_2^3$.

Действительно,

$$
{}^2\widetilde{H}_s^0\,{}^2\psi_s^0 = \Big\{6A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i + \cos\theta_i + \cos\eta_i + \cos\xi_i\big]\Big\} f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)
$$

$$
+ U\int\limits_{T^\nu}\Big[f(t,\lambda+\mu-t,\gamma,\theta,\eta,\xi) + f(t,\mu,\gamma,\lambda+\theta-t,\eta,\xi) + f(t,\lambda+\xi-t,\mu,\gamma,\theta,\eta)
$$

$$
+ f(\lambda,t,\mu+\gamma-t,\theta,\eta,\xi) + f(\lambda,t,\gamma,\theta,\mu+\eta-t,\xi) + f(\lambda,\mu,t,\gamma+\theta-t,\eta,\xi)
$$

$$
+ f(\lambda,\mu,t,\theta,\eta,\gamma+\xi-t) + f(\lambda,\mu,\gamma,t,\theta+\eta-t,\xi) + f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,t,\eta+\xi-t)\Big]dt
$$

$$
= \Big\{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i]\Big\} f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)
$$

$$
+ U\int\limits_{T^\nu}\big[f(t,\lambda+\mu-t,\gamma,\theta,\eta,\xi) + f(t,\lambda+\theta-t,\mu,\gamma,\eta,\xi) + f(t,\lambda+\xi-t,\mu,\gamma,\theta,\eta)\big]dt
$$

$$
+ \Big\{2A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i + \cos\theta_i]\Big\} f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)
$$

$$
+ U\int\limits_{T^\nu}\big[f(\lambda,\mu,t,\gamma+\theta-t,\eta,\xi) + f(\lambda,\theta,t,\mu+\gamma-t,\eta,\xi) + f(\lambda,\gamma,t,\mu+\eta-t,\theta,\eta)\big]dt
$$

$$+\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\eta_i+\cos\xi_i]\Big\}f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)$$

$$+U\int\limits_{T^\nu}\big[f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,t,\eta+\xi-t)+f(\lambda,\mu,\theta,\eta,t,\gamma+\xi-t)+f(\lambda,\mu,\gamma,\xi,t,\theta+\eta-t)\big]dt$$

$$=\Big[\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\Big\}f(\lambda,\mu)$$

$$+U\int\limits_{T^\nu}\big[f(t,\lambda+\mu-t)dt+f(t,\lambda+\theta-t)dt+f(t,\lambda+\xi-t)dt\big]\Big]\otimes I\otimes I$$

$$+I\otimes\Big[\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos\theta_i]\Big\}f(\gamma,\theta)$$

$$+U\int\limits_{T^\nu}\big[f(t,\gamma+\theta-t)dt+f(t,\mu+\gamma-t)dt+f(t,\mu+\eta-t)dt\big]\Big]\otimes I$$

$$+I\otimes I\otimes\Big[\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\eta_i+\cos\xi_i]\Big\}f(\eta,\xi)$$

$$+U\int\limits_{T^\nu}\big[f(t,\eta+\xi-t)dt+f(t,\gamma+\xi-t)dt+f(t,\theta+\eta-t)dt\big]\Big].$$

Поэтому мы сначала должны исследовать спектр операторов $\widetilde{H}_2^1$, $\widetilde{H}_2^2$ и $\widetilde{H}_2^3$. Так как все параметры $\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi$ и t изменяется в ν-мерном торе T^ν, мы можем записать так:

$${}^2\widetilde{H}_s^0\,{}^2\psi_s^0=\Big[\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\Big\}f(\lambda,\mu)+3U\int\limits_{T^\nu}f(t,\lambda+\mu-t)dt\Big]\otimes I\otimes I$$

$$+I\otimes\Big[\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos\theta_i]\Big\}f(\gamma,\theta)+3U\int\limits_{T^\nu}f(t,\gamma+\theta-t)dt\Big]\otimes I$$

$$+I\otimes I\otimes\Big[\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\eta_i+\cos\xi_i]\Big\}f(\eta,\xi)+3U\int\limits_{T^\nu}f(t,\eta+\xi-t)dt\Big].$$

Следовательно, операторы $\widetilde{H}_2^1$, $\widetilde{H}_2^2$ и $\widetilde{H}_2^3$, выражаются в виде

$$(\widetilde{H}_2^1f)(\lambda,\mu)=\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\Big\}f(\lambda,\mu)+3U\int\limits_{T^\nu}f(s,\lambda+\mu-s)ds,$$

$$(\widetilde{H}_2^2f)(\gamma,\theta)=\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos\theta_i]\Big\}f(\gamma,\theta)+3U\int\limits_{T^\nu}f(s,\gamma+\theta-s)ds,$$

и

$$(\widetilde{H}_2^3f)(\eta,\xi)=\Big\{2A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\eta_i+\cos\xi_i]\Big\}f(\eta,\xi)+3U\int\limits_{T^\nu}f(s,\eta+\xi-s)ds.$$

3. Исследование спектра операторов $\widetilde{H}_2^1$, $\widetilde{H}_2^2$ и $\widetilde{H}_2^3$

Спектр оператора $A\otimes I+I\otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в работах [18–20]. В них даны явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{ess}(A\otimes I+I\otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A\otimes I+I\otimes B)$ оператора $A\otimes I+I\otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и существенный спектр $\sigma_{ess}(A)$ оператора A, а также через спектр $\sigma(B)$ и существенный спектр $\sigma_{ess}(B)$ оператора B:

$$\sigma_{disc}(A\otimes I+I\otimes B)=\big\{\sigma(A)\backslash\sigma_{ess}(A)+\sigma(B)\backslash\sigma_{ess}(B)\big\}\backslash\big\{(\sigma_{ess}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ess}(B))\big\}, \tag{7}$$

$$\sigma_{ess}(A\otimes I+I\otimes B)=(\sigma_{ess}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ess}(B)). \tag{8}$$

Ясно, что $\sigma(A\otimes I+I\otimes B)=\{\lambda+\mu\colon \lambda\in\sigma(A),\ \mu\in\sigma(B)\}$.

Следовательно, мы должны исследовать спектр операторов $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, $\widetilde{H}^2_{2\Lambda_2}$ и $\widetilde{H}^3_{2\Lambda_3}$.

Пусть фиксирован полный квазиимпульс двухэлектронной системы $\lambda+\mu=\Lambda_1$. Обозначим через $L_2(\Gamma_{\Lambda_1})$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_{\Lambda_1}=\{(\lambda,\mu)\colon \lambda+\mu=\Lambda_1\}$. Заметим, что тогда (см. [21]) оператор $\widetilde{H}_2^1$ и пространство $\widetilde{\mathtt{H}}_2^1\equiv L_2((T^\nu)^2)$ можно разложить в прямой интеграл

$$\widetilde{H}_2^1=\bigoplus\int_{T^\nu}\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}d\Lambda_1,$$

$\widetilde{\mathtt{H}}_2^1=\bigoplus\int_{T^\nu}\widetilde{\mathtt{H}}^1_{2\Lambda_1}d\Lambda_1$ операторов $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ и пространств $\widetilde{\mathtt{H}}^1_{2\Lambda_1}=L_2(\Gamma_{\Lambda_1})$ так, что пространства $\widetilde{\mathtt{H}}^1_{2\Lambda_1}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, а операторы $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ в пространствах $\widetilde{\mathtt{H}}^1_{2\Lambda_1}$ действуют по формуле

$$(\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}f_{\Lambda_1})(\lambda)=\Big\{2A+4B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\cos\Big(\frac{\Lambda_1^i}{2}-\lambda_i\Big)\Big\}f_{\Lambda_1}(\lambda)+3U\int\limits_{T^\nu}f_{\Lambda_1}(s)ds, \tag{9}$$

где $f_{\Lambda_1}(x)=f(x,\Lambda_1-x)$.

Сначала мы исследуем спектр оператора (9).

Известно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ не зависит от параметра U и состоит из отрезка

$$\sigma_{cont}(\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1})=G^\nu_{\Lambda_1}=[m^\nu_{\Lambda_1},M^\nu_{\Lambda_1}]=\Big[2A-4B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2},\ 2A+4B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\Big].$$

О п р е д е л е н и е 1. Собственная функция $\varphi_{\Lambda_1}\in L_2(T^\nu\times T^\nu)$ оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, отвечающая собственному значению $z_{\Lambda_1}\notin G^\nu_{\Lambda_1}$, называется *связанным состоянием* (СС) (антисвязанным состоянием (АСС)) оператора $\widetilde{H}_2^1$ с квазиимпульсом Λ_1, а величина z_{Λ_1} — энергией этого состояния.

Рассмотрим оператор K_{Λ_1}, действующий в пространстве $\widetilde{\mathtt{H}}^1_{2\Lambda_1}$:

$$(K_{\Lambda_1}(z)f_{\Lambda_1})(x)=\int\limits_{T^\nu}\frac{3U}{2A+4B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\cos(\frac{\Lambda_1^i}{2}-t_i)-z}f_{\Lambda_1}(t)dt.$$

Он является вполне непрерывным оператором в пространстве $\widetilde{\mathtt{H}}^1_{2\Lambda_1}$ для значений

$$z\notin G^\nu_{\Lambda_1}=\Big[2A-4B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2},2A+4B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\Big].$$

Положим $D^\nu_{\Lambda_1}(z)=1+3U\displaystyle\int_{T^\nu}\frac{ds_1ds_2\dots ds_\nu}{2A+4B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos\frac{\Lambda_1^i}{2}\cos(\frac{\Lambda_1^i}{2}-s_i)-z}$.

Лемма 2. *Число $z_0 \notin G^{\nu}_{\Lambda_1}$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $D^{\nu}_{\Lambda_1}(z)$, т. е. $D^{\nu}_{\Lambda_1}(z_0) = 0$.*

Доказательство. Если z_0 — собственное значение оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, то правая часть формулы (9) равна $z_0 f_{\Lambda_1}(\lambda)$. Отсюда имеем $D^{\nu}_{\Lambda_1}(z_0) = 0$.

Пусть теперь $D^{\nu}_{\Lambda_1}(z_0) = 0$. Тогда однородное уравнение

$$f_{\Lambda_1}(\lambda) + 3U \int\limits_{T^{\nu}} \frac{f_{\Lambda_1}(s)ds}{2A + 4B \sum\limits_{i=1}^{\nu} \cos\dfrac{\Lambda_1^i}{2} \cos(\dfrac{\Lambda_1^i}{2} - s_i) - z} = 0$$

имеет нетривиальное решение. Отсюда следует, что число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$. □

Роль леммы 2 состоит в том, что она позволяет приводить исследование собственных значений и собственных функций оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ к исследованию нулей функции $D^{\nu}_{\Lambda_1}(z)$.

Рассмотрим одномерный случай.

Теорема 3. 1. *Пусть $\nu = 1$ и $U < 0$, тогда для всех значений параметров гамильтониана оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ имеет единственное собственное значение $z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \dfrac{\Lambda_1}{2}}$, лежащее ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т. е. $z_1 < m^1_{\Lambda_1}$.*

2. *Пусть $\nu = 1$ и $U > 0$, тогда для всех значений параметров гамильтониана оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ имеет единственное собственное значение $\widetilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \dfrac{\Lambda_1}{2}}$, лежащее выше области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т. е. $\widetilde{z}_1 > M^1_{\Lambda_1}$.*

Доказательство. Если $U < 0$, то в одномерном случае, функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ монотонно убывает вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т.е. в интервалах $(-\infty, m^1_{\Lambda_1})$ и $(M^1_{\Lambda_1}, +\infty)$. Для $z < m^1_{\Lambda_1}$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ убывает от 1 до $-\infty$, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to 1$ при $z \to -\infty$, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to -\infty$ при $z \to m^1_{\Lambda_1} - 0$. Поэтому ниже значения $m^1_{\Lambda_1}$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ имеет единственный нуль в точке

$$z = z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}} < m^1_{\Lambda_1}.$$

Для $z > M^1_{\Lambda_1}$ и $U < 0$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ убывает от $+\infty$ до 1, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to +\infty$ при $z \to M^1_{\Lambda_1} + 0$, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to 1$ при $z \to +\infty$. Поэтому выше значения $M^1_{\Lambda_1}$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ не обращается в нуль. Если $U > 0$ и $z < m^1_{\Lambda_1}$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ возрастает от 1 до $+\infty$, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to 1$ при $z \to -\infty$, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to +\infty$ при $z \to m^1_{\Lambda_1} - 0$. Поэтому ниже значений $m^1_{\Lambda_1}$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ не может обращаться в нуль. Для $z > M^1_{\Lambda_1}$ и $U > 0$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ возрастает от $-\infty$ до 1, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to 1$ при $z \to +\infty$, $D^1_{\Lambda_1}(z) \to -\infty$ при $z \to M^1_{\Lambda_1} + 0$. Поэтому выше значений $M^1_{\Lambda_1}$ функция $D^1_{\Lambda_1}(z)$ обращается в нуль в точке

$$z = \widetilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}.$$

□

В двумерном случае мы имеем аналогичные результаты.

Теорема 4. 1. *Пусть $\nu = 2$ и $U < 0$, тогда для всех значений параметров гамильтониана оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т. е. $z_2 < m^2_{\Lambda_1}$.*

2. *Пусть $\nu = 2$ и $U > 0$, тогда для всех значений параметров гамильтониана оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ имеет единственное собственное значение $\widetilde{z}_1$, лежащее выше области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т. е. $\widetilde{z}_1 > M^2_{\Lambda_1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $U<0$, то в двумерном случае функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ монотонно убывает вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т.е. в интервалах $(-\infty, m^2_{\Lambda_1})$ и $(M^2_{\Lambda_1}, +\infty)$. Для $z<m^2_{\Lambda_1}$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ убывает от 1 до $-\infty$, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to 1$ при $z\to-\infty$, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to-\infty$ при $z\to m^2_{\Lambda_1}-0$. Поэтому ниже значения $m^2_{\Lambda_1}$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ имеет единственный нуль в точке $z=z_1<m^2_{\Lambda_1}$. Для $z>M^2_{\Lambda_1}$ и $U<0$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ убывает от $+\infty$ до 1, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to+\infty$ при $z\to M^2_{\Lambda_1}+0$, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to 1$ при $z\to+\infty$. Поэтому выше значения $M^2_{\Lambda_1}$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ не обращается в нуль. Если $U>0$ и $z<m^2_{\Lambda_1}$, функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ возрастает от 1 до $+\infty$, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to 1$ при $z\to-\infty$, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to+\infty$ при $z\to m^2_{\Lambda_1}-0$. Поэтому ниже значения $m^2_{\Lambda_1}$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ не может обращаться в нуль. Для $z>M^2_{\Lambda_1}$ и $U>0$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ возрастает от $-\infty$ до 1, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to 1$ при $z\to+\infty$, $D^2_{\Lambda_1}(z)\to-\infty$ при $z\to M^2_{\Lambda_1}+0$. Поэтому выше значения $M^2_{\Lambda_1}$ функция $D^2_{\Lambda_1}(z)$ обращается в нуль в точке $z=\widetilde{z}_1$. □

Если $\nu=3$ и $\Lambda_1=(\Lambda_1^0,\Lambda_1^0,\Lambda_1^0)$, то $\sigma_{cont}(\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1})=\Big[2A-12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}, 2A+12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}\Big]$.
Через W обозначим интеграл Ватсона [22]:

$$W=\frac{1}{\pi^3}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\frac{3dxdydz}{3-\cos x-\cos y-\cos z}\approx 1.516.$$

Так как мера λ нормированная,

$$J=\int\limits_{-\pi}^\pi\int\limits_{-\pi}^\pi\int\limits_{-\pi}^\pi\frac{dxdydz}{3-\cos x-\cos y-\cos z}=\int\limits_{-\pi}^\pi\int\limits_{-\pi}^\pi\int\limits_{-\pi}^\pi\frac{dxdydz}{3+\cos x+\cos y+\cos z}=\frac{W}{3}.$$

Теорема 5. *Пусть $\nu=3$ и $\Lambda_1=(\Lambda_1^0,\Lambda_1^0,\Lambda_1^0)$. Тогда*

1. *Если $U<0$ и $U<-\dfrac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, то оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ имеет единственное собственное значение z ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda 1}$. Если $U<0$ и $-\dfrac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\le U<0$, то оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ не имеет собственных значений ниже области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$.*

2. *Если $U>0$ и $U>\dfrac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, то оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ имеет единственное собственное значение $\widetilde{z}_1$ выше области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$. Если $U>0$ и $0<U\le\dfrac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, то оператор $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$ не имеет собственных значений выше области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $U<0$, то в трехмерном случае функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ монотонно убывает вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$, т.е. в интервалах $(-\infty, m^3_{\Lambda_1})$ и $(M^3_{\Lambda_1},+\infty)$. Для $z<m^3_{\Lambda_1}$ функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ убывает от 1 до $1+\dfrac{UW}{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}$, $D^3_{\Lambda_1}(z)\to 1$ при $z\to-\infty$, $D^3_{\Lambda_1}(z)\to 1+\dfrac{UW}{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}$ при $z\to m^3_{\Lambda_1}-0$. Поэтому ниже значение $m^3_{\Lambda_1}$ функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ имеет единственный нуль в точке $z=z_1<m^3_{\Lambda_1}$, если $1+\dfrac{UW}{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}<0$, т.е.

$U < -\dfrac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$. Для значений $-\dfrac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \leq U < 0$ уравнение $D_{\Lambda_1}^3(z) = 0$ ниже области непрерывного спектра не имеет решение. Для $z > M_{\Lambda_1}^3$ и $U < 0$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ убывает от $1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$ до 1, $D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$ при $z \to M_{\Lambda_1}^3 + 0$, $D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1$ при $z \to +\infty$. Поэтому выше значения $M_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ не обращается в нуль. Если $U > 0$ и $z < m_{\Lambda_1}^3$, функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ возрастает от 1 до $1 + \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$, $D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1$ при $z \to -\infty$, $D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1 + \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$ при $z \to m_{\Lambda_1}^3 - 0$. Поэтому ниже значения $m_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ не может обращаться в нуль. Для $z > M_{\Lambda_1}^3$ и $U > 0$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ возрастает от $1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$ до 1, $D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1$ при $z \to +\infty$, $D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$ при $z \to M_{\Lambda_1}^3 + 0$. Поэтому выше значения $M_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ обращается в нуль в точке $z = \widetilde{z}_1$, если $1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}} < 0$, т. е. $U > \dfrac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$. Если же $0 < U \leq \dfrac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, то функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ не обращается в нуль выше значений $M_{\Lambda_1}^3$. □

Для получения аналогов теорем 3–5 для операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ достаточно Λ_1 заменить на Λ_2 и Λ_3 соответственно.

4. Основные результаты работе

Теперь, используя полученные результаты и представление (6), опишем структуру существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии шестиэлектронных систем модели Хаббарда во втором синглетном состоянии системы.

Теорема 6. 1. *Пусть* $\nu = 1$ *и* $U < 0$, *тогда существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений семи отрезков:*

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3]$$
$$\cup\ [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *— из единственного собственного значения* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{z_1+z_2+z_3\}$, *которое лежит ниже нижнего края существенного спектра оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$.

Здесь и далее

$$a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, \quad b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, \quad c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2},$$

$$d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, \quad e = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}, \quad f = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2},$$

$$z_1 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}, \quad z_2 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}},$$

$$z_3 = 2A - \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}.$$

2. *Пусть* $\nu = 1$ *и* $U > 0$, *тогда существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений семи отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\widetilde{z}_3, b+d+\widetilde{z}_3] \cup [a+e+\widetilde{z}_2, b+f+\widetilde{z}_2] \cup [a+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3, b+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3]$$

$$\cup\ [c+e+\widetilde{z}_1, d+f+\widetilde{z}_1] \cup [c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3, d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3] \cup [e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2, f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ — *из единственного собственного значения* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2 + \widetilde{z}_3\}$, *которое лежит выше правого края существенного спектра оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$.

Здесь

$$\widetilde{z}_1 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}, \quad \widetilde{z}_2 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}},$$

$$\widetilde{z}_3 = 2A + \sqrt{9U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одномерном случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ состоит из отрезков

$$\Big[2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}, 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}\Big], \quad \Big[2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}, 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}\Big]$$

и

$$\Big[2A - 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}, 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}\Big],$$

и эти операторы имеют собственные значения z_1, z_2 и z_3 соответственно. Поэтому спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ состоит из множеств (см. [22]) $\{\lambda + \mu + \gamma : \lambda \in \sigma(\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1), \mu \in \sigma(\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2), \gamma \in \sigma(\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3)\}$. Отсюда и из представления (6) следует, что $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)$ состоит из объединений семи отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ — из единственного собственного значения $z_1 + z_2 + z_3$, т. е. $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$. Это дает утверждение п. 1 теоремы 6. Для доказательства утверждения п. 2 достаточно в доказательстве утверждения 1 теоремы 6 собственные значения z_1, z_2 и z_3 соответственно заменить на собственные значения $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2$ и $\widetilde{z}_3$. □

Следует отметить, что утверждение теоремы 6 отличается от утверждений теорем 27 и 28 из работы [15]. В теоремах 27 и 28 из [15] показано, что в этом случае оператор энергии шестиэлектронных систем имеет не более одного собственного значения, а в теореме 6 доказано, что оператор энергии шестиэлектронного второго синглета имеет в точности единственное собственное значение.

В двумерном случае мы имеем аналогичные результаты.

Теорема 7. 1. *Пусть* $\nu = 2$ *и* $U < 0$, *тогда существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений семи отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3]$$

$$\cup\ [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ — *из единственного собственного значения* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{z_1 + z_2 + z_3\}$, *которое лежит ниже нижнего края существенного спектра оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$.

Здесь и далее $a = 2A - 8B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 8B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 8B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 8B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e = 2A - 8B\cos\frac{\Lambda_3}{2}$, $f = 2A + 8B\cos\frac{\Lambda_3}{2}$, *а* z_1, z_2, z_3 *являются собственными значениями операторов* $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ *и* $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ *соответственно.*

2. *Пусть* $\nu = 2$ *и* $U > 0$, *тогда существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений семи отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\widetilde{z}_3, b+d+\widetilde{z}_3] \cup [a+e+\widetilde{z}_2, b+f+\widetilde{z}_2] \cup [a+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3, b+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3]$$
$$\cup\, [c+e+\widetilde{z}_1, d+f+\widetilde{z}_1] \cup [c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3, d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3] \cup [e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2, f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *— из единственного собственного значения* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3\}$, *которое лежит выше правого края существенного спектра оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$.

Здесь $\widetilde{z}_1$, $\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3$ *являются собственными значениями операторов* $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ *и* $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ *соответственно.*

Доказательство. Теорема 7 доказывается, как и теорема 6, с учетом изменения непрерывного спектра и собственных значений операторов: $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$. □

Теорема 8. *Пусть* $\nu = 3$ *и* $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ *и* $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$. *Тогда*

1. *Если*

$$U<0, \quad U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений семи отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+c_1+z_3, b_1+d_1+z_3] \cup [a_1+e_1+z_2, b_1+f_1+z_2]$$
$$\cup\, [a_1+z_2+z_3, b_1+z_2+z_3] \cup [c_1+e_1+z_1, d_1+f_1+z_1]$$
$$\cup\, [c_1+z_1+z_3, d_1+z_1+z_3] \cup [e_1+z_1+z_2, f_1+z_1+z_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *— из единственного собственного значения* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{z_1+z_2+z_3\}$.

Здесь и далее $a_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $b_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}$, $c_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $d_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}$, $e_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$, $f_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}$ *и* z_1, z_2 *и* z_3 *являются собственными значениями операторов* $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1, \widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2, \widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ *соответственно.*

2. *Если*

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

тогда существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений четырех отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+z_3,b_1+d_1+z_3]$$
$$\cup\,[a_1+e_1+z_2,b_1+f_1+z_2]\cup[a_1+z_2+z_3,b_1+z_2+z_3],$$

или

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+z_3,b_1+d_1+z_3]$$
$$\cup\,[c_1+e_1+z_1,d_1+f_1+z_1]\cup[c_1+z_1+z_3,d_1+z_1+z_3],$$

или

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+e_1+z_2,b_1+f_1+z_2]$$
$$\cup\,[c_1+e_1+z_1,d_1+f_1+z_1]\cup[e_1+z_1+z_2,f_1+z_1+z_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *есть пустое множество*: $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0)=\varnothing$.

3. *Если*

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\le U<-\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}>\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

тогда существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений двух отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+z_3,b_1+d_1+z_3],$$

или

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [a_1+e_1+z_2, b_1+f_1+z_2],$$

или

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1] \cup [c_1+e_1+z_1, d_1+f_1+z_1],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *есть пустое множество:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \varnothing$.

4. *Если*

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \le U < 0 \quad \textit{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < 0 \quad \textit{и} \quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \le U < 0 \quad \textit{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < 0 \quad \textit{и} \quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W} \le U < 0 \quad \textit{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U<0, \quad -\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_2^0}{2}}{W} \le U < 0 \quad \textit{и} \quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

тогда существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из единственного отрезка* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [a_1+c_1+e_1, b_1+d_1+f_1]$, *а дискретный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *есть пустое множество* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \varnothing$.

Доказательство. В трехмерном случае, если $\Lambda_1 = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0)$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^0, \Lambda_2^0, \Lambda_2^0)$ и $\Lambda_3 = (\Lambda_3^0, \Lambda_3^0, \Lambda_3^0)$, непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1, \widetilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\widetilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ состоит из отрезков

$$\Big[2A - 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}, 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}\Big], \quad \Big[2A - 12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}, 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}\Big]$$

и

$$\Big[2A - 12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}, 2A + 12B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}\Big]$$

соответственно. Если $U<0$, тогда функция

$$D_{\Lambda_1}^3(z) = 1 + 3U\int_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{2A + 4B\sum_{i=1}^3 \cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}\cos(\dfrac{\Lambda_1^0}{2} - s_i) - z}$$

монотонно убывает вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, т. е. в интервалах $(-\infty, m_{\Lambda_1}^3)$ и $(M_{\Lambda_1}^3, +\infty)$. Для $z < m_{\Lambda_1}^3 = 2A - 12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ убывает от 1 до

$$D_{\Lambda_1}^3\Big(2A - 12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}\Big) = 1 + \frac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}, \quad D_{\Lambda_1}^3(z) \to 1 \ \text{ при } \ z \to -\infty,$$

$$D^3_{\Lambda_1}(z) \to 1 + \frac{UW}{4B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}} \quad \text{при} \quad z \to 2A - 12B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2} - 0.$$

Поэтому ниже значений $m^3_{\Lambda_1} = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}$ функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ имеет единственный нуль в точке $z = z_1 < m^3_{\Lambda_1}$, если выполняется условие $1 + \dfrac{UW}{4B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}} < 0$, т.е. $U < -\dfrac{4B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}}{W}$.

Если же $U < 0$ и $-\dfrac{4B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}}{W} \le U < 0$, то функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ не имеет нуль ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$. Для функций $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ мы имеем аналогичные результаты. Если все три функции $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ имеют нули, то мы получаем утверждение п. 1 теоремы 8. Если из трех функций $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ две имеют нули, то мы получаем утверждение п. 2 теоремы 8. А если из трех функций $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ только одна имеет нуль, то мы получаем, утверждение п. 3 теоремы 8. Если же из трех функций $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ ни одна не имеет нуль, то мы получаем утверждение п. 4 теоремы 8. □

Теорема 9. *Пусть* $\nu = 3$ *и* $\Lambda_1 = (\Lambda^0_1, \Lambda^0_1, \Lambda^0_1)$, $\Lambda_2 = (\Lambda^0_2, \Lambda^0_2, \Lambda^0_2)$ *и* $\Lambda_3 = (\Lambda^0_3, \Lambda^0_3, \Lambda^0_3)$. *Тогда*
1. *Если*

$$U > 0, \quad U > \frac{4B\cos\frac{\Lambda^0_3}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_2}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_3}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{\Lambda^0_2}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_3}{2},$$

или

$$U > 0, \quad U > \frac{4B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_3}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_2}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{\Lambda^0_3}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_2}{2},$$

или

$$U > 0, \quad U > \frac{4B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda^0_3}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_2}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} \quad \text{или} \quad \cos\frac{\Lambda^0_2}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_3}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_1}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}^0_s$ *состоит из объединений семи отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^0_s) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \widetilde{z}_3, b_1 + d_1 + \widetilde{z}_3]$$

$$\cup [a_1 + e_1 + \widetilde{z}_2, b_1 + f_1 + \widetilde{z}_2] \cup [a_1 + \widetilde{z}_2 + \widetilde{z}_3, b_1 + \widetilde{z}_2 + \widetilde{z}_3]$$

$$\cup [c_1 + e_1 + \widetilde{z}_1, d_1 + f_1 + \widetilde{z}_1] \cup [c_1 + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_3, d_1 + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_3] \cup [e_1 + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, f_1 + \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}^0_s$ *состоит из единственного собственного значения* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^0_s) = \{\widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2 + \widetilde{z}_3\}$.

Здесь и далее $a_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}$, $b_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda^0_1}{2}$, $c_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}$, $d_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}$, $e_1 = 2A - 12B\cos\frac{\Lambda^0_3}{2}$, $f_1 = 2A + 12B\cos\frac{\Lambda^0_3}{2}$ *и* $\widetilde{z}_1$, $\widetilde{z}_2$ *и* $\widetilde{z}_3$ *являются собственными значениями операторов* $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}, \widetilde{H}^2_{2\Lambda_2}, \widetilde{H}^3_{2\Lambda_3}$ *соответственно.*

2. *Если*

$$U > 0, \quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda^0_2}{2}}{W} < U \le \frac{4B\cos\frac{\Lambda^0_3}{2}}{W} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\Lambda^0_1}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_2}{2} < \cos\frac{\Lambda^0_3}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений четырех отрезков*:

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+e_1+\widetilde{z}_2,b_1+f_1+\widetilde{z}_2]$$
$$\cup[c_1+e_1+\widetilde{z}_1,d_1+f_1+\widetilde{z}_1]\cup[e_1+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2,f_1+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2],$$

или

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+\widetilde{z}_3,b_1+d_1+\widetilde{z}_3]$$
$$\cup[c_1+e_1+\widetilde{z}_1,d_1+f_1+\widetilde{z}_1]\cup[c_1+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3,d_1+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3],$$

или

$$\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+\widetilde{z}_3,b_1+d_1+\widetilde{z}_3]$$
$$\cup[a_1+e_1+\widetilde{z}_2,b_1+d_1+\widetilde{z}_2]\cup[a_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3,b_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3],$$

а дискретный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *есть пустое множество* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0)=\varnothing$.

3. *Если*

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}}{W}<U\leq\frac{4B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\quad и\quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad \frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_3^0}{2}}{W}<U\le\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\quad \text{и}\quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

то существенный спектр оператора $^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из объединений двух отрезков*:

$$\sigma_{ess}(^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[c_1+e_1+\widetilde{z}_1,d_1+f_1+\widetilde{z}_1],$$

или

$$\sigma_{ess}(^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+e_1+\widetilde{z}_2,b_1+f_1+\widetilde{z}_2],$$

или

$$\sigma_{ess}(^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]\cup[a_1+c_1+\widetilde{z}_3,b_1+d_1+\widetilde{z}_3],$$

а дискретный спектр оператора $^2\widetilde{H}_s^0$ *есть пустое множество*: $\sigma_{disc}(^2\widetilde{H}_s^0)=\varnothing$.

4. *Если*

$$U>0,\quad 0<U\le\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W}\quad \text{и}\quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}\quad \text{или}\quad \cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad 0<U\le\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_2^0}{2}}{W}\quad \text{и}\quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}\quad \text{или}\quad \cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$U>0,\quad 0<U\le\frac{4B\cos\dfrac{\Lambda_3^0}{2}}{W}\quad \text{и}\quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}\quad \text{или}\quad \cos\frac{\Lambda_3^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_2^0}{2}<\cos\frac{\Lambda_1^0}{2},$$

то существенный спектр оператора $^2\widetilde{H}_s^0$ *состоит из единственного отрезка* $\sigma_{ess}(^2\widetilde{H}_s^0)=[a_1+c_1+e_1,b_1+d_1+f_1]$, *а дискретный спектр оператора* $^2\widetilde{H}_s^0$ *есть пустое множество*: $\sigma_{disc}(^2\widetilde{H}_s^0)=\varnothing$.

Доказательство. Если $U>0$, то функция

$$D_{\Lambda_1}^3(z)=1+3U\int\limits_{T^3}\frac{ds_1ds_2ds_3}{2A+4B\sum_{i=1}^3\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}\cos\big(\dfrac{\Lambda_1^0}{2}-s_i\big)-z}$$

монотонно возрастает вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, т. е. в интервалах $(-\infty,m_{\Lambda_1}^3)$ и $(M_{\Lambda_1}^3,+\infty)$. Для $z<m_{\Lambda_1}^3=2A-12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ возрастает от 1 до

$$D_{\Lambda_1}^3\Big(2A-12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}\Big)=1+\frac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}},\quad D_{\Lambda_1}^3(z)\to1\ \text{ при }\ z\to-\infty,$$

$$D_{\Lambda_1}^3(z)\to1+\frac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}\ \text{ при }\ z\to2A-12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}-0.$$

Поэтому ниже значений $m_{\Lambda_1}^3=2A-12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}$ функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ не может обращаться в нуль. Если $U>0$ и $z>M_{\Lambda_1}^3=2A+12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}$, то функция $D_{\Lambda_1}^3(z)$ возрастает

$$\text{от}\ \ D_{\Lambda_1}^3\Big(2A+12B\cos\frac{\Lambda_1^0}{2}\Big)=1-\frac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$$

до 1, $D^3_{\Lambda_1}(z) \to 1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}$ при $z \to 2A + 12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2} + 0$, $D^3_{\Lambda_1}(z) \to 1$ при $z \to +\infty$. Поэтому выше значений $M^3_{\Lambda_1} = 2A + 12B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}$ функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ имеет единственный нуль в точке $z = \widetilde{z}_1 > M^3_{\Lambda_1}$, если выполняется условие $1 - \dfrac{UW}{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}} < 0$, т. е. $U > \dfrac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$. Если же $U > 0$ и $0 < U \leq \dfrac{4B\cos\dfrac{\Lambda_1^0}{2}}{W}$, то функция $D^3_{\Lambda_1}(z)$ не имеет нуль выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}^1_{2\Lambda_1}$.

Для функций $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ мы имеем аналогичные результаты. Если все три функции $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ имеют нули, то мы получаем утверждение п. 1 теоремы 9. Если из трех функций $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ две имеет нули, то мы получаем утверждение п. 2 теоремы 9. А если из трех функций $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ только одна имеет нуль, то мы получаем утверждение п. 3 теоремы 9. Если же из трех функций $D^3_{\Lambda_1}(z)$, $D^3_{\Lambda_2}(z)$ и $D^3_{\Lambda_3}(z)$ ни одна не имеет нуль, то мы получаем утверждение п. 4 теоремы 9. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hubbard J.** Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. A. 1963. Vol. 276. P. 238–257. doi: 10.1098/rspa.1963.0204
2. **Gutzwiller M.C.** Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 10, no. 159. P. 159–162. doi: 10.1103/PhysRevLett.10.159
3. **Kanamori J.** Electron correlation and ferromagnetism of transition metals // Prog. Theor. Phys. 1963. Vol. 30, no. 3. P. 275–289. doi: 10.1143/PTP.30.275
4. **Anderson P.W.** Localized magnetic states in metals // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 41–53. doi: 10.1103/PhysRev.124.41
5. **Shubin S.P., Wonsowsky S.V.** On the electron theory of metals // Proc. Roy. Soc. A. 1934. Vol. 145. P. 159–172. doi: 10.1098/rspa.1934.0089
6. **Изюмов Ю.А.** Модель Хаббарда в режиме сильных корреляций // Успехи физ. наук, 1995. Т. 165, № 4. С. 403–427.
7. **Arovas D.P., Berg E., Kivelson S.A., and Raghy S.** The Hubbard model // Annu. Rev. Condens. Matter Physics. 2022. Vol. 13. 239–274. doi: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024
8. **Овчинников С.Г., Шнейдер Е.И.** Спектральные функции модели Хаббарда в случае половинного заполнения // Физика твердого тела. 2004. Т. 46, № 8. С. 1428–1432.
9. **Изюмов Ю.А., Чащин Н.И., Алексеев Д.С.** Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика, Ин-т компьютерных исследований”, 2006. 390 с.
10. **Карпенко Б.В., Дякин В.В., Будрина Г.Л.** Два электрона в модели Хаббарда // Физика металлов и металловедение. 1986. Т. 61. С. 702–706.
11. **Ташпулатов С.М.** О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда // Теорет. и мат. физика. 2014. Т. 179, № 3. С. 387–405.
12. **Tashpulatov S.M.** Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplete state in the Hubbard model // J. Phys. Conf. Ser. 2016. Vol. 697, article no. 012025. P. 1–25. doi: 10.1088/1742-6596/697/1/012025
13. **Tashpulatov S.M.** The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state // Lobachevskii J. Math. 2017. Vol. 38, no. 3. P. 530–541. doi: 10.1134/S1995080217030246
14. **Tashpulatov S.M.** Structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model-doublet state // Operator Theory and Differential Equations eds. A.G. Kusraev and Z.D. Totieva. Cham: Birkhäuser, 2021. P. 275–301. doi: 10.1007/978-3-030-49763-7_19

15. **Tashpulatov S.M.** Structure of essential spectra and discrete spectra of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. First quintet and first singlet states // J. Appl. Math. Phys. 2022. Vol. 10, № 11. P. 3424–3461. doi: 10.4236/jamp.2022.1011227
16. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1977. 360 с.
17. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. Москва: Мир, 1982. 432 с.
18. **Ichinose T.** Spectral properties of tensor products of linear operators. I // Trans. American Math. Soc. 1978. Vol. 235. P. 75–113. doi: 10.1090/S0002-9947-1978-0472915-2
19. **Ichinose T.** Spectral properties of tensor products of linear operators. II: the approximate point spectrum and Kato essential spectrum // Trans. American Math. Soc. 1978. Vol. 237. P. 223–254. doi: 10.1090/S0002-9947-1978-0479372-0
20. **Ichinose T.** Tensor products of linear operators. Spectral theory // Banach Center Publications. Vol. 8. P. 294–300. Warsaw: PWN-Polish Sci. Publ., 1982. doi: 10.4064/-8-1-295-300
21. **Наймарк М.А.** Нормированные кольца. М., 1968. 664 с.
22. **Вальков В.В.,Овчинников С.Г., Петраковский О.Г.** Спектр возбуждений двухмагнонных систем в легкоосном квазимерном ферромагнетике //Физика твердого тела. 1988. Т. 30, № 10. С. 3044–3047.

Поступила 30.03.2023
После доработки 29.05.2023
Принята к публикации 19.07.2023

Ташпулатов Саъдулла Мамаражабович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник лаборатории “Физика многочастичных систем”
Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан
г. Ташкент
e-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

REFERENCES

1. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands. *Proc. Roy. Soc. A.*, 1963, vol. 276, pp. 238–257. doi: 10.1098/rspa.1963.0204
2. Gutzwiller M.C. Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals. *Phys. Rev. Lett.*, 1963, vol. 10, no. 159, pp. 159–162. doi: 10.1103/PhysRevLett.10.159
3. Kanamori J. Electron correlation and ferromagnetism of transition metals. *Prog. Theor. Phys.*, 1963, vol. 30, no. 3, pp. 275–289. doi: 10.1143/PTP.30.275
4. Anderson P.W. Localized magnetic states in metals. *Phys. Rev.*, 1961, vol. 124, pp. 41–53. doi: 10.1103/PhysRev.124.41
5. Shubin S.P., Wonsowsky S.V. On the electron theory of metals. *Proc. Roy. Soc. A.*, 1934, vol. 145, pp. 159–172. doi: 10.1098/rspa.1934.0089
6. Izyumov Yu.A. Hubbard model of strong correlations. *Physics-Uspekhi*, 1995, vol. 38, no. 4, pp. 385–408. doi: 10.1070/PU1995v038n04ABEH000081
7. Arovas D.P., Berg E., Kivelson S.A., Raghy S. The Hubbard model. *Annu. Rev. Condens. Matter Physics*, 2022, vol. 13, pp. 239–274. doi: 10.1146/annurev-conmatphys-031620-102024
8. Ovchinnikov S.G., Shneider E.I. Spectral functions in the Hubbard model with half-filling. *Physics of the Solid State*, 2004, vol. 46, no. 8, pp. 1469–1473. doi: 10.1134/1.1788780
9. Izyumov Yu.A., Chashchin N.I., Alekseev D.S. *Teoriya sil'no korrelirovannykh sistem. Metod proizvodyashchego funktsionala* [Theory of strongly correlated systems. Generating functional method], Moscow: Inst. Komp. Issled., Izhevsk: Regul. Khaot. Dinamika Publ., 2006, 381 p. ISBN: 5-93972-502-3.
10. Karpenko B.V., Dyakin V.V., Budrina G.L. Two electrons in Hubbard model. *Fizika Metallov i Metallovedenie*, 1986, vol. 61, no. 4, pp. 702–706 (in Russian).
11. Tashpulatov S.M. Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard model. *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 179, no. 3, pp. 712–728. doi: 10.1007/s11232-014-0173-y

12. Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplete state in the Hubbard model. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 697, article no. 012025, pp. 1–25. doi: 10.1088/1742-6596/697/1/012025
13. Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 530–541. doi: 10.1134/S1995080217030246
14. Tashpulatov S.M. Structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model-doublet state. In: *Operator theory and differential equations*, Kusraev A.G., Totieva Z.D. (eds.), Cham, Birkhäuser, 2021, pp. 275–301. doi: 10.1007/978-3-030-49763-7_19
15. Tashpulatov S.M. Structure of essential spectra and discrete spectra of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. First quintet and first singlet states. *J. Appl. Math. Phys.*, 2022, vol. 10, no. 11, pp. 3424–3461. doi: 10.4236/jamp.2022.1011227
16. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. 1. Functional Analysis*, NY, Acad. Press, 1972. doi: 10.1016/B978-0-12-585001-8.X5001-6 Translated to Russian under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 1. Functsional'nyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1977, 360 p.
17. Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. Vol. 4. Operator analysis*, NY, Acad. Press, 1978. ISBN: 9780125850049. Translated to Russian under the title *Metody sovremennoi matematicheskoi fiziki. Tom 4. Analiz operatorov*, Moscow, Mir Publ., 1982, 432 p.
18. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1978, vol. 235, pp. 75–113. doi: 10.1090/S0002-9947-1978-0472915-2
19. Ichinose T. Spectral properties of tensor products of linear operators. II: the approximate point spectrum and Kato essential spectrum. *Trans. American Math. Soc.*, 1978, vol. 237, pp. 223–254. doi: 10.1090/S0002-9947-1978-0479372-0
20. Ichinose T. On the spectral properties of tensor products of linear operators in Banach spaces. *Banach Center Publications*, 1982, vol. 8, pp. 295–300. doi: 10.4064/-8-1-295-300
21. Naimark M. A. *Normed Rings*, Wolters-Noordhoff, 1970, 572 p. Original Russian text was published in Naimark M. A., *Normirovannye kol'tsa*, Moscow, Nauka publ., 1968.
22. Val'kov V.V., Ovchinnikov S. G., Petrakovskii O. G. Excitation spectrum of two-magnon systems in the easy-axis quasi-dimensional ferromagnet. *Fizika tverdogo tela*, 1988, vol. 30, no. 10, pp. 3044–3047 (in Russian).

Received March 30, 2023
Revised May 29, 2023
Accepted July 19, 2023

Sa'dulla M. Tashpulatov, Dr. Phys.-Math. Sci., leading researcher of the laboratory "Physics of many-particle system", Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan, e-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru .

Cite this article as: S. M. Tashpulatov. The structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator for six-electron systems in the Hubbard model. The second singlet state. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 210–230 .