ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.853.4

МИНИМИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ DC ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

А. С. Стрекаловский

Рассматривается гладкая невыпуклая задача оптимизации, где ограничения равенства и неравенства и целевая функция заданы DC функциями. Сначала исходная задача сводится к задаче без ограничений с помощью теории точного штрафа И. И. Еремина; при этом целевая функция оштрафованной задачи оказывается тоже DC функцией. Далее доказываются необходимые и достаточные условия для минимизирующих последовательностей оштрафованной задачи. На этой основе предложен “теоретический метод” построения минимизирующей последовательности для оштрафованной задачи с фиксированным параметром штрафа и, кроме того, доказана сходимость метода. Исходя из известного метода локального поиска (МЛП) и его свойств, разработана новая схема глобального поиска (СГП), основанная на условиях глобальной оптимальности с варьированием штрафного параметра. При этом последовательность, построенная с использованием СГП, оказывается минимизирующей в “предельной” оштрафованной задаче, а каждый ее терм z^{k+1} оказывается приближенно критическим вектором для МЛП и приближенным решением текущей оштрафованной задачи $(\mathcal{P}_k) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_k})$. Наконец, при дополнительном условии “приближенной допустимости” построенная последовательность оказывается минимизирующей для исходной задачи с DC ограничениями.

Ключевые слова: DC функция, точный штраф, линеаризованная задача, минимизирующая последовательность, условия глобальной оптимальности, локальный поиск, глобальный поиск, критический вектор, разрешающая аппроксимация.

A. S. Strekalovsky. Minimizing sequences in a constrained DC optimization problem.

A smooth nonconvex optimization problem is considered, where the equality and inequality constraints and the objective function are given by DC functions. First, the original problem is reduced to an unconstrained problem with the help of I. I. Eremin’s exact penalty theory, and the objective function of the penalized problem also turns out to be a DC function. Necessary and sufficient conditions for minimizing sequences of the penalized problem are proved. On this basis, a “theoretical method” for constructing a minimizing sequence in a penalized problem with a fixed penalty parameter is proposed and the convergence of the method is proved. The well-known local search method and its properties are used for developing a new global search scheme based on global optimality conditions with varying penalty parameter. The sequence constructed using the global search scheme turns out to be minimizing in the “limit” penalized problem, and each of its terms z^{k+1} turns out to be an approximately critical vector for the local search method and an approximate solution of the current penalized problem $(\mathcal{P}_k) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_k})$. Finally, under an additional condition of “approximate feasibility”, the constructed sequence turns out to be minimizing for the original problem with DC constraints.

Keywords: DC function, exact penalty, linearized problem, minimizing sequence, global optimality conditions, local search, global search, critical vector, resolving approximation.

MSC: 90C26, 90C30, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-185-209

Введение

Около 60 лет назад почти одновременно и независимо друг от друга И.И. Еремин [5] и В. Зангвилл [48; 49] изобрели “точный штраф”, стремительно завоевавший популярность у специалистов по всему миру. Определенная простота и ясность, теоретическая обоснованность, а также эффективность при исследовании и решении широкого спектра прикладных задач на протяжении последних десятилетий придали новому математическому аппарату солидный характер авторитетного направления в теории и методах оптимизации

[1]Работа выполнена в рамках базового проекта фундаментальных исследований Минобрнауки РФ “Теоретические основы, методы и высокопроизводительные алгоритмы непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований” (номер гос. регистрации: 121041300065-9, код проекта FWEW-2021-0003).

[1; 3–6; 10; 11; 14; 15; 17–19; 21; 24; 27; 29–31; 35; 42; 44; 48–50]. Параллельно на рубеже XX и XXI вв. естественно появились и новые вызовы, такие, например, как численный поиск ситуаций равновесия, решение иерархических задач управления, которые еще более усложняются в динамических системах, и т. п. [1; 3; 4; 8; 9; 11–14; 36; 37; 39; 47].

С другой стороны, нетрудно видеть, что вышеуказанные задачи оказываются невыпуклыми [1; 3–7; 11–15; 18; 23; 25–28; 30; 31; 35; 39; 47], даже когда исходные данные являются линейными или выпуклыми, т. е. могут обладать большим (и даже огромным) количеством локальных и стационарных решений. Поэтому сама невыпуклость задач оптимизации может быть оценена как вызов XXI в., а задачи оптимизации естественно распадаются на два класса: выпуклые и невыпуклые. Первые считаются хорошо решаемыми численными методами выпуклой оптимизации (градиентными, ньютоновскими, SQP, IPM, TRM и т. д.), а также пакетами прикладных программ (CPLEX, X-Press, Gurobi и т. д.), причем без экспоненциального роста объема вычислений при линейном росте размерности задачи (отсутствие "проклятия размерности").

В то же время для огромного поля невыпуклых задач классический аппарат продемонстрировал очевидную неэффективность и крайнюю неоперабельность в смысле отыскания глобальных решений [1; 3; 4; 7; 9; 12; 14; 18; 20; 23; 28; 30–35; 37; 47].

Этим объясняется широкая популярность упрощающих идей, таких как $B\&B$-подход и близкие ему идеологически другие методы, например отсечения или фрагментация допустимой области и последующий анализ субзадач. Все эти идеи неизбежно ведут к "проклятию размерности". Одновременно с этим имеет место полное отрицание классического аппарата выпуклой оптимизации [23; 28; 47]. Такими же являются "биоинициированные методы", генетический алгоритм, нейронные сети и т. п. Более того, эти подходы становятся все более и более популярными, несмотря на отсутствие какого-либо математического (или другого теоретического) обоснования и вследствие отсутствия математической подготовки.

В данной статье для невыпуклых задач разрабатывается другой путь, "более математический", нежели вышеупомянутые. Рассматривается общая задача, где данные заданы DC функциями, т. е. разностями выпуклых функций. Как известно, любая непрерывная задача оптимизации может быть аппроксимирована на компакте с любой заданной точностью посредством DC задачи [12–14; 23; 27; 28]. При этом большую роль играет теория точного штрафа (ТТШ) И. И. Еремина, с помощью которой задача $(\mathcal{P})$ с DC ограничениями типа равенств и неравенств сводится к задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$ без ограничений и с целевой DC функцией.

Далее, для минимизирующих последовательностей задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ разрабатываются необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности (УГО), излагается теоретический метод решения задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ (основанный на УГО), исследуется его сходимость.

Кроме того, рассматривается один из возможных методов локального поиска (МЛП), в рамках которого используются классические методы выпуклой оптимизации, что является очевидным преимуществом предлагаемого подхода [12–14; 40–42].

Наконец, для решения оштрафованной DC задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ представлена новая схема глобального поиска (СГП), где используются МЛП с выбором параметра штрафа, а также процедуры выхода из критических точек (построенных локальным поиском), основанные на условиях оптимальности и теоретическом методе.

При естественных и не ограничительных предположениях доказана сходимость СГП с вариацией параметра штрафа, так что на каждой итерации глобального поиска используется свой параметр штрафа $\sigma_k > 0$, построенный локальным поиском. При этом $\sigma_{k+1} \geq \sigma_k$ и последовательность $\{z^k\}$, сгенерированная СГП с разрешающей аппроксимацией (СГ$\mathcal{R}$П1), оказывается минимизирующей для предельной задачи $(\mathcal{P}_{**}) := (\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$, где $\sigma_{**} = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$. Наконец, если $\{z^k\}$ является допустимой в исходной задаче $(\mathcal{P})$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} W(z^k) = 0$, где $W(\cdot)$ — функция штрафа, то $\{z^k\}$ будет минимизирующей в исходной задаче $(\mathcal{P})$. Эти условия создают теоретический фундамент для численного решения сложных прикладных задач DC оптимизации.

1. Постановка задачи и точный штраф

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$(\mathcal{P}): \qquad \begin{cases} f_0(x) := g_0(x) - h_0(x) \downarrow \min\limits_x, & x \in S, \\ f_i(x) := g_i(x) - h_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, m\}, \\ f_i(x) := g_i(x) - h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} := \{m+1, \dots, l\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где функции $g_i(x),\ h_i(x),\ i \in \{0\} \cup \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$, являются гладкими, выпуклыми и собственными на открытом выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а множество S — выпуклое замкнутое множество, $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Таким образом, $f_i(\cdot),\ i \in \{0\} \cup \mathcal{I} \cup \mathcal{E}$, оказываются DC функциями на выпуклом открытом множестве Ω [12; 26–28; 30; 31; 38; 47].

Пусть далее допустимое множество $\mathcal{F}$ задачи $(\mathcal{P})$: $\mathcal{F} := \{x \in S \mid f_i(x) \leq 0,\ i \in \mathcal{I},\ f_i(x) = 0,\ i \in \mathcal{E}\}$ не пусто, а оптимальное значение $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ задачи $(\mathcal{P})$ конечно:

$$(\mathcal{A}_f): \qquad \mathcal{V}(\mathcal{P}) := \inf(f_0, \mathcal{F}) := \inf_x \{f_0(x) \mid x \in \mathcal{F}\} > -\infty. \tag{1.2}$$

Далее введем вспомогательную (оштрафованную) задачу

$$(\mathcal{P}_\sigma): \qquad F_\sigma(x) := f_0(x) + \sigma W(x) \downarrow \min_x, \quad x \in S,$$

где $\sigma \geq 0$ — штрафной параметр, а штрафная функция задана равенством

$$W(x) := \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\} + \sum_{j \in \mathcal{E}} |f_j(x)|.$$

Хорошо известно, что при дополнительных условиях регулярности задачи $(\mathcal{P})$–(1.1) возникают определенные взаимосвязи между задачами $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$ [3; 5; 7; 11; 17–21; 26–28; 47].

Например, если точка $z \in S$ является решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ и при этом z допустима в исходной задаче: $z \in \mathcal{F}$, то z оказывается решением и исходной задачи. Обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо [1; 3; 6; 7; 17–19; 27; 30; 31; 44; 48–50].

Итак, очевидно, что ТТШ, открытая почти одновременно и независимо И. И. Ереминым и В. Зангвиллом [5; 6; 18; 48–50], позволяет осуществить разработку новых численных методов локального и глобального поиска для невыпуклых задач, возникающих в неисчислимом множестве важнейших приложений [4; 7–15; 17; 19; 23; 28; 30; 31; 35; 47].

Это обосновано тем, что ключевое свойство ТТШ о существовании порогового значения $\sigma_* > 0$ штрафного параметра, когда $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma)\ \forall \sigma > \sigma_*$ (т. е. в этом смысле задачи $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$ эквивалентны), позволяет решать лишь одну задачу $(\mathcal{P}_\sigma)$ без ограничений вместо решения последовательности задач $(\mathcal{P}_{\sigma_k})$ при $\sigma_k \uparrow \infty$ [1; 3; 4; 7–10; 24; 28; 50].

Однако необходимо отметить, что теоремы существования порога $\sigma_* > 0$ в вычислительном процессе отыскания локального и тем более глобального решений не индуцируют методов и даже приемов отыскания порога σ_*. В данной статье на это обстоятельство обращено достаточно внимания. Ниже, где это требуется, будем предполагать выполнение достаточных условий существования порога $\sigma_* > 0$ для задачи $(\mathcal{P})$ DC оптимизации.

2. DC декомпозиция задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ и минимизирующие последовательности

Сначала докажем, что целевая функция $F_\sigma(\cdot)$ задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ является DC функцией, т. е. представима в виде разности двух выпуклых функций. В самом деле, как нетрудно видеть [3; 12; 17; 22; 26–28; 30; 31; 47],

$$|f_i(x)| = |g_i(x) - h_i(x)| = 2\max\{g_i(x),\ h_i(x)\} - [g_i(x) + h_i(x)],$$

и тогда с помощью этих равенств получаем искомое представление

$$F_\sigma(x) \triangleq f_0(x) + \sigma \max\{0,\ f_i(x),\ i \in \mathcal{I}\} + \sigma \sum_{j\in\mathcal{E}} |f_j(x)| = G_\sigma(x) - H_\sigma(x),$$

$$H_\sigma(x) := h_0(x) + \sigma\Big[\sum_{i\in\mathcal{I}} h_i(x) + \sum_{j\in\mathcal{E}}(g_j(x) + h_j(x))\Big],$$

$$G_\sigma(x) := F_\sigma(x) + H_\sigma(x) = g_0(x) + 2\sigma \sum_{j\in\mathcal{E}} \max\{g_j(x); h_j(x)\}$$
$$+\, \sigma \max\Big\{ \sum_{j\in\mathcal{I}} h_j(x);\ \Big[g_i(x) + \sum_{j\in\mathcal{I}}^{j\neq i} h_j(x)\Big],\ i \in I\Big\}.$$

Ясно, что обе функции $G_\sigma(\cdot)$ и $H_\sigma(\cdot)$ оказываются выпуклыми и поэтому $F_\sigma(\cdot)$ — это DC функция [12; 23; 26–28; 30; 31; 47]. Очевидно, что если вектор z допустим в исходной задаче $(\mathcal{P})$, то $W(z) = 0$, и, значит, для числа $\zeta := f_0(z)$ справедливы равенства $(\forall\sigma > 0)$, $F_\sigma(z) \triangleq f_0(z) + \sigma W(z) = f_0(z) = \zeta$.

Далее напомним, что в работах [15; 43–45] были доказаны условия глобальной оптимальности для допустимого вектора в задачах $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$ (при фиксированном $\sigma > 0$). Обратим теперь внимание на минимизирующие последовательности [1; 2; 4; 7–10; 12].

О п р е д е л е н и е 2.1. (a) Последовательность $\{z^k\} \subset S$ будем называть минимизирующей для задачи $(\mathcal{P})$ при выполнении двух следующих условий:

$$\text{(i)} \quad \lim_{k\to\infty} f_0(z^k) = \mathcal{V}(\mathcal{P}) \triangleq \inf_x\{f_0(x) \mid x \in \mathcal{F}\} > -\infty; \tag{2.1}$$

$$(\mathcal{FC}): \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{k\to\infty} W(z^k) = 0. \tag{2.2}$$

(b) Последовательность $\{z^k\} \subset S$ является минимизирующей для задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ $(\sigma > 0)$, если

$$\lim_{k\to\infty} F_\sigma(z^k) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) \triangleq \inf_x\{F_\sigma(x) \mid x \in \mathcal{S}\}. \tag{2.3}$$

Введем обозначения для множеств минимизирующих последовательностей $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{M}(\mathcal{P}_\sigma)$ для задач $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть для некоторого фиксированного числа $\sigma > 0$ последовательность $\{z^k\} \subset S$ является минимизирующей в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$: $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_\sigma)$. Дополнительно предположим, что $\{z^k\}$ удовлетворяет “условию допустимости”* (2.2). *Тогда $\{z^k\}$ оказывается минимизирующей для исходной задачи $(\mathcal{P})$–(1.1): $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и, кроме того,*

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) = \mathcal{V}(\mathcal{P}). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (A) Итак, в силу (2.3) имеем

$$\lim_{k\to\infty}[f_0(z^k) + \sigma W(z^k)] = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) \le f_0(x) + \sigma W(x) \quad \forall x \in S. \tag{2.5}$$

С другой стороны, используя (2.2) получаем, что последовательность $\{\rho_k\}$: $\rho_k := \sigma W(z^k) \ge 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = 0$.

Поэтому с помощью (2.5) нетрудно видеть, что существует числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_k \downarrow 0$ $(k \uparrow \infty)$ такая, что

$$\begin{aligned} -\infty < \mathcal{V}(\mathcal{P}) \le f_0(z^k) \le f_0(z^k) + \sigma W(z^k) \triangleq f_0(z^k) + \rho_k \\ \le \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) + \varepsilon_k \le f_0(x) + \sigma W(x) + \varepsilon_k \quad \forall x \in S. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(B) Далее, поскольку последовательности $\{\rho_k\}$ и $\{F_\sigma(z^k) = f_0(z^k)+\rho_k\}$ сходятся (последняя в силу (2.3)), то последовательность $\{f_0(z^k) = F_\sigma(z^k) - \rho_k\}$ также сходится, соответственно

$$\lim_{k\to\infty} f_0(z^k) = \lim_{k\to\infty} F_\sigma(z^k) - \lim_{k\to\infty} \rho_k = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma). \tag{2.7}$$

А тогда из (2.6) вытекает, что

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) \le f_0(z^k) \le f_0(x) + \varepsilon_k \quad \forall x \in \mathcal{F},$$

откуда при $k \uparrow \infty$ с учетом (2.7) получаем

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \lim_{k\to\infty} f_0(z^k) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma).$$

Значит, $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и справедливо равенство (2.4). Что и требовалось доказать. □

3. Свойства минимизирующих последовательностей

Для произвольного фиксированного числа $\sigma > 0$ и произвольного вектора $z \in S$, $\zeta := F_\sigma(z)$, введем следующую функцию:

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(z) := \inf_{(x,y,\beta)} \{ & G_\sigma(x) - \beta - \langle \nabla H_\sigma(y), x - y\rangle \mid x \in S, \\ & H_\sigma(y) = \beta - \zeta, \quad G_\sigma(y) \le \beta \le \beta_+ := \sup(G_\sigma(\cdot), S)\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если в (3.1) положить $y := z, x := z$, то получим $\beta = \beta_0 := H_\sigma(z) + \zeta = H_\sigma(z) + F_\sigma(z) = G_\sigma(z)$.

Тогда из определения (3.1) следует неравенство

$$0 = G_\sigma(z) - \beta_0 - \langle \nabla H_\sigma(z), z - z\rangle \ge \varphi_\sigma(z).$$

Это означает, что

$$\varphi_\sigma(z) \le 0 \quad \forall z \in S. \tag{3.2}$$

А тогда необходимые условия глобальной оптимальности для точки $z \in S$ в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$ (см. [12–16; 43–45]) “на языке” функции $\varphi_\sigma(\cdot)$ равносильны равенству $\varphi_\sigma(z) = 0$. Этот “язык”, как будет видно ниже, весьма продуктивен для установления факта, что некоторая последовательность $\{z^k\} \subset S$ оказывается минимизирующей для задач $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Теорема 1. (i) *Пусть последовательность векторов $\{z^k\} \subset S$ является минимизирующей в задаче $(\mathcal{P})$: $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и, кроме того, для некоторого числа $\sigma > 0$ выполнено равенство $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma)$. Тогда справедливо следующее условие:*

$(\mathcal{OC})$:
$$\lim_{k\to\infty} \varphi_\sigma(z^k) = 0. \tag{3.3}$$

(ii) *Если дополнительно для некоторого $\sigma > 0$ имеет место предположение*

$(\mathcal{A}_r)$:
$$\exists v \in S,\ \exists \chi > 0\colon F_\sigma(v) \ge F_\sigma(z^k) + \chi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.4}$$

то условие $(\mathcal{OC})$–(3.3) становится и достаточным для того, чтобы последовательность $\{z^k\}$ была минимизирующей для задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Доказательство. (i) Итак, $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. Тогда, поскольку в силу (2.1) и (2.2) $\lim\limits_{k\to\infty} W(z^k) = 0$, имеем

$$\lim_{k\to\infty} F_\sigma(z^k) \triangleq \lim_{k\to\infty} [f_0(z^k) + \sigma W(z^k)] = \lim_{k\to\infty} f_0(z^k) + \sigma \lim_{k\to\infty} W(z^k) = \mathcal{V}(\mathcal{P}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma). \tag{3.5}$$

Это означает, что $\{z^k\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{P}_\sigma)$.

Далее, нетрудно видеть, что $\forall (y, \beta)$, удовлетворяющих уравнению $\beta - H_\sigma(y) = F_\sigma(z^k) =: \zeta_k$, ввиду выпуклости $H_\sigma(\cdot)$ справедлива следующая цепочка $\forall x \in S$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$G_\sigma(x) - \beta - \langle \nabla H_\sigma(y), x - y \rangle \geq G_\sigma(x) - \beta - H_\sigma(x) + H_\sigma(y) = F_\sigma(x) - F_\sigma(z^k) = F_\sigma(x) - \zeta_k.$$

Следовательно, по определению (3.1) и свойству (3.2) из последней цепочки имеем

$$0 \geq \varphi_\sigma(z^k) \geq \inf_x \{F_\sigma(x) \mid x \in S\} - F_\sigma(z^k) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) - F_\sigma(z^k).$$

Наконец, с помощью (3.5) при $k \to \infty$ получаем $(\mathcal{OC})$–(3.3).

(ii) (a) Пусть теперь для некоторых числа $\sigma > 0$ и последовательности $\{z^k\} \subset S$ выполнены условие (3.3) и предположение $(\mathcal{A}_r)$–(3.4). Однако эта последовательность $\{z^k\} \subset S$ не является минимизирующей для задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Это означает, что найдутся число $\varkappa > 0$ и достаточно малое число $\varepsilon > 0$, такие что

$$\liminf_{k \to \infty} F_\sigma(z^k) \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) + \varepsilon + \varkappa.$$

Отсюда ясно, что найдется вектор $u \in S$, для которого

$$\zeta_k := F_\sigma(z^k) \geq F_\sigma(u) + \varkappa, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \varkappa > 0. \tag{3.6}$$

Условие (3.6) очевидно равносильно неравенствам

$$H_\sigma(u) + \zeta_k \geq G_\sigma(u) + \varkappa > G_\sigma(u), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

что, в свою очередь, эквивалентно геометрическому факту

$$(u, G_\sigma(u)) \notin C := epi(H_\sigma(\cdot) + \zeta_k) \triangleq \{(x, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid H_\sigma(x) + \zeta_k \leq \gamma\}.$$

С другой стороны, условие регулярности $(\mathcal{A}_r)$–(3.4) можно переписать следующим образом:

$$G_\sigma(v) \geq H_\sigma(v) + \zeta_k + \chi > H_\sigma(v) + \zeta_k,$$

что равносильно включению

$$(v, G_\sigma(v)) \in \operatorname{int} C = \operatorname{int} epi(H_\sigma(\cdot) + \zeta_k).$$

Принимая во внимание топологические свойства выпуклого множества C [27;38], заключаем, что найдется число $\alpha_k \in]0, 1[$, для которого выпуклая комбинация $(y^k, \beta_k) = \alpha_k(u, G_\sigma(u)) + (1 - \alpha_k)(v, G_\sigma(v)) \in \operatorname{bd} C$, где $\operatorname{bd} C := \operatorname{bd}\{epi[H_\sigma(\cdot) + \zeta_k]\} = \{(x, \gamma) \mid H_\sigma(x) + \zeta_k = \gamma\}$, является границей выпуклого множества C. Как следствие, получаем равенства

$$\left.\begin{aligned} y^k &= \alpha_k u + (1 - \alpha_k)v, \\ \beta_k &= \alpha_k G_\sigma(u) + (1 - \alpha_k)G_\sigma(v) = H_\sigma(y^k) + \zeta_k. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Кроме того, поскольку $G_\sigma(\cdot)$ — выпуклая функция, имеем

$$G_\sigma(y^k) \leq \beta_k \leq \sup\{G_\sigma(x) \mid x \in S\}.$$

Перепишем теперь (3.7) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_k^{-1}[y^k - (1 - \alpha_k)v], \\ G_\sigma(u) &= \alpha_k^{-1}[\beta_k - (1 - \alpha_k)G_\sigma(v)]. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

(b) Далее, из определения (3.1) вытекает, что

$$\varphi_\sigma(z^k) \leq G_\sigma(u) - \beta_k - \langle \nabla H_\sigma(y^k), u - y^k \rangle.$$

Теперь подставим равенства (3.8) в последнее неравенство. Тогда в силу выпуклости $H_\sigma(\cdot)$ получаем

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(z^k) &\leq \alpha_k^{-1}[\beta_k - (1-\alpha_k)G_\sigma(v)] - \beta_k - \langle \nabla H_\sigma(y^k), \alpha_k^{-1}[y^k - (1-\alpha_k)v] - y^k \rangle \\ &= \frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}[\beta_k - G_\sigma(v)] + \frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}\langle \nabla H_\sigma(y^k), v - y^k \rangle \\ &\leq \frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}[\beta_k - G_\sigma(v) + H_\sigma(v) - H_\sigma(y^k)] = \frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}[\zeta_k - F_\sigma(v)].\end{aligned}$$

С учетом условия регулярности $(\mathcal{A}_r)$–(3.4) из последней цепочки следует

$$\varphi_\sigma(z^k) \leq \frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}[\zeta_k - F_\sigma(v)] \leq \frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}(-\chi) < 0. \tag{3.9}$$

(c) Согласно сделанным в начале п. (ii) предположениям условие $(\mathcal{OC})$–(3.3) выполнено, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_\sigma(z^k) = 0$. Поэтому из (3.9) получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 1$, что в свою очередь влечет (см. (3.7)) равенства $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = u$, $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = G_\sigma(u)$, $\lim\limits_{k\to\infty} H_\sigma(y^k) = H_\sigma(u)$. А тогда с учетом равенства $\zeta_k \triangleq F_\sigma(z^k) = \beta_k - H_\sigma(y^k)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \zeta_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k - \lim_{k\to\infty} H_\sigma(y^k) = G_\sigma(u) - H_\sigma(u) \triangleq F_\sigma(u),$$

что противоречит неравенству в (3.6). Следовательно, при условиях (3.3) и (3.4) последовательность $\{z^k\}$ непременно должна быть минимизирующей в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$. □

4. Теоретический метод для задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$

В данном разделе предложена теоретическая схема для решения вспомогательной (оштрафованной) задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ для фиксированного $\sigma > 0$, использующая условие оптимальности $(\mathcal{OC})$–(3.3) из теоремы 1. Это условие (3.3) инициирует, в частности, вычисление значения $\varphi_\sigma(z^k)$ на каждой итерации с целью проверки: является ли текущее приближение $z^k \in S$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, приближенным глобальным решением оштрафованной задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$. Поэтому ниже описывается численная процедура, в которой на каждой итерации значение $\varphi_\sigma(z^k)$ вычисляется приближенно и только частично.

Пусть задана некоторая итерация $z^k \in S$ со значением целевой функции $\zeta_k := F_\sigma(z^k)$. Тогда следующая точка $z^{k+1} \in S$ вычисляется так, чтобы были выполнены условия (правила) $(\mathcal{R}1)$ и $(\mathcal{R}2)$:

$(\mathcal{R}1)$:
$$G_\sigma(z^{k+1}) - \beta_k - \langle \nabla H_\sigma(y^k),\ z^{k+1} - y^k \rangle \leq \Theta_k \varphi_\sigma(z^k) + \nu_k, \tag{4.1}$$

$(\mathcal{R}2)$:
$$\beta_k = H_\sigma(y^k) + \zeta_k, \quad \zeta_k := F_\sigma(z^k), \tag{4.2}$$

где последовательности $\{\nu_k\}$ и $\{\Theta_k\}$ удовлетворяют условиям

$$0 < \Theta < \Theta_k \leq 1, \quad \nu_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k < +\infty. \tag{4.3}$$

Кроме того, ниже будет использовано следующее условие на стартовое приближение $z^0 \in S$:

$(\mathcal{A}_0)$:
$$\exists v \in S,\ \exists \varkappa > 0\colon F_\sigma(z^0) \leq F_\sigma(v) - \varkappa - \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k. \tag{4.4}$$

Очевидно, что условие (4.4) не является ни слишком ограничительным, ни отягчающим для постановки задач $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$. При этом нетрудно видеть, что в силу предположения (1.2) функция $F_\sigma(\cdot)$ также ограничена снизу на S: $\mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}) > -\infty$, так как $\sigma \geq 0$ и $W(x) \geq 0\; \forall x \in S \subset \mathbb{R}^n$.

При сделанных предположениях справедлив следующий результат.

Теорема 2. i) *Пусть последовательность $\{z^k\}$ построена согласно правилам $(\mathcal{R}1)$–(4.1), $(\mathcal{R}2)$–(4.2) и (4.3). Тогда выполнено условие $(\mathcal{OC})$–(3.3).*

ii) *Если, кроме того, для стартового вектора z^0 выполнено условие $(\mathcal{A}_0)$–(4.4), то последовательность $\{z^k\}$, построенная по правилам $(\mathcal{R}1)$–(4.1), $(\mathcal{R}2)$–(4.2) и (4.3), оказывается минимизирующей для задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$: $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_\sigma)$.*

iii) *Произвольная предельная точка z_* последовательности $\{z^k\}$ доставляет точную нижнюю грань функции $F_\sigma(\cdot)$ на множестве S, а в случае замкнутости S z_* является глобальным решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$.*

Доказательство. (i) С помощью свойства (3.2) и правил (4.1)–(4.3), а также выпуклости функции $H_\sigma(\cdot)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \nu_k \geq \Theta_k\varphi_\sigma(z^k) + \nu_k \geq G_\sigma(z^{k+1}) - \beta_k - \langle \nabla H_\sigma(y^k), z^{k+1} - y^k\rangle \\ \geq G_\sigma(z^{k+1}) - \beta_k - H_\sigma(z^{k+1}) + H_\sigma(y^k) = F_\sigma(z^{k+1}) - F_\sigma(z^k), \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

откуда немедленно следует, что

$$F_\sigma(z^k) + \nu_k \geq F_\sigma(z^{k+1}), \quad \nu_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k < \infty. \tag{4.6}$$

Соотношения (4.6) означают, что числовая последовательность $\{a_k := F_\sigma(z^k)\}$ является “почти” монотонно убывающей (невозрастающей), и поэтому (см. [1], гл. 2, лемма 2.6.2) существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} F_\sigma(z^k) = F_* \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}) > -\infty$. Более того, используя неравенство (см. (4.5)) $\nu_k \geq \Theta_k\varphi_\sigma(z^k) + \nu_k \geq F_\sigma(z^{k+1}) - F_\sigma(z^k)$ при $k \uparrow \infty$, получаем условие оптимальности $(\mathcal{OC})$–(3.3).

(ii) Далее, нетрудно видеть, что условие $(\mathcal{A}_0)$–(4.4) на стартовый вектор z^0 порождает условие регулярности $(\mathcal{A}_r)$–(3.4)для последовательности $\{z^k\}$ (построенной по правилам $(\mathcal{R}1)$–(4.1), $(\mathcal{R}2)$–(4.2) и (4.3)). Тогда согласно теореме 1 условие $(\mathcal{OC})$–(3.3) становится достаточным для того, чтобы последовательность $\{z^k\}$ была минимизирующей в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Действительно, используя $(\mathcal{OC})$–(3.3), (4.6) и $(\mathcal{A}_0)$–(4.4), имеем

$$F_\sigma(v) - \varkappa - \sum_{s=0}^{\infty} \nu_s \geq F_\sigma(z^0) \geq F_\sigma(z^k) - \sum_{s=0}^{k-1} \nu_s \geq F_\sigma(z^k) - \sum_{s=0}^{\infty} \nu_s,$$

откуда очевидно вытекает $F_\sigma(v) - \varkappa \geq F_\sigma(z^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, что полностью совпадает с $(\mathcal{A}_r)$–(3.4), как и требовалось.

(iii) Заключительные утверждения теоремы очевидны. □

5. Локальный поиск

Как известно, при разработке методов решения задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ без ограничений типа неравенств и равенств основной целью тем не менее считается исходная задача $(\mathcal{P})$. А поскольку задачи $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{P}_\sigma)$ невыпуклы, то для их решения предлагается двухэтапная схема:

a) локальный поиск;

б) процедуры выхода из критических точек (полученных локальным поиском), основанные на условиях глобальной оптимальности (см. [12–15; 43–45] и теорему 1).

При этом необходимо отметить очень важную роль МЛП в общем успехе, поскольку, в частности, обычно эффективные для конкретной задачи $(\mathcal{P})$ (возникающей, например, при поиске равновесий по Нэшу в полиматричной игре, поиске оптимистических и гарантированных решений двухуровневых задач оптимизации и т. п.) МЛП, их идеи, теоремы сходимости и т. д. сильно разнятся [12–14; 39–42].

Здесь будем рассматривать один из вариантов методов последовательного решения линеаризованных задач или метода Куранта — Фан Дин Тао (называемый, чаще всего, DCA) [30;31].

Ниже представлена стандартная схема DCA последовательного решения задач вида

$$(\mathcal{P}_s L_s): \qquad \Phi_s(x) := \Phi_{\mu_s}(x) := G_s(x) - \langle \nabla H_s(x^s), x\rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \tag{5.1}$$

где x^s — текущая итерация, $s = 1, 2, \ldots$, а также основные результаты по сходимости МЛП, приведенные в [12;39–42]. Для простоты и ясности представления ниже используются следующие обозначения: $H_s(\cdot) := H_{\mu_s}(\cdot),\ G_s(\cdot) := G_{\mu_s}(\cdot)$, $(\mathcal{P}_s) := (\mathcal{P}_{\mu_s})$, где $\{\mu_s\}$ — последовательность штрафных параметров.

Пусть заданы стартовый вектор $x_0 \in S$, текущая итерация $x^s \in S$ и текущее значение штрафного параметра $\mu_s > 0$. Тогда следующая итерация $x^{s+1} \in S$ ищется из условия

$$\begin{gathered} \Phi_s(x^{s+1}) - \delta_s := G_s(x^{s+1}) - \langle \nabla H_s(x^s), x^{s+1}\rangle - \delta_s \\ \le \inf_x \{\Phi_s(x) \stackrel{\triangle}{=} G_s(x) - \langle \nabla H_s(x^s), x\rangle \mid x \in S\} =: \mathcal{V}_s \le \Phi_s(x^s) \stackrel{\triangle}{=} G_s(x^s) - \langle \nabla H_s(x^s), x^s\rangle, \end{gathered} \tag{5.2}$$

где

$$\delta_s > 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s < +\infty.$$

Пусть, кроме того, заданы начальное значение $\mu_- > 0$ штрафного параметра вместе с двумя параметрами МЛП $\rho_1 \in]0, 1[,\ \ \rho_2 \in [2, 10]$ и последовательность $\{\omega_s\},\ \omega_s > 0,\ s = 0, 1, 2, \ldots$, $\omega_s \downarrow 0$ $(s \uparrow \infty)$. Тогда первый вариант МЛП описывается следующим образом (см. также [12–16; 22; 30; 31; 40–42]).

Схема 1 локального поиска (СЛП1)

Шаг 0. Положить $s := 0,\ x^s := x_0,\ \mu_s := \mu_-$.

Шаг 1. Найти (δ_s -) приближенное решение $x(\mu_s)$ задачи $(\mathcal{P}_s L_s) \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{P}_{\mu_s} L_s)$–(5.1): $x(\mu_s) \in \delta_s{-}Sol(\mathcal{P}_s L_s)$.

Шаг 2. Если $W(x(\mu_s)) \le \omega_s$, то положить $\mu_+ := \mu_s,\ x(\mu_+) := x(\mu_s)$ и перейти на шаг 6.

Шаг 3. $(W(x(\mu_s)) > \omega_s)$ Если выполнено неравенство

$$\Phi_s(x^s) - \Phi_s(x(\mu_s)) \ge \rho_1 \mu_s [W(x^s) - W(x(\mu_s))],$$

то положить $\mu_+ := \mu_s,\ x(\mu_+) := x(\mu_s)$ и перейти на шаг 6.

Шаг 4. Увеличить число $\mu_s > 0$ так, что $\mu_+ := \rho_2 \mu_s$, $\rho_2 \in [2, 10]$, и отыскать (δ_s-) приближенное решение $x(\mu_+)$ следующей линеаризованной задачи:

$$(\mathcal{P}_+ L_+): \qquad \Phi_+(x) := G_+(x) - \langle \nabla H_+(x(\mu_s)), x\rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S,$$

где $G_+ := G_{\mu_+},\ \ H_+ := H_{\mu_+}$, так что $x(\mu_+) \in \delta_s{-}Sol(\mathcal{P}_+ L_+)$.

Шаг 5. Положить $x(\mu_s) := x(\mu_+)$, $\mu_s := \mu_+$ и вернуться на шаг 2.

Шаг 6. Положить $\mu_{s+1} := \mu_+$, $x^{s+1} := x(\mu_+) \in S$, $s := s+1$, и вернуться на шаг 1. $\square$

Обратимся далее к известным результатам о сходимости [40–42].

Введем следующие предположения:

$$(\mathcal{A}_W): \quad \left.\begin{aligned} &(a): \quad \xi_s := (\mu_{s+1} - \mu_s)W(x^s) \geq 0, \quad s = 0,1,2,\ldots; \\ &(b): \quad \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s \overset{\triangle}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (\mu_{s+1} - \mu_s)W(x^s) < +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Ясно, что $(\mathcal{A}_W)$–(5.3) влечет неравенства $\mu_{s+1} \geq \mu_s > 0$ и что [40–42]

$$F_{s+1}(x^{s+1}) \leq F_s(x^s) + \xi_s, \quad s = 0,1,2,\ldots,$$

откуда с помощью $(\mathcal{A}_W)$–(5.3) следует, что последовательность $\{F_s(x^s)\}$ оказывается "почти" невозрастающей и справедлив следующий результат [40; 41].

Предложение 1. *Пусть выполнены предположения* $(\mathcal{A}_f)$–(1.2) *и* $(\mathcal{A}_W)$–(5.3).

Тогда последовательность $\{x^s\} \subset S$, *спродуцированная* СЛП1, *такова, что числовые последовательности* $\{F_s(x^s)\}$ *и* $\{\Delta\Phi_{s+1}\}$, *где* $\Delta\Phi_{s+1} := \Phi_{s+1}(x^s) - \Phi_{s+1}(x^{s+1}) \overset{\triangle}{=} G_{s+1}(x^s) - G_{s+1}(x^{s+1}) + \langle \nabla H_{s+1}(x^s), x^{s+1} - x^s \rangle$, *сходятся, так что*

$$(a): \lim_{s\to\infty} F_s(x^s) =: F_* > -\infty; \qquad (b): \lim_{s\to\infty} \Delta\Phi_{s+1} = 0.$$

К тому же нетрудно показать, что при условии

$$(\mathcal{A}_{str}): \quad \left.\begin{aligned} &\text{По крайней мере, одна из функций } h_i,\ i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E} \cup \{0\}, \\ &g_j,\ j \in \mathcal{E}, \text{ является сильно выпуклой;} \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

функции $H_\mu(\cdot)$, $H_s(\cdot)$, $H_{s+1}(\cdot)$ оказываются также сильно выпуклыми [1; 4; 17; 22; 26; 27; 35; 41; 47]. Напомним, что для любой DC функции $f(x) = g(x) - h(x)$ выпуклые компоненты $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ всегда могут быть сделаны сильно выпуклыми [1; 7; 12; 17; 23; 26–28; 39; 47].

Предложение 2 [1; 30; 31; 39–41]. *Пусть предположение* $(\mathcal{A}_{str})$–(5.4) *выполнено.*

Тогда последовательность $\{x^s\}$, *построенная* СЛП1, *оказывается фундаментальной, т. е.*

$$\lim_{s\to\infty} ||x^s - x^{s+1}|| = 0.$$

Предположим, что имеет место условие

$$(\mathcal{A}_{up}): \qquad \exists \mu_{up} \in \mathbb{R}: \ \mu_{up} \geq \mu_s, \quad s = 0,1,2,\ldots, \tag{5.5}$$

которое с практической точки зрения выглядит достаточно естественно. Более того, комбинируя (5.5) и (5.3), получаем, что существует $\mu_* \geq 0$ такое, что $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_s = \mu_*$. Это немедленно влечет такой результат. Введем следующие обозначения:

$$G_*(x) := G_{\mu_*}(x) = g_0(x) + \mu_* G_W(x),$$

$$H_*(x) := H_{\mu_*}(x) = h_0(x) + \mu_* H_W(x), \quad W(x) = G_W(x) - H_W(x).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $(\mathcal{A}_W)$–(5.3), $(\mathcal{A}_f)$–(1.2), $(\mathcal{A}_{str})$–(5.4) *и* $(\mathcal{A}_{up})$–(5.5).

Тогда любая предельная точка x_* *последовательности* $\{x^s\}$ *построенной* СЛП1 *является решением следующей выпуклой (линеаризованной) задачи:*

$$(\mathcal{P}_* L_*): \qquad \Phi_*(x) := G_*(x) - \langle \nabla H_*(x_*), x \rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S. \tag{5.6}$$

З а м е ч а н и е 5.1. Назовем точку, удовлетворяющую (5.6), критической (по отношению к МЛП). Тогда ясно, что понятие критической точки, определенной в теореме 3, значительно сильнее и строже, чем понятие обычной стационарной (ККТ) точки, генерируемой стандартными (классическими) методами решения задачи $(\mathcal{P})$. С другой стороны, оно совершенно естественно, поскольку метод, описываемый неравенством (5.2) или СЛП1, уже "дальше" не работает — он остается в той же точке x_*, где и производится частичная линеаризация.

С учетом вычислительного опыта решения как тестовых, так и прикладных задач оптимизации было бы разумным предложить некоторую комбинацию нескольких критериев останова для СЛП1 на основе теорем 1–3 и предложений 1 и 2. Таковыми могли бы быть, например, следующие [30; 31; 39–42]:

$$(a): \quad W(x_+) = 0 \quad (\text{или } \; W(x_+) \le \omega); \quad (b): \quad ||x_+ - x^s|| \le \tau; \quad (c): \quad \mu_{s+1} - \mu_s \le \omega.$$

К сожалению, каждый из этих критериев по отдельности говорит слишком мало о той фазе вычислительного процесса, в которой мы находимся (об итерации s).

В то же время предложение 1 подсказывает, что неравенство

$$\Phi_s(x^s) - \Phi_s(x^{s+1}) \le \frac{\tau}{2} \tag{5.7}$$

также может быть использовано в качестве критерия останова, поскольку из главного неравенства (5.2) и (5.7) вытекает, что

$$\Phi_s(x^s) \triangleq G_s(x^s) - \langle \nabla H_s(x^s), x^s \rangle \le \frac{\tau}{2} + \Phi_s(x^{s+1}) \le \mathcal{V}_s + \delta_s + \frac{\tau}{2},$$

где $\mathcal{V}_s \triangleq \inf_x\{\Phi_s(x) \mid x \in S\}$. Откуда при $\delta_s \le \dfrac{\tau}{2}$ получаем $\Phi_s(x^s) \le \mathcal{V}_s + \tau$, так что x^s является τ-решением задачи $(\mathcal{P}_s L_s)$, что неплохо для МЛП в задаче $(\mathcal{P}_s) \triangleq (\mathcal{P}_{\mu_s})$. Более того, используя неравенство (5.2), имеем с помощью выпуклости $H_s(\cdot)$

$$\begin{aligned}\delta_s \le \mathcal{V}_s - \Phi_s(x^{s+1}) \le \Phi_s(x^s) - \Phi_s(x^{s+1}) &\triangleq G_s(x^s) - G_s(x^{s+1}) + \langle \nabla H_s(x^s), x^{s+1} - x^s \rangle \\ \le G_s(x^s) - G_s(x^{s+1}) + H_s(x^{s+1}) - H_s(x^s) &= F_s(x^s) - F_s(x^{s+1}),\end{aligned}$$

откуда посредством предложения 1 можно показать, что $\lim\limits_{s\to\infty}[\Phi_s(x^s) - \Phi_s(x^{s+1})] = 0$. Это дает дополнительные основания для использования критерия (5.7), поскольку он самый простой в вычислительном плане (на s-й итерации минимизируем функцию $\Phi_s(\cdot)$).

Обозначим через $\overline{\mu}_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ конечное значение параметра штрафа $\mu > 0$, при котором выполнены критерии останова.

6. Глобальный поиск

В этом разделе предлагается вычислительная схема, которая, во-первых, позволяет улучшить значение $F_k(z^k) := F_{\sigma_k}(z^k)$ целевой функции задачи $(\mathcal{P}_k := (\mathcal{P}_{\sigma_k}))$ в критической точке z^k, построенной неким МЛП (например, представленным в разд. 5). При этом улучшение достигается с помощью теорем 1 и 2, которые предлагают для этой цели исследовать следующую вспомогательную задачу оптимизации:

$$(\mathcal{AP}_k L)\colon \left\{ \begin{array}{l} \Psi(x, y, \beta) := G_k(x) - \beta - \langle \nabla H_k(y), x - y \rangle \downarrow \min\limits_{x,y,\beta}, \quad x \in S, \\ (y, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \beta - H_k(y) = \zeta_k := F_k(z^k), \quad G_k(y) \le \beta \le \beta_+ := \sup\{G_k(x) \mid x \in S\}, \end{array} \right.$$

где $G_k(\cdot) := G_{\sigma_k}(\cdot)$, $H_k(\cdot) := H_{\sigma_k}(\cdot)$, а минимизация должна быть исполнена для трех переменных $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$. Однако можно отметить, что задача $(\mathcal{AP}_k L)$, по-видимому, сравнима по трудности с $(\mathcal{P}_\sigma)$ и $(\mathcal{P})$, поскольку появились дополнительные переменные $(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1}$. К тому же, $(\mathcal{AP}_kL)$ — это невыпуклая задача. Поэтому разумным было бы ее декомпозировать на несколько более простых и легче решаемых, чем $(\mathcal{AP}_kL)$, задач. При этом внутри этой схемы выигрышным было бы использовать некий алгоритм локального поиска, скажем, представленный в разд. 5. Напомним, что МЛП продуцирует приближенно критическую точку $z^k \in S$, одновременно доставляя соответствующее значение $\sigma_k := \overline{\mu}_k$ штрафного параметра. Ниже представлена одна из возможных схем поиска глобального решения задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ с варьируемым значением параметра штрафа $\sigma_k > 0$, что требует особого внимания.

Пусть далее заданы стартовая точка $x_0 \in S$ и числовые последовательности $\{\tau_k\}$, $\{\delta_k\}$, $\{\omega_k\}$, такие что $\tau_k,\ \delta_k,\ \omega_k > 0$, $k = 0,1,2,\dots$, $\tau_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$, $\omega_k \downarrow 0$ $(k \uparrow \infty)$.

Схема 1 глобального поиска (СГП1)

Шаг 0. Положить $k := 0$, $x^k := x_0 \in S$, $\sigma_- := 1$.

Шаг 1. Стартуя из $x^k \in S$ со значением $\sigma = \sigma_-$ штрафного параметра с помощью МЛП найти τ_k-критическую точку $z^k \in S$ с новым, вообще говоря, значением $\sigma_k \geq \sigma_-$ штрафного параметра, так что ($\sigma_k := \overline{\mu}_k$, где $\overline{\mu}_k$ — конечное значение μ_s в локальном поиске)

$$\zeta_k := F_k(z^k) \leq F_k(x^k), \quad W(z^k) \leq \omega_k,$$

и, в частности, выполнено “неравенство критичности”

$$G_k(z^k) - \langle \nabla H_k(z^k), z^k\rangle - \tau_k \leq \inf_x \{G_k(x) - \langle \nabla H_k(z^k), x\rangle \mid x \in S\}. \tag{6.1}$$

Шаг 2. Выбрать число $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$, с помощью некоторого метода одномерного поиска, стартуя, скажем, из $\beta_1 := G_k(z^k)$ или $\beta_- := \inf_x \{G_k(x) \mid x \in S\}$.

Шаг 3. Построить конечную аппроксимацию

$$\mathcal{A}_k(\beta) = \{v^1, \dots, v^N \mid H_k(v^i) = \beta - \zeta_k,\ i = 1, \dots, N = N_k(\beta)\}$$

и согласно условиям оптимальности [12–15; 43–45] и теореме 1 сформировать множество индексов

$$I_k := I_k(\beta) := \{i \in \{1,2,\dots,N_k\} \colon G_k(v^i) \leq \beta\}.$$

Шаг 4. Для каждого $i \in I_k$ найти приближенное $\rho_k\delta_k$-решение $\overline{u}^i \in S$ $(\rho_k \in [2,5])$ линеаризованной (выпуклой) задачи

$$(\mathcal{P}_kL_i)\colon \qquad G_k(x) - \big\langle \nabla H_k(v^i), x\big\rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \tag{6.2}$$

так что справедливо неравенство

$$G_k(\overline{u}^i) - \langle \nabla H_k(v^i), \overline{u}^i\rangle - \rho_k\delta_k \leq \inf_x \{G_k(x) - \langle \nabla H_k(v^i), x\rangle \mid x \in S\}. \tag{6.3}$$

Шаг 5. Для каждого $i \in I_k$, стартуя из $\overline{u}^i \in S$ и $\sigma_- := 1$, с помощью МЛП найти $\rho_k\tau_k$-критический вектор $u^i \in S$ с новым значением $\sigma_i \geq 1$ $(\sigma_i := \overline{\mu}_{ki})$ штрафного параметра, так что выполнены следующие условия:

$$F_i(u^i) \leq F_i(\overline{u}^i), \quad W(u^i) \leq \omega_k, \tag{6.4}$$

$$G_i(u^i) - \langle \nabla H_i(u^i), u^i\rangle - \rho_k\tau_k \leq \inf_x \{G_i(x) - \langle \nabla H_i(u^i), x\rangle \mid x \in S\}, \tag{6.5}$$

где $G_i(\cdot) := G_{\sigma_i}(\cdot)$, $H_i(\cdot) := H_{\sigma_i}(\cdot)$.

Шаг 6. Для каждого $i \in I_k$ найти приближенное $\rho_k\delta_k$-решение w^i задачи уровня

$$(Lev\ \mathcal{P}_k): \qquad \big\langle \nabla H_k(v), u^i - v \big\rangle \uparrow \max_v, \quad H_k(v) = \beta - \zeta_k, \tag{6.6}$$

так что $H_k(w^i) = \beta - \zeta_k$ и

$$\langle \nabla H_k(w^i), u^i - w^i \rangle + \rho_k\delta_k \geq \sup_v \{ \langle \nabla H_k(v), u^i - v \rangle \ \mid \ H_k(v) = \beta - \zeta_k \}. \tag{6.7}$$

Шаг 7. Положить $\eta_k(\beta) := \widehat{\eta}_k(\beta) - \beta$, где

$$\widehat{\eta}_k(\beta) := G_k(u^j) - \langle \nabla H_k(w^j), u^j - w^j \rangle = \min_{i \in I_k} \{ \langle G_k(u^i) - \nabla H_k(w^i), u^i - w^i \rangle \}. \tag{6.8}$$

Шаг 8. Если $\eta_k(\beta) < 0$, то положить $x^{k+1} := u^j$, $\sigma_- := \max\{\sigma_k; \sigma_j\}$, $k := k+1$ и вернуться на шаг 1.

Шаг 9. Если $\eta_k(\beta) \geq 0$, то построить новое приближение $\beta := \beta + \Delta\beta \in [\beta_-, \beta_+]$ посредством некоторого метода одномерного поиска и вернуться на шаг 3.

Шаг 10. Если же $\eta_k(\beta) \geq 0 \ \forall \beta \in [\beta_-, \beta_+]$ (т. е. метод одномерного поиска по β финишировал), то положить $x^{k+1} := z^k$, $\sigma_- := \sigma_k$, $k := k+1$ и вернуться на шаг 1. □

З а м е ч а н и е 6.1. Ясно, что если $z \in Sol(\mathcal{P}_k)$, невозможно улучшить значение $F_k(z^k) =: \zeta_k$. Однако возникает вопрос: как же узнать, является ли вектор z^k решением задачи $(\mathcal{P}_k)$. А самое главное, будет ли z^k решением исходной задачи $(\mathcal{P})$?

При этом естественно предположить, что шаги 4–6 исполнены достаточно эффективно, так что выпуклая (6.2) и невыпуклая (6.6) задачи решены глобально с заданной точностью. Эти вопросы будут обсуждаться в разд. 7.

З а м е ч а н и е 6.2. (A) Для обоснования (в определенной степени) только что описанной СГП1, введем следующие предположения ($\forall \sigma > 0$):

$(\mathcal{A}L)$: $\quad \forall \delta > 0,\ \forall \beta \in [\beta_-, \beta_+],\ \forall z \in S,\ \forall v\colon\ H_\sigma(v) = \beta - \zeta, \quad \zeta := F_\sigma(z), \quad G_\sigma(v) \leq \beta,$
можно отыскать вектор $u \in S$, удовлетворяющий следующему неравенству:

$$G_\sigma(u) - \langle \nabla H_\sigma(v), u \rangle - \delta \leq \inf_x \{ G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(v), x \rangle \ \mid \ x \in S \}; \tag{6.9}$$

$(\mathcal{A}_{lev})$: $\quad \forall \delta > 0, \ \ \forall \beta \in [\beta_-, \beta_+], \ \ \forall z,\ u \in S,$
можно найти вектор $w\colon\ H_\sigma(w) = \beta - F_\sigma(z)$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle \nabla H_\sigma(w), u - w \rangle + \delta \geq \sup_v \{ \langle \nabla H_\sigma(v), u - v \rangle \ \mid \ G_\sigma(v) \leq \beta,\ H_\sigma(v) = \beta - F_\sigma(z) \}. \tag{6.10}$$

Нетрудно видеть, что эти предположения нужны для обоснования работы СГП1 на шагах 4–6. Однако необходимо заметить, что задача (6.7) для квадратичной функции $H_\sigma(\cdot)$ [12–14; 39; 42] может быть решена аналитически.

(B) Из описания СГП1 ясно, что каждый член z^k последовательности $\{z^k\}$, сгенерированной СГП1, является τ_k-критическим вектором специального МЛП (скажем, DCA или метода из разд. 5; см. также [12–14; 22; 30; 31; 39–41]).

(C) На шагах 1, 4–6 СГП1 можно применить стандартные алгоритмы оптимизации и современные решатели (CPLEX, XPress, Gurobi и т. п.). Эта возможность использования разнообразных и современных средств для реализации СГП1 может быть рассмотрена как преимущество разработанной технологии, уже доказавшей свою эффективность для различных типов тестовых и прикладных задач оптимизации [12–15; 22; 25; 30; 31; 39].

(D) Очевидно, что СГП1 не является еще алгоритмом в общепринятом смысле, поскольку здесь не уточнены методы локального поиска и одномерного поиска для β; тем не менее, разработана концептуальная СГП для задач $(\mathcal{P}_\sigma)$ и $(\mathcal{P})$.

Замечание 6.3. Нетрудно заметить, что в СГП1 предпринята попытка соединить возможности, свойства и преимущества локального поиска и процедур глобального поиска, основанных на УГО. И это все в едином вычислительном процессе.

При этом на локальный поиск (МЛП) налагается дополнительное обязательство $(W(z^k), W(u^i) \leq \omega_k)$: на каждой итерации глобального поиска $(k = 1, 2, \ldots)$ строить не только критический, но и ω_k-допустимый вектор. Именно поэтому схема МЛП была значительно упрощена по сравнению с [16; 41], что оправдалось во время вычислительного эксперимента: МЛП работал быстро и эффективно.

Далее, МЛП предоставлена "свобода" конструирования параметра штрафа σ_k (на каждой итерации СГП1) посредством построения "локальной" последовательности $\{\mu_s\}$ параметра штрафа (полагая $\sigma_k := \overline{\mu}_k$, где $\overline{\mu}_k$ — наибольшее значение параметра штрафа при локальном поиске на шаге 1; аналогично $\sigma_i := \overline{\mu}_{ki}$ на шаге 5). Именно при значениях σ_k, σ_i отыскивается точка $u^{jk} \in S$, нарушающая УГО $(\eta_k < 0)$ для задачи $(\mathcal{P}_k) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_k})$.

Однако, неясно, как повлияют эти обстоятельства на сходимость сгенерированных последовательностей $\{z^k\}$, $\{\sigma_k\}$. И сходится ли вообще вычислительный процесс, и куда? Эти вопросы исследуются в следующем разделе.

7. О сходимости СГП1

Из описания СГП1 нетрудно заметить, что выбор методов решения задач (6.3)–(6.7), а также метода одномерного поиска по β является, конечно, очень важным и влиятельным для эффективности СГП1 в целом. Тем не менее ясно, что этот выбор стандартен для специалистов, имеющих численный опыт решения задач выпуклой и невыпуклой оптимизации.

В то же время задача построения "эффективной и разумной" аппроксимации $\mathcal{A}_k(\beta) = \mathcal{A}_k(\zeta_k, \beta)$ на шагах 2 и 3, очевидно, оказывается новой, ранее не встречавшейся в оптимизации процедурой. Более того, вычислительный опыт [12–15; 22; 28; 30–34; 39; 42] свидетельствует о том, что конструирование подходящей аппроксимации $\mathcal{A}_k(\beta)$ с соответствующим выбором $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$ является решающим моментом выхода из текущей критической точки, сгенерированной МЛП.

Пусть сначала значение $\sigma > 0$ параметра штрафа фиксировано. Оценим "качество" аппроксимации $\mathcal{A}_k(\beta)$ и числа $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$ при глобальном поиске.

Пусть заданы точка $z \in S$, $\zeta := F_\sigma(z)$, числа $\sigma > 0$, $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$ и аппроксимация

$$\mathcal{R}(\zeta, \beta) := \{v^1, \ldots, v^N \mid H_\sigma(v_i) = \beta - \zeta,\ i = 1, \ldots, N = N(\zeta, \beta)\}.$$

Кроме того, пусть точки $u^i \in S$, $w^i \in \mathbb{R}^n : H_\sigma(w^i) = \beta - \zeta$ построены так же, как на шагах 5–7 СГП1. Теперь вычислим число $\eta(\zeta, \beta)$, как и в СГП1:

$$\eta(\zeta, \beta) := G_\sigma(u^j) - \beta - \langle \nabla H_\sigma(w^j), u^j - w^j \rangle = \min_i \big\{ G_\sigma(u^i) - \beta - \langle \nabla H_\sigma(w^i), u^i - w^i \rangle \mid i \in I(\beta) \big\},$$

где $I(\beta) = \{i \in \{1, \ldots, N\} \mid G_\sigma(v^i) \leq \beta\} \neq \varnothing$. Наконец, пусть заданы числа ε, δ, $\nu > 0$, $0 < \theta < 1$.

Определение 7.1. Аппроксимацию $\mathcal{R}(\zeta, \beta)$ назовем $(\varepsilon, \delta, \nu, \theta)$-разрешающей для задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$, если из неравенства

$$F_\sigma(z) > \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) + \varepsilon \tag{7.1}$$

(т. е. z не является ε-решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$) следуют следующие три неравенства:

$$\eta(\zeta, \beta) < 0, \tag{7.2}$$

$$\eta(\zeta,\beta) < \theta\varphi_\sigma(z) + \nu, \tag{7.3}$$

$$F_\sigma(u^j) \le \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) + \varepsilon, \tag{7.4}$$

так что u^j оказывается ε-решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Лемма 2. *Пусть аппроксимация* $\mathcal{R}(\zeta,\beta)$ *является* $(\varepsilon,\delta,\nu,\theta)$*-разрешающим множеством и, кроме того, выполнено неравенство*

$(\mathcal{CC})$:
$$\nu \ge \theta\varepsilon. \tag{7.5}$$

Тогда неравенство (7.2) *влечет неравенство* (7.3).

Доказательство. 1) Из определения (3.1)

$$\varphi_\sigma(z) \triangleq \inf_{(x,y,\beta)} \left\{ G_\sigma(x) - \beta - \langle \nabla H_\sigma(y), x-y\rangle \mid x \in S, H_\sigma(y) = \beta - \zeta,\ G_\sigma(y) \le \beta \le \beta_+ \right\}$$

в силу выпуклости $H_\sigma(\cdot)$ следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma(z) \ge \inf_{(x,y,\beta)} &\{G_\sigma(x) - \beta - H_\sigma(x) + H_\sigma(y) \mid x \in S,\ \ H_\sigma(y) = \beta - \zeta,\ G_\sigma(y) \le \beta\} \\ &= \inf_x \{F_\sigma(x) \mid x \in S\} - \zeta = \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) - F_\sigma(z). \end{aligned} \tag{7.6}$$

2) Теперь предположим, что неравенство (7.3) нарушено. Тогда с помощью (7.6) получаем

$$\eta(\zeta,\beta) - \nu \ge \theta\varphi_\sigma(z) \ge \theta[\mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) - F_\sigma(z)]. \tag{7.7}$$

Более того, согласно определению 7.1 из нарушения (7.3) вытекает нарушение (7.1), т. е. $\mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma) - F_\sigma(z) \ge (-\varepsilon)$, откуда с помощью (7.7) и неравенства (7.5) получаем

$$\eta(\zeta,\beta) \ge \nu - \theta\varepsilon \ge 0.$$

Это означает, что (7.2) также нарушено. Таким образом, лемма доказана. □

Теперь несколько слов о значении леммы 2.

Во-первых, она дает "условие согласования" $\nu \ge \theta\varepsilon$ между параметрами, где ε — это точность решения задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$, ν — точность исполнения неравенства (7.3) в определении 7.1 разрешающего множества. Более того, напомним, что неравенство (7.3) находится в полном согласии с правилом $(\mathcal{R}1)$–(4.1) теоретического метода, так что определение 7.1 находится в полном согласии с теоремой 2.

Во-вторых, с точки зрения численной реализации СГП1 лемма 2 позволяет следить только за значением $\eta_k := \eta(\zeta_k,\beta)$ (см. (7.2)), не обращая внимание на неравенство (7.3), которое будет выполнено, если $\eta_k < 0$. Но только при условии, что $\mathcal{R}(\zeta,\beta)$ — разрешающий набор. И это обязательно для каждой итерации СГП1, так что множество $\mathcal{R}_k := \mathcal{R}(\zeta_k,\beta_k)$ должно быть разрешающей коллекцией. Значение неравенства (7.4) выяснится ниже в доказательстве теоремы 4.

В этом случае будем называть схему СГП1 *схемой с разрешающим набором* или СГ$\mathcal{R}$П1. Поэтому следующее предположение для решения задачи $(\mathcal{P}_k) \triangleq (\mathcal{P}(\sigma_k))$ выглядит достаточно естественно.

$(\mathcal{AR})$: $\forall\varepsilon > 0\ \ \forall\tau > 0$ и для любого τ-критического вектора $z \in S$ в задаче $(\mathcal{P}_k)$, не являющегося ε-решением задачи $(\mathcal{P}_k)$, можно найти $\beta \in [\beta_-, \beta_+]$ такое, что

$$\forall(\delta,\nu,\theta)\colon\ \tau,\delta,\nu > 0, \quad 0 < \theta < 1, \quad \nu > \theta\varepsilon,$$

можно построить $(\varepsilon,\delta,\nu,\theta)$-разрешающую для $(\mathcal{P}_k)$ аппроксимацию $\mathcal{R}_k(\zeta,\beta)$, где $\zeta := F_k(z)$. □

Ниже увидим, что разрешающие аппроксимации играют определяющую роль в исследовании сходимости СГ$\mathcal{R}$П1. Тем не менее возникает естественный вопрос о существовании разрешающих коллекций или каких-либо их аналогов для задач $(\mathcal{P}_\sigma)$, когда исследуемый (текущий) вектор z не является приближенным решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$. Насколько известно, единственный позитивный ответ дан в теореме 2 из [15] (см. также [45]).

Таким образом, поиск разрешающей аппроксимации $\{y^1,\dots,y^N\}\subset\mathbb{R}^n$, $H_\sigma(v^i)=\beta-\zeta_k$, когда z не является ε-решением задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ (хотя наша главная цель — это задача $(\mathcal{P})$, а $(\mathcal{P}_\sigma)$ — лишь вспомогательная задача), будет теоретически обоснован на каждой итерации.

Итак, наложим следующие ограничения на числовые последовательности, участвующие в процессе:

$$(\mathcal{A}1):\quad \left.\begin{array}{l}\varepsilon_k,\tau_k,\delta_k,\nu_k,\omega_k>0,\quad 0<\theta\le\theta_k\le 1,\quad k=0,1,2,\dots,\\ \tau_k\downarrow 0,\quad \delta_k\ \downarrow 0,\quad \nu_k\downarrow 0,\quad \omega_k\downarrow 0\ (k\to\infty).\end{array}\right\}\tag{7.8}$$

Лемма 3. *Пусть существует верхняя грань σ_{up} для штрафного параметра $\sigma>0$ в* СГ$\mathcal{R}$П1

$$(\mathcal{A}_{up}):\qquad 0<\sigma_k\le\sigma_{up},\quad k=0,1,2,\dots.\tag{7.9}$$

Тогда существует число $\sigma_{**}>0$ такое, что

$$(\mathcal{A}2):\qquad \sigma_{**}=\lim_{k\to\infty}\sigma_k,\quad \sigma_{**}\ge\sigma_k,\quad k=0,1,2,\dots.\tag{7.10}$$

Доказательство. Из описания шагов 8 и 10 СГП1 следует, что $\sigma_{k+1}\ge\sigma_-:=\sigma_k$ или $\sigma_{k+1}\ge\sigma_-:=\max\{\sigma_k,\sigma_j\}$, откуда $\sigma_{k+1}\ge\sigma_k$. Поэтому утверждение леммы очевидно. $\square$

Ниже условие (7.10) будет также использовано в равносильной форме

$$(\mathcal{A}2):\qquad \sum_{k=0}^{\infty}(\sigma_{k+1}-\sigma_k)<\infty.\tag{7.11}$$

Введем следующие обозначения: $(\mathcal{P}_k):=(\mathcal{P}_{\sigma_k})$, $(\mathcal{P}_{**}):=(\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$,

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_k):=\mathcal{V}_k:=\inf_x\{F_k(x)\mid x\in S\},\quad \mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}):=\mathcal{V}_{**}:=\inf_x\{F_{**}(x)\mid x\in S\}.\tag{7.12}$$

Предложение 3. *Пусть числовая последовательность $\{F_k(z^k)\}$, сгенерированная* СГ$\mathcal{R}$П1, *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\lim_{k\to\infty}F_k(z^k)=\mathcal{V}_*,\tag{7.13}$$

$$(\mathcal{A}_W):\qquad W(x)\le C\quad\forall x\in S.\tag{7.14}$$

(i) *Тогда справедливо неравенство*

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**})\triangleq\inf_x\{F_{**}(x)\mid x\in S\}\le\mathcal{V}_*.\tag{7.15}$$

(ii) *Пусть дополнительно выполнено равенство*

$$\mathcal{V}_*=\lim_{k\to\infty}\mathcal{V}(\mathcal{P}_k).\tag{7.16}$$

Тогда последовательность векторов $\{z^k\}$ оказывается минимизирующей в задаче $(\mathcal{P}_{**})$: $\{z^k\}\in\mathcal{M}(\mathcal{P}_{**})$ и справедливы равенства

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**})\triangleq\mathcal{V}_{**}=\mathcal{V}_*\triangleq\lim_{k\to\infty}F_k(z^k).\tag{7.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Из определения $(\mathcal{P}_{**}) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$ с учетом (7.14) имеем

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) \triangleq \inf_x \{F_{**}(x) \mid x \in S\} \leq F_{**}(z^k) = f_0(z^k) + \sigma_k W(z^k) + (\sigma_{**} - \sigma_k) W(z^k)$$
$$\triangleq F_k(z^k) + (\sigma_{**} - \sigma_k) W(z^k) \leq F_k(z^k) + (\sigma_{**} - \sigma_k) C.$$

Отсюда с помощью (7.10) и (7.13) при $k \uparrow \infty$ следует (7.15).

(ii) С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$F_{**}(x) \triangleq f_0(x) + \sigma_{**} W(x) \geq f_0(x) + \sigma_k W(x) \triangleq F_k(x) \quad \forall x \in S,$$

поскольку $W(x) \geq 0$, $\sigma_{**} \geq \sigma_k$. Тогда сначала имеем $\forall x \in S$: $F_{**}(x) \geq \inf_v \{F_k(v) \mid v \in S\} \triangleq \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) \triangleq \mathcal{V}_k$, откуда вытекает, что $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{V}_{**} \triangleq \mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) \triangleq \inf_x \{F_{**}(x) \mid x \in S\} \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}_k).$$

Теперь с учетом равенств (7.13) и (7.16) при $k \uparrow \infty$ получаем

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) \geq \lim_{k\to\infty} \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) = \mathcal{V}_* \triangleq \lim_{k\to\infty} F_k(z^k).$$

Отсюда с помощью (7.15) окончательно имеем

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) = \mathcal{V}_* = \lim_{k\to\infty} \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) \triangleq \lim_{k\to\infty} F_k(z^k). \tag{7.18}$$

Наконец, нетрудно видеть, что $0 \leq \xi_k := F_{**}(z^k) - F_k(z^k) = (\sigma_{**} - \sigma_k) W(z^k) \leq (\sigma_{**} - \sigma_k) C$, откуда с помощью (7.10) выводим, что $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$.

Тогда в силу (7.18) получаем

$$\lim_{k\to\infty} F_{**}(z^k) = \lim_{k\to\infty} F_k(z^k) = \mathcal{V}_* = \mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}).$$

Последняя цепочка, в частности, и означает, что $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{**})$; это и требовалось показать. $\square$

Теперь все готово для доказательства основного результата работы.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* $(\mathcal{AR})$, $(\mathcal{A}_f)$–(1.2), $(\mathcal{A}1)$–(7.8), $(\mathcal{A}L)$–(6.9), $(\mathcal{A}_{lev})$–(6.10), $(\mathcal{A}_{up})$–(7.9), $(\mathcal{A}_W)$–(7.3), $(\mathcal{A}2)$–(7.10), *и "условие согласования" также выполнено*:

$(\mathcal{CC})$: $$\nu_k \geq \theta_k \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

(i) *Тогда последовательность* $\{z^k\}$, *сгенерированная схемой глобального разрешающего поиска* (СГ$\mathcal{R}$П1) *(т. е. с разрешающей аппроксимацией* $\mathcal{R}(\zeta_k, \beta_k)$ *на каждой итерации) оказывается минимизирующей в задаче* $(\mathcal{P}_{**}) := (\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$: $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{**})$.

(ii) *Более того, в случае замкнутости множества* S *любой предельный вектор* z_* *последовательности* $\{z^k\}$ *является глобальным решением задачи* $(\mathcal{P}_{**})$:

$$z_* \in Sol(\mathcal{P}_{**}), \quad \mathcal{V}_{**} = \mathcal{V}_* \stackrel{\triangle}{=} \lim_{k\to\infty} F_k(z^k). \tag{7.19}$$

(iii) *Наконец, если последовательность* $\{z^k\}$ *удовлетворяет "условию допустимости" (см.* (2.2))

$(\mathcal{FC})$: $$\lim_{k\to\infty} W(z^k) = 0,$$

то последовательность $\{z^k\}$ *оказывается минимизирующей в исходной задаче* $(\mathcal{P})$ *с ограничениями типа равенства и неравенства:* $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$. *Кроме того, любая предельная точка* z_* *последовательности* $\{z^k\}$ *является решением задачи* $(\mathcal{P})$: $z_* \in Sol(\mathcal{P})$, *а также справедливы равенства* (7.19) *и*

$$\mathcal{V}_{**} \triangleq \mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}).$$

Доказательство. Исследуем вначале сходимость СГ$\mathcal{R}$П1 без "условия допустимости" $(\mathcal{FC})$–(2.2).

(I) Начнем со случая, когда $\eta_k(\beta) \geq 0 \; \forall \beta \in [\beta_-, \beta_+] \; \forall k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда согласно шагу 10 СГ$\mathcal{R}$П1 имеем $x^{k+1} := z^k$, $\sigma_{k+1} \geq \sigma_- := \sigma_k$.

Далее, ввиду условия $(\mathcal{A}1)$–(7.8) и "условия согласования" (7.5), получаем

$$\nu_k \geq \theta_k \varepsilon_k \geq \theta \varepsilon_k > 0, \quad 1 \geq \theta_k \geq \theta > 0,$$

откуда вытекает, что $\varepsilon_k \downarrow 0$, поскольку $\nu_k \downarrow 0$.

С другой стороны, так как $\eta_k \geq 0$, из определения разрешающего множества следует, что

$$\mathcal{V}_k \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) \leq F_k(z^k) \leq \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) + \varepsilon_k,$$

откуда немедленно получаем цепочку

$$\limsup_{k\to\infty} \mathcal{V}_k \leq \liminf_{k\to\infty} F_k(z^k) \leq \limsup_{k\to\infty} F_k(z^k) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{V}_k.$$

Данная цепочка приводит к заключению о существовании числа $\mathcal{V}_*$ такого, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) = \mathcal{V}_* = \lim_{k\to\infty} F_k(z^k).$$

Последнее означает, что выполнены условия (7.13) и (7.16) предложения 3, откуда следует, что последовательность $\{z^k\}$ оказывается минимизирующей в задаче $(\mathcal{P}_{**})$: $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{**})$ и справедливы условия (7.19), это и требовалось.

(II) (A) Теперь рассмотрим случай, когда $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ (т. е. на каждой итерации СГ$\mathcal{R}$П1) можно отыскать число $\beta_k \in [\beta_-, \beta_+]$, для которого

$$\eta_k := \eta(\zeta_k, \beta_k) < 0, \quad \zeta_k \stackrel{\triangle}{=} F_k(z^k) \stackrel{\triangle}{=} F_{\sigma_k}(z^k).$$

Тогда вектор $z^{k+1} \in S$ является приближенно критической точкой, полученной на шаге 1 СГ$\mathcal{R}$П1 посредством специального МЛП вместе со штрафным параметром

$$\sigma_{k+1} \geq \sigma_- \stackrel{\triangle}{=} \max\{\sigma_k, \sigma_{j_k}\}, \quad j_k \in I_k = I_k(\beta_k), \quad F_{k+1}(z^{k+1}) \leq F_{k+1}(x^{k+1}).$$

Напомним, что специальный МЛП стартует из точки $x^{k+1} := u^{j_k}$ вместе с параметром штрафа $\sigma_- := \max\{\sigma_k, \sigma_{j_k}\}, j_k \in I_k(\beta_k)$ (см. (6.1), (6.3), (6.5)–(6.8)), и, кроме того,

$$0 > \eta_k := \eta(\zeta_k, \beta_k) := G_k(x^{k+1}) - \beta_k - \langle \nabla H_k(w^{j_k}), x^{k+1} - w^{j_k} \rangle$$

при $H_k(w^{j_k}) = \beta_k - \zeta_k$, $\zeta_k \stackrel{\triangle}{=} F_k(z^k)$. Откуда, используя выпуклость $H_k(\cdot)$ и последнее уравнение, получаем

$$0 > \eta_k \geq G_k(x^{k+1}) - \beta_k - H_k(x^{k+1}) + H_k(w^{j_k}) = F_k(x^{k+1}) - \zeta_k \stackrel{\triangle}{=} F_k(x^{k+1}) - F_k(z^k). \tag{7.20}$$

Итак, по построению имеем, что

$$(a)\; F_k(z^k) > F_k(x^{k+1}); \qquad (b)\; F_{k+1}(x^{k+1}) \geq F_{k+1}(z^{k+1}).$$

(B) Далее, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} F_k(z^k) > F_k(x^{k+1}) &\stackrel{\triangle}{=} f_0(x^{k+1}) + \sigma_{k+1} W(x^{k+1}) + (\sigma_k - \sigma_{k+1}) W(x^{k+1}) \\ &= F_{k+1}(x^{k+1}) - \gamma_k \geq F_{k+1}(z^{k+1}) - \gamma_k, \end{aligned} \tag{7.21}$$

где

$$\gamma_k := (\sigma_{k+1} - \sigma_k)W(x^{k+1}) \geq 0. \tag{7.22}$$

Таким образом, из (7.21) выводим, что

$$F_{k+1}(z^{k+1}) < F_k(z^k) + \gamma_k. \tag{7.23}$$

Более того, так как $W(x) \leq C \forall x \in S, \gamma_k \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ с помощью условий (7.9) и (7.12) заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) < \infty.$$

Кроме того, поскольку $0 \leq \gamma_k \leq C(\sigma_{k+1} - \sigma_k)$, имеем

$$0 \leq \liminf_{k \to \infty} \gamma_k \leq \limsup_{k \to \infty} \gamma_k \leq C \lim_{k \to \infty} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) = 0,$$

откуда

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_k = 0. \tag{7.24}$$

Таким образом, условия (7.23), (7.11) и (7.24) означают, что числовая последовательность $\{a_k := F_k(z^k)\}$ является “почти” монотонно невозрастающей, и поэтому в силу леммы 2.6.2 из [1] (см. гл. 2) существует конечный предел

$$\mathcal{V}_* := \lim_{k \to \infty} a_k \overset{\triangle}{=} \lim_{k \to \infty} F_k(z^k) > -\infty. \tag{7.25}$$

Тогда из цепочки (7.21) с учетом (7.25) следует

$$\mathcal{V}_* \overset{\triangle}{=} \lim_{k \to \infty} F_k(z^k) = \lim_{k \to \infty} F_k(x^{k+1}) = \lim_{k \to \infty} F_{k+1}(z^{k+1}). \tag{7.26}$$

Более того, из цепочки (7.20) в силу (7.26) получаем, что $\eta_k \uparrow 0$ $(k \uparrow \infty)$ или

$$\lim_{k \to \infty} \eta_k = 0. \tag{7.27}$$

(C) Теперь напомним, что аппроксимация $\mathcal{R}_k \triangleq \mathcal{R}(\zeta_k, \beta_k) \triangleq \mathcal{A}_k(\beta_k)$, сконструированная на шагах 2 и 3 СГ$\mathcal{R}$П1, является $(\varepsilon_k, \delta_k, \nu_k, \theta_k)$-разрешающим множеством для задачи $(\mathcal{P}_k) = (\mathcal{P}_{\sigma_k})$. Поэтому ввиду леммы 2 неравенство $\eta_k < 0$ влечет за собой следующую цепочку:

$$\eta_k < \theta_k \varphi_k(z^k) + \nu_k \leq \theta \varphi_k(z^k) + \nu_k \leq \nu_k, \tag{7.28}$$

поскольку $\varphi_k(z) \leq 0\ \ \forall z \in S,\ \ 0 < \theta \leq \theta_k < 1$. Из цепочки (7.28) с учетом (7.27) вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(z^k) = 0.$$

Однако это равенство не является необходимым условием того, что последовательность $\{z^k\}$ минимизирующая в какой-либо задаче $(\mathcal{P}_\sigma),\ \ \sigma > 0$.

Кроме того, из определения разрешающей аппроксимации следует, что вектор $x^{k+1} \triangleq u^{j_k}$ является (см. (7.4)) ε_k-решением задачи $(\mathcal{P}_k)$:

$$F_k(x^{k+1}) \leq \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) + \varepsilon_k. \tag{7.29}$$

Тогда с помощью (7.21) получаем $F_{k+1}(z^{k+1}) - \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) \leq \varepsilon_k + \gamma_k$, где $\gamma_k \geq 0$ определено в (7.22) и (7.24). Теперь, используя представление $F_{k+1}(z^{k+1}) = F_k(z^{k+1}) + (\sigma_{k+1} - \sigma_k)W(z^{k+1})$, из последнего неравенства получаем

$$\varepsilon_k + \gamma_k \geq F_{k+1}(z^{k+1}) - \mathcal{V}(\mathcal{P}_k) = [F_k(z^{k+1}) - \mathcal{V}(\mathcal{P}_k)] + (\sigma_{k+1} - \sigma_k)W(z^{k+1}) \geq 0. \tag{7.30}$$

При этом справедливость правого неравенства в (7.30) очевидна, так как (см. (7.10))

$$[F_k(z^{k+1}) - \mathcal{V}(\mathcal{P}_k)] \geq 0, \quad (\sigma_{k+1} - \sigma_k)W(z^{k+1}) \geq 0.$$

Тогда из (7.30) при $k \uparrow \infty$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}[F_{k+1}(z^{k+1}) - \mathcal{V}(\mathcal{P}_k)] = 0$, и поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} F_{k+1}(z^{k+1}) = \mathcal{V}_*$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} F_{k+1}(z^{k+1}) = \mathcal{V}_* = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{V}(\mathcal{P}_k)$. Это означает, что наряду с условием (7.13) имеет место и условие (7.16). Поэтому согласно предложению 3 последовательность $\{z^k\}$ оказывается минимизирующей для задачи $(\mathcal{P}_{**}) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$, что и требовалось показать.

(III) В общем случае числовая последовательность $\{\eta_k\}$ распадается на две подпоследовательности $\{\eta_p\}$ и $\{\eta_q\}$посредством двух неравенств: $\eta_p \geq 0$ и $\eta_q < 0$, где $\{p\} \cup \{q\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогда и последовательность $\{z^k\}$ может быть декомпозирована на две подпоследовательности $\{z^p\}$ и $\{z^q\}$, каждая из которых оказывается минимизирующей согласно частям (I) и (II) доказательства соответственно. Поэтому ясно, что последовательность $\{z^k\} = \{z^p\} \cup \{z^q\}$ также является минимизирующей для задачи $(\mathcal{P}_{**})$: $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{**})$.

Утверждение (ii) теоремы 4 очевидно.

При доказательстве п. (iii) теоремы нетрудно видеть, что все условия леммы 1 выполнены, т. е. $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_{**})$ и

$$(\mathcal{FC}): \qquad \lim_{k\to\infty} W(z^k) = 0.$$

Тогда согласно утверждению леммы 1 $\{z^k\} \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) = \mathcal{V}(\mathcal{P})$, что и требовалось показать. При этом значение $\sigma_{**} > 0$ по определению превосходит или равняется пороговому (точному) значению $\sigma_{th} > 0$ штрафного параметра σ: $\sigma_{**} \geq \sigma_{th}$.

Доказательство теоремы полностью завершено. □

З а м е ч а н и е 7.1. Из описания СГ$\mathcal{R}$П1 и доказательства теоремы 4 вытекает, что в качестве критериев останова вычислительного процесса могут быть использованы следующие неравенства:

$$\sigma_{k+1} - \sigma_k \leq \nu_k, \quad F_k(z^k) - F_{k+1}(z^{k+1}) \leq \varepsilon_k, \quad 0 \geq \eta_k = \eta(\zeta_k, \beta_k) \geq -\varepsilon_k, \quad W(z^k) \leq \omega_k.$$

Тем не менее нетрудно заметить, что неравенство (7.29) играет решающую роль в доказательстве части (II) теоремы 4. Смысл (7.29) достаточно прозрачен: необходимо решать текущие задачи $(\mathcal{P}_k)$ со всевозрастающей точностью ε_k: $\varepsilon_k \downarrow 0$. При этом все параметры счета должны быть согласованы, например так, как в [12]: $\nu_k \geq \theta_k \varepsilon_k$, $2\delta_s \leq \tau_k$, $\nu_k \geq 2\delta_k$ и т. д.

З а м е ч а н и е 7.2. Теорема 4 ответила на ранее поставленные вопросы (см. замечание 6.3): при естественных, неограничительных предположениях вычислительный процесс сходится не для одной вспомогательной задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$, $\sigma > 0$ (как было ранее [16]), а для последовательности задач $(\mathcal{P}_k) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_k})$, конструируя при этом минимизирующую последовательность для предельной задачи $(\mathcal{P}_{**}) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$, $\sigma_{**} = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$.

При этом параметр штрафа σ_{**} оказывается "точным", поскольку $\sigma_{**} \geq \sigma_{th}$, т. е. превышающем или равным пороговому значению $\sigma_{th} > 0$, поскольку $\mathcal{V}(\mathcal{P}_{**}) = \mathcal{V}(\mathcal{P})$, так что задачи $(\mathcal{P}_{**})$ и $(\mathcal{P})$ являются эквивалентными в этом смысле [5; 6; 11; 17–21; 44; 47–50].

Далее, "нагруженный" локальный поиск "выдает", по-видимому, приближенно локальное точное значение параметра штрафа, поскольку z^k приближенно допустима в $(\mathcal{P})$ $(W(z^k) \geq \omega_k)$. Таким образом, сконструирована теоретическая СГП, где локальный поиск и процедуры глобального поиска работают согласованно, в едином вычислительном процессе. Вычислительные эксперименты подтвердили эффективность СГ$\mathcal{R}$П1 на квадратичных невыпуклых задачах небольшой ($\leq$ 10) и средней ($\leq$ 50) размерностях, а также других, ранее проведенных исследованиях [12–14; 39; 42; 46].

Заключение

Ясно, что проведенные выше исследования направлены на разработку новой схемы вычисления глобального решения в очень трудной невыпуклой задаче $(\mathcal{P})$ с DC ограничениями типа равенства и неравенства. Более точно, цель заключена в доказательстве сходимости новой СГП. При этом используется сведение исходной задачи $(\mathcal{P})$ к задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$ без ограничений посредством ТТШ, впервые открытой И. И. Ереминым в 1966 г. [5; 6]. С этой целью новая целевая функция задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ также представлена в виде DC функции, что позволяет получить необходимые и достаточные условия для минимизирующих последовательностей в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$, разработать специальный (теоретический) метод решения оштрафованной задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ и доказать, что последовательность, сгенерированная данным методом, является минимизирующей в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Далее в работе представлены необходимые результаты по специальному МЛП, идея которого заключена в последовательном решении задач, линеаризованных по базовой невыпуклости задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$, и восходит к Куранту (но называется обычно DCA [30; 31]).

На построенной основе разработана СГП с разрешающими множествами на каждой итерации (СГ$\mathcal{R}$П1), генерирующая последовательность $\{z^k\}$, которая оказывается минимизирующей в предельной оштрафованной задаче $(\mathcal{P}_{**}) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_{**}})$, $\sigma_{**} = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k$. При этом каждый терм z^{k+1} этой последовательности является τ_{k+1}-критической точкой МЛП и, одновременно, ε_k-решением текущей задачи $(\mathcal{P}_k) \triangleq (\mathcal{P}_{\sigma_k})$. Более того, при использовании “условия допустимости”: $\lim\limits_{k\to\infty} W(z^k) = 0$, последовательность $\{z^k\}$ оказывается минимизирующей в исходной задаче $(\mathcal{P})$ с DC ограничениями, что и было главной целью работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.; 433 с.
2. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа: теория и приложения. М.: Изд-во “Институт компьютерных исследований”, 2005. 199 с.
3. **Демьянов В.Ф.** Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 336 с.
4. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
5. **Еремин И.И.** Метод “штрафов” в выпуклом программировании // Докл. АН. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
6. **Еремин И.И.** О методе штрафов в выпуклом программировании // Кибернетика. 1967. № 4. С. 63–67.
7. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Физматлит, 1976. 192 с.
8. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 288 с.
9. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
10. **Жадан В.Г.** Методы оптимизации: ч. I, II. М.: МФТИ, 2015. 270 с.; 320 с.
11. **Коннов И.В.** Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. 508 с.
12. **Стрекаловский А.С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
13. **Стрекаловский А.С., Орлов А.В.** Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
14. **Стрекаловский А.С., Орлов А.В.** Линейные и квадратично-линейные задачи двухуровневой оптимизации. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 262 с.
15. **Стрекаловский А.С.** Новые условия глобальной оптимальности в задаче с d.c. ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, №1. С. 245–261. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-245-261
16. **Стрекаловский А.С.** Элементы глобального поиска в общей задаче d.c. оптимизации // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2021. Т. 196. С. 114–127. doi: 10.36535/0233-6723-2021-196-114-127

17. **Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.** Курс методов оптимизации : уч. пособие. 2-е изд. М.: Физматлит, 2011. 384 с.
18. **Bonnans J.-F., Gilbert J.C., Lemaréchal C., Sagastizábal C.A.** Numerical optimization: Theoretical and practical aspects. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 494 p.
19. **Burke J.** An exact penalization viewpoint of constrained optimization // SIAM J. Control Optim. 1991. Vol. 29, no. 4. P. 968–998. doi: 10.1137/0329054
20. **Byrd R., Lopez-Calva G., Nocedal J.** A line search exact penalty method using steering rules // Math. Progr. Ser. A. 2012. Vol. 133, no. 1–2. P. 39–73. doi: 10.1007/s10107-010-0408-0
21. **Di Pillo G., Lucidi S., Rinaldi F.** An approach to constrained global optimization based on exact penalty functions // J. Global Optim. 2012. Vol. 54, no. 2. P. 251–260. doi: 10.1007/s10898-010-9582-0
22. **Dur M., Hiriart-Urruty J.B.** Testing copositivity with the help of difference-of-convex optimization // Math. Program. Ser. B. 2013. Vol. 140, no. 1. P. 31–43. doi: 10.1007/s10107-012-0625-9
23. **Floudas C.A., Pardalos P.M.** (eds.) Frontiers in global optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004. 604 p.
24. **Fiacco A.V., McCormick G.P.** Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques. NY: John Wiley, 1968. 210 p.
25. **Gaudioso M., Gruzdeva T.V., Strekalovsky A.S.** On numerical solving the spherical separability problem // J. Global Optim. 2016. Vol. 66, no. 1. P. 21–34. doi: 10.1007/s10898-015-0319-y
26. **Hiriart-Urruty J.-B.** Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with difference of convex functions // Convexity and Duality in Optimization / ed. J. Ponstein. Ser. Lecture Notes in Economics and Math. Systems, vol. 256. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 37–69. doi: 10.1007/978-3-642-45610-7_3
27. **Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C.** Convex analysis and minimization algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 418 p.
28. **Horst R., Tuy H.** Global optimization. Deterministic approaches. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 730 p.
29. **Kruger A.** Error bounds and metric subregularity // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 1. P. 49–79. doi: 10.1080/02331934.2014.938074
30. **Le Thi H.A., Pham Dinh T., Van Ngai H.** Exact penalty and error bounds in DC programming // J. Global Optim. 2012. Vol. 52, no. 3. P. 509–535. doi: 10.1007/s10898-011-9765-3
31. **Le Thi H.A., Huynh V.N., Dinh T.P.** DC Programming and DCA for general DC programs // Advanced computational methods for knowledge engineering / eds. van T. Do, H. Thi, N. Nguyen. Ser. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 282. Cham: Springer, 2014. P. 15–35. doi: 10.1007/978-3-319-06569-4_2
32. **Mascarenhas W.** The BFGS methods with exact line search fails for nonconvex objective functions // Math. Program. Ser. A. 2004. Vol. 99, no. 1. P. 49–61. doi: 10.1007/s10107-003-0421-7
33. **Mascarenhas W.** On the divergence of line search methods // Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 26, no. 1. P. 129–169. doi: 10.1590/S0101-82052007000100006
34. **Mascarenhas W.** Newton's iterates can converge to non-stationary points // Math. Program. 2008. Vol. 112, no. 2. P. 327–334. doi: 10.1007/s10107-006-0019-y
35. **Nocedal J., Wright S.J.** Numerical optimization. NY: Springer, 2006. 634 p.
36. **Pang J.S.** Three modelling paradigms in mathematical programming // Math. Program. Ser. B. 2010. Vol. 125, no. 2. P. 297–323. doi: 10.1007/s10107-010-0395-1
37. **Pang J.S., Razaviyan M., Alvarado A.** Computing B-stationary points of nonsmooth DC programs // Math. Oper. Res. 2016. Vol. 42, no. 1. P. 95–118. doi: 10.1287/moor.2016.0795
38. **Rockafellar R.T.** Convex Analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. 472 p.
39. **Strekalovsky A.S.** On solving optimization problems with hidden nonconvex structures // Optimization in science and engineering / eds. T.M. Rassias, C.A. Floudas, S. Butenko. NY: Springer, 2014. P. 465–502. doi: 10.1007/978-1-4939-0808-0_23
40. **Strekalovsky A.S.** On local search in d.c. optimization problems // Appl. Math. Comput. 2015. Vol. 255. P. 73–83. doi: 10.1016/j.amc.2014.08.092
41. **Strekalovsky A.S.** Local search for nonsmooth DC optimization with DC equality and inequality // Constraints Numerical Nonsmooth Optimization: State of the Art Algorithms / eds. A.M. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa, M.M. Makela, S. Taheri. NY: Springer Internat. Publ., 2020. P. 229–261. doi: 10.1007/978-3-030-34910-3_7
42. **Strekalovsky A.S., Minarchenko I.M.** A local search method for optimization problem with d.c. inequality constraints // Appl. Math. Model. 2018. Vol. 58. P. 229–244. doi: 10.1016/j.apm.2017.07.031

43. **Strekalovsky A.S.** Global optimality conditions in nonconvex optimization // J. Optim. Theory Appl. 2017. Vol. 173, no. 3. P. 770–792. doi: 10.1007/s10957-016-0998-7
44. **Strekalovsky A.S.** Global optimality conditions and exact penalization // Optim. Letters. 2019. Vol. 13, no. 3. P. 597–615. doi: 10.1007/s11590-017-1214-x
45. **Strekalovsky A.S.**On global optimality conditions for D.C. minimization problems with D.C. constraints // J. Appl. Numer. Optim. 2021. Vol. 3, no. 1. P. 175–196. doi: 10.23952/jano.3.2021.1.10
46. **Strekalovsky A.S., Yanulevich M.V.** On global search in nonconvex optimal control problems // J. Global Optim. 2016. Vol. 65, no. 1. P. 119–135. doi: 10.1007/s10898-015-0321-4
47. **Tuy H.** D.C. Optimization: Theory, methods and algorithms // Handbook of Global Optimization / eds. R. Horst and P. M. Pardalos. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 149–216.
48. **Zangwill W.** Non-linear programming via penalty functions // Management Science. Ser. A. 1967. Vol. 13, no. 5. P. 344–358. doi: 10.1287/mnsc.13.5.344
49. **Zangwill W.** Nonlinear programming: a unified approach. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969. 356 p.
50. **Zaslavski A.J.** Exact penalty property in optimization with mixed constraints via variational analysis // SIAM J. Optim. 2013. Vol. 23, no. 1. P. 170–187. doi: 10.1137/120870840

Поступила 28.04.2023
После доработки 1.06.2023
Принята к публикации 5.06.2023

Стрекаловский Александр Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделением
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
e-mail: strekal@icc.ru

REFERENCES

1. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Moscow Centre of Continuous Math. Education Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9.
2. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and Applications.* Berlin, NY, Walter de Gruyter, 2009, 155 p. ISBN: 3110218186. Original Russian text was published in Vasin V.V., Eremin I.I., *Operatory i iteratsionnye protsessy feierovskogo tipa*, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics Publ., 2005, 200 p. ISBN: 5-93972-427-2.
3. Dem'yanov V.F. *Usloviya ekstremuma i variatsionnoe ischislenie* [Extremum conditions and calculus of variations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2005, 336 p. ISBN: 5-06-004751-2.
4. Evtushenko Yu.G. *Numerical optimization techniques.* NY, Springer-Verlag, 1985, 562 p. ISBN: 978-1-4612-9530-3. Original Russian text published in Evtushenko Yu. G., *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primenenie v sistemakh optimizatsii*, Moscow, Nauka Publ., 1982, 432 p.
5. Eremin I.I. The “penalty” method in convex programming. *Soviet Math. Dokl.*, 1967, vol. 8, p. 459–462.
6. Eremin I.I. The penalty method in convex programming. *Cybernetics*, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 53–56. doi: 10.1007/bf01071708
7. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 192 p.
8. Eremin I.I., Mazurov V.D. *Nestatsionarnye protsessy matematicheskogo programmirovaniya* [Nonstationary processes of mathematical programming]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.
9. Eremin I.I. *Protivorechivye modeli optimal'nogo planirovaniya* [Contradictory models of optimal planning]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 160 p. ISBN: 5-02-013773-1.
10. Zhadan V.G. *Metody optimizatsii* [Optimization methods], part I, part II. Moscow, Moscow Phys. Tech. Inst. Publ., 2015, I: 270 p., II: 320 p. ISBN: 978-5-7417-0516-2.
11. Konnov I.V. *Nelineinaya optimizatsiya i variatsionnye neravenstva* [Nonlinear optimization and variational inequalities]. Kazan, Kazan Univ. Publ., 2013, 508 p. ISBN 978-5-00019-059-3.
12. Strekalovskii A.S. *Elementy nevypukloi optimizatsii* [Elements of non-convex optimization]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 356 p. ISBN 5-02-032064-1.

13. Strekalovskii A.S., Orlov A.V. *Bimatrichnye igry i bilineinoe programmirovanie* [Bimatrix games and bilinear programming], Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. ISBN 978-5-9221-0853-9.
14. Strekalovskii A.S., Orlov A.V. *Lineinye i kvadratichno-lineinye zadachi dvukhurovnevoi optimizatsii* [Linear and quadratic linear problems of two-level optimization], Novosibirsk, Syberian Branch of Russian Akad. Sci., 2019. ISBN: 978-5-6042856-2-6.
15. Strekalovskii A.S. New global optimality conditions in a problem with d.c. constraints. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 245–261 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-245-261
16. Strekalovsky A.S. Elements of global search in the general d.c. optimization problem. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2021, vol. 196, pp. 114–127 (in Russian). doi: 10.36535/0233-6723-2021-196-114-127
17. Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V. *Kurs metodov optimizatsii : uchebnoe posobie* [Course of optimization methods : a tutorial], Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 384 p. ISBN: 978-5-9221-0559-0.
18. Bonnans J.-F., Gilbert J.C., Lemaréchal C., Sagastizábal C.A. *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2006, 494 p. ISBN: 3-540-35445-X.
19. Burke J. An exact penalization viewpoint of constrained optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 1991, vol. 29, no. 4, pp. 968–998. doi: 10.1137/0329054
20. Byrd R., Lopez-Calva G., Nocedal J. A line search exact penalty method using steering rules. *Math. Progr., Ser. A*, 2012, vol. 133, no. 1–2, pp. 39–73. doi: 10.1007/s10107-010-0408-0
21. Di Pillo G., Lucidi S., Rinaldi F. An approach to constrained global optimization based on exact penalty functions. *J. Global Optim.*, 2012, vol. 54, no. 2, pp. 251–260. doi: 10.1007/s10898-010-9582-0
22. Dur M., Hiriart-Urruty J.B. Testing copositivity with the help of difference-of-convex optimization. *Math. Progr., Ser. B*, 2013, vol. 140, no. 1, pp. 31–43. doi: 10.1007/s10107-012-0625-9
23. Floudas C.A., Pardalos P. M. (eds.): *Frontiers in global optimization.* Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2004, 604 p. ISBN: 978-1402076992.
24. Fiacco A.V., McCormick G.P. *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques.* NY, John Wiley, 1968, 210 p. doi: 10.1137/1.9781611971316. Translated to Russian under the title *Nelineinoe programmirovanie. Metody posledovatel'noi bezuslovnoi minimizatsii*, Moscow, Mir Publ., 1972.
25. Gaudioso M., Gruzdeva T.V., Strekalovsky A.S. On numerical solving the spherical separability problem. *J. Global Optim.*, 2016, vol. 66, no. 1, pp. 21–34. doi: 10.1007/s10898-015-0319-y
26. Hiriart-Urruty J.-B. *Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with differences of convex functions.* In: *Convexity and Duality in Optimization*, ed. J. Ponstein, Ser. Lecture Notes in Economics and Math. Systems, vol. 256, Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp. 37–69. doi: 10.1007/978-3-642-45610-7_3
27. Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C. *Convex analysis and minimization algorithms.* Berlin: Springer-Verlag, 1993. Part I, 418 p. doi: 10.1007/978-3-662-02796-7. Part II, 348 p. doi: 10.1007/978-3-662-06409-2.
28. Horst R., Tuy H. *Global Optimization. Deterministic Approaches.* Berlin, Springer-Verlag, 1993, 730 p. ISBN: 9780387560946.
29. Kruger A. Error bounds and metric subregularity. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 1, pp. 49–79. doi: 10.1080/02331934.2014.938074
30. Le Thi H.A., Pham Dinh T., Van Ngai H. Exact penalty and error bounds in DC programming. *J. Global Optim.*, 2012, vol. 52, no. 3, pp. 509–535. doi: 10.1007/s10898-011-9765-3
31. Thi H.A., Huynh V.N., Dinh T.P. DC programming and DCA for general DC programs. In: *Advanced computational methods for knowledge engineering* / eds. van T. Do, H. Thi, Nguyen, Ser. Advances in intelligent systems and computing, Cham, Springer, 2014, vol. 282, pp. 15–35. doi: 10.1007/978-3-319-06569-4_2
32. Mascarenhas W. The BFGS methods with exact line search fails for nonconvex objective functions. *Math. Program., Ser. A*, 2004, vol. 99, no. 1, pp. 49–61. doi: 10.1007/s10107-003-0421-7
33. Mascarenhas W. On the divergence of line search methods. *Comput. Appl. Math.*, 2007, vol. 26, no. 1, pp. 129–169. doi: 10.1590/S0101-82052007000100006
34. Mascarenhas W. Newton's iterates can converge to non-stationary points. *Math. Program.*, 2008, vol. 112, no. 2, pp. 327–334. doi: 10.1007/s10107-006-0019-y
35. Nocedal J., Wright S.J. *Numerical Optimization.* NY, Springer, 2006, 634 p. doi: 10.1007/978-0-387-40065-5

36. Pang J.S. Three modelling paradigms in mathematical programming. *Math. Program., Ser. B*, 2010, vol. 125, no. 2, pp. 297–323. doi: 10.1007/s10107-010-0395-1
37. Pang J.S., Razaviyayn M., Alvarado A. Computing B-stationary points of nonsmooth DC programs. *Math. Oper. Res.*, 2017, vol. 42, no. 1, pp. 95–118. doi: 10.1287/moor.2016.0795
38. Rockafellar R.T. *Convex Analysis.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1970, 451 pp. ISBN: 9780691080697. Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1973, 471 pp.
39. Strekalovsky A.S. On solving optimization problems with hidden nonconvex structures. In: *Optimization in science and engineering*, eds. T.M. Rassias., C.A. Floudas, S. Butenko, NY, Springer, 2014, pp. 465–502. doi: 10.1007/978-1-4939-0808-0_23
40. Strekalovsky A.S. On local search in d.c. optimization problems. *Appl. Math. Comput.*, 2015, vol. 255, pp. 73–83. doi: 10.1016/j.amc.2014.08.092
41. Strekalovsky A.S. Local search for nonsmooth DC optimization with DC equality and inequality constraints. In: *Numerical nonsmooth optimization: state of the art algorithms*, eds. A.M. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa, M.M. Makela, S. Taheri. Cham, Springer, 2020, pp. 229–261. doi: 10.1007/978-3-030-34910-3_7
42. Strekalovsky A.S., Minarchenko I.M. A local search method for optimization problem with d.c. inequality constraints. *Appl. Math. Model.*, 2018, vol. 58, pp. 229–244. doi: 10.1016/j.apm.2017.07.031
43. Strekalovsky A.S. Global optimality conditions in nonconvex optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 2017, vol. 173, no. 3, pp. 770–792. doi: 10.1007/s10957-016-0998-7
44. Strekalovsky A.S. Global optimality conditions and exact penalization. *Optim. Letters*, 2019, vol. 13, no. 3, pp. 597–615. doi: 10.1007/s11590-017-1214-x
45. Strekalovsky A.S. On global optimality conditions for D.C. minimization problems with D.C. constraints. *J. Appl. Numer. Optim.*, 2021, vol. 3, no. 1, pp. 175–196. doi: 10.23952/jano.3.2021.1.10
46. Strekalovsky A.S., Yanulevich M.V. On global search in nonconvex optimal control problems. *J. Global Optim.*, 2016, vol. 65, no. 1, pp. 119–135. doi: 10.1007/s10898-015-0321-4
47. Tuy H. D.C. optimization: Theory, methods and algorithms. In: *Handbook of global optimization*, eds. R. Horst and P. M. Pardalos, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1995, pp. 149–216. doi: 10.1007/978-1-4615-2025-2_4
48. Zangwill W. Non-linear programming via penalty functions. *Management Science*, 1967, vol. 13, no. 5, ser. A, pp. 344–358. doi: 10.1287/mnsc.13.5.344
49. Zangwill W. *Nonlinear programming: a unified approach.* Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969, 356 p. ISBN: 978-0136235798. Translated to Russian under the title *Nelineinoe programmirovanie: edinyi podkhod*, Moscow, Soviet Radio Publ., 1973.
50. Zaslavski A. J. Exact penalty property in optimization with mixed constraints via variational analysis. *SIAM J. Optim.*, 2013, vol. 23, no. 1, pp. 170–187. doi: 10.1137/120870840

Received April 28, 2023
Revised June 1, 2023
Accepted June 5, 2023

Funding Agency: The research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the project “Theoretical foundations, methods, and high-performance algorithms for continuous and discrete optimization to support interdisciplinary research” (no. of state registration 121041300065-9, project code FWEW-2021-0003).

Aleksandr Sergeevich Strekalovsky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: strekal@icc.ru .

Cite this article as: A. S. Strekalovsky. Minimizing sequences in a constrained DC optimization problem. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 185–209 .