ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.853

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КВАЗИРЕШЕНИЙ[1]

В. Д. Скарин

Работа продолжает исследования автора по построению возможных аппроксимаций для несобственных задач выпуклого программирования (НЗ ВП). В качестве базовой модели коррекции НЗ определена проблема минимизации целевой функции исходной задачи на множестве точек минимума чебышевской нормы невязки ограничений. Для этой постановки применяется один из классических методов регуляризации некорректных экстремальных задач — метод квазирешений. В основу данного метода положен переход к некоторой задаче безусловной минимизации путем агрегации функций ограничений исходной задачи. Для этой цели используется одна из модификаций метода штрафных функций, а именно метод обобщенной обратной барьерной функции. Такой подход представляется перспективным с точки зрения численной реализации метода квазирешений. В работе формулируются условия сходимости предлагаемого метода, в том числе в случае неточного задания исходных данных. При этом особое внимание уделяется определению величины оптимальной коррекции ограничений анализируемой НЗ ВП, а также нахождению оптимального значения параметра регуляризации в методе квазирешений.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод квазирешений, методы барьерных функций.

V. D. Skarin. On the optimal correction of improper convex programming problems based on the method of quasi-solutions.

The work continues the author's research on the construction of possible approximations for improper problems of convex programming. The problem of minimizing the objective function of the original problem on the set of minimum points of the Chebyshev norm of the constraint discrepancy is defined as a basic model for correcting an improper problem. For this setting, one of the classical methods of regularization of ill-posed extremal problems is used, namely, the method of quasi-solutions. This method is based on the transition to a problem of unconstrained minimization by aggregation of the constraint function of the original problem. For this purpose, a modification of the penalty function method is used, namely, the generalized inverse barrier function method. This approach seems to be promising from the point of view of the numerical implementation of the quasi-solution method. Convergence conditions are formulated for the proposed method, including the case where the input data are given inaccurately. Special attention is paid to finding the value of optimal correction of the constraints in the improper problem of convex programming under study and to calculating the optimal value of the regularization parameter in the method of quasi-solutions.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, method of quasi-solutions, barrier function methods.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-168-184

Введение

В начале 1980-х г. академик И. И. Еремин ввел в рассмотрение новый класс "несобственных задач математического программирования (НЗ МП)" (см. [1; 2]). В такой класс вошли задачи с особенностями, которые не имеют решений в обычном смысле этого понятия. Типичными представителями НЗ МП стали постановки с противоречивой системой ограничений. Подобные задачи являются обычными при математическом моделировании процессов принятия

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

решений в различных сферах человеческой деятельности. В практике построения экономико-математических моделей причинами появления несовместности в системах ограничений могут быть дефицит ресурсов, завышенные требования к качеству решений, многокритериальность постановок, необходимость учета экологических факторов и т. п. Часто несовместность возникает вследствие неточности исходной информации о моделируемой системе.

Несобственные задачи в силу своего распространения и значения для теории и практики методов оптимизации являются важным объектом научного исследования. Вначале для устранения противоречивых ограничений производится коррекция задачи. В процессе коррекции данная НЗ МП погружается в параметрическое семейство разрешимых задач МП, и в этом семействе отыскивается оптимальная относительно значения параметра модель (оптимальная коррекция). Решение найденной задачи принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение исходной НЗ.

Анализ НЗ МП существенно зависит от точности задания информации, описывающей постановку задачи. В свою очередь математические модели с возмущенными входными данными являются объектом развитой теории неустойчивых (некорректных) задач оптимизации. Поэтому при исследовании НЗ МП могут быть привлечены идеи стандартных методов регуляризации некорректных экстремальных задач, таких как метод Тихонова, методы невязки и квазирешений (см. [3; 4]). Из публикаций отечественных и зарубежных авторов, в которых те или иные методы регуляризации применялись при анализе несобственных задач оптимизации, можно отметить работы [5–7]. В настоящей статье при построении алгоритмов нахождения обобщенного решения НЗ выпуклого программирования (ВП) используется структура метода квазирешений.

Первый шаг в реализации метода квазирешений (как, впрочем, и других методов регуляризации) заключается в переходе от исходной постановки НЗ ВП к задаче безусловной параметрической оптимизации, обычно с помощью некоторой модификации внешней штрафной функции (см. [4; 8–11]). Данная работа выделяется тем, что в ней ограничения НЗ ВП агрегируются с применением функции внутреннего штрафа (обобщенной обратной барьерной функции; см. [4; 8; 10]). По сравнению с внешними штрафными функциями (например, точными или квадратичными) барьерную функцию отличает более высокая степень гладкости, что позволяет использовать при ее численной минимизации алгоритмы с повышенной эффективностью. Из немногочисленных публикаций, в которых применялся подход, связанный с методом барьерных функций в НЗ МП, отметим работы [12; 13].

В предлагаемой статье рассматриваются условия разрешимости задач, возникающих в данной модификации метода квазирешений для нахождения обобщенных решений НЗ ВП, формулируются правила управления параметрами метода, необходимыми для сходимости результирующей процедуры. Эта работа — продолжение исследований, проведенных автором в [14]. Основной упор делается на построение алгоритмов, которые наряду с требуемой сходимостью позволяют находить оптимальные значения ряда управляющих параметров метода квазирешений.

1. Несобственная задача ВП, методы коррекции

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \mid f(x) \leq 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, f_i — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$.

Важнейший класс НЗ ВП составляют задачи (1), у которых $X = \varnothing$. Первым шагом в исследовании подобных задач является их коррекция. Под коррекцией НЗ будем понимать замену (1) близкой к ней (в определенном смысле) разрешимой задачей ВП, решение которой принимается за обобщенное решение (1). Естественный способ (оптимальной) коррекции

НЗ ВП состоит в рассмотрении параметрической задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}_p}\}, \tag{2}$$

где $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, ξ — параметр задачи, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{\xi}_p = \arg\min\{\|\xi\|_p \mid \xi \in E\}$, $E = \{\xi \mid X_\xi \ne \varnothing\}$, $\|\cdot\|_p$ — символ некоторой векторной нормы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Далее для вектора $z = [z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{R}^n$ будут применяться евклидова норма ($p = 2$): $\|z\|_2 = \|z\| = \big(\sum\limits_{i=1}^n z_i^2\big)^{1/2}$ и чебышевская ($p = \infty$): $\|z\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |z_i|$.

Если в задаче (1) $X \ne \varnothing$, то в (2) $\bar{\xi}_p = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. Если же $X = \varnothing$, то для существования вектора $\bar{\xi}_p$ достаточно, например, чтобы было непусто и ограничено множество X_ξ для некоторого $\xi = \xi_0$. В этом случае множество E будет выпуклым и замкнутым, что гарантирует разрешимость задачи $\min\{\|\xi\|_p \mid \xi \in E\}$. При этом решение задачи (2) объявляется обобщенным решением НЗ ВП (1).

Легко видеть, что в качестве $\bar{\xi}_p$ можно взять $\bar{\xi}_p = f^+(\bar{x})$, где $\bar{x} \in \bar{X}_p = \operatorname{Arg}\min\limits_x \|f^+(x)\|_p$. В самом деле, $f_i(\bar{x}) \le f_i^+(\bar{x}) = (\bar{\xi}_p)_i$, т. е. $\bar{\xi}_p \in E$. Пусть $\xi' \in E$ и $x' \in X_{\xi'}$. Тогда $f_i^+(x') \le \xi'_i$, $i = 1, \dots, m$; $\|\bar{\xi}_p\|_p = \|f^+(\bar{x})\|_p \le \|f^+(x')\|_p \le \|\xi'\|_p$, т. е. вектор $\bar{\xi}_p$ удовлетворяет определению задачи (2).

Заметим, что для $p = \infty$ будет справедливо представление $\bar{\xi}_\infty = [\bar{\sigma}, \dots, \bar{\sigma}] \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{\sigma} = \min\limits_x \|f^+(x)\|_\infty$.

Таким образом, для $p = \infty$ задача (2) может быть записана в виде

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\}, \tag{3}$$

где $X_{\bar{\sigma}} = \{x \mid f_i(x) \le \bar{\sigma},\ i = 1, \dots, m\}$, $\bar{\sigma} = \min\limits_x \max\limits_{1\le i\le m} f_i^+(x)$.

В реальных моделях ВП вида (1), (2) функции $f_i(x)$, как правило, задаются с некоторой погрешностью. Для преодоления негативного влияния неточного задания исходной информации обычно используют специальные методы регуляризации, примером которых служит метод квазирешений (см. [3; 4]).

Применительно к НЗ ВП (1) метод квазирешений в несколько упрощенном виде будет заключаться в анализе задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\sigma}} \cap Q_d\}, \tag{4}$$

где $Q_d = \{x \mid \Omega(x) \le d\}$, $d > 0$, $\Omega(x)$ — стабилизатор задачи (1), представляющий собой выпуклую неотрицательную функцию, для которой множество Q_d ограничено для произвольного d. Естественным примером стабилизатора может служить функция $\Omega(x) = \|x\|^2$, которая используется в настоящей работе.

Задачи (3) и (4) тесно связаны и при определенных значениях параметров $\bar{\sigma}$ и d будут эквивалентными. Преимущество метода (4) особенно проявляется при анализе так называемых возмущенных задач. Он позволяет получить хорошее приближение для неустойчивых задач оптимизации (см. [3; 4]).

Задача (4) не всегда имеет решение. Его наличие зависит от достижимости значения $\bar{\sigma} = \min\|f^+(x)\|_\infty$ и от величины параметра $d > 0$. Очевидно, что должно быть $X_{\bar{\sigma}} \ne \varnothing$ и $d \ge \bar{d} = \min\{\|x\|^2 \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\}$. Подобные проблемы не будут возникать, если рассмотреть коррекцию задачи (1) с учетом ограничений метода квазирешений:

$$\min\{f_0(x) \mid g_i(x) \le \tilde{\sigma},\ i = 1, \dots, m+1\}, \tag{5}$$

где $g_i(x) = f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$; $g_{m+1}(x) = \|x\|^2 - d$, $\tilde{\sigma} = \min\limits_x \|g^+(x)\|_\infty$. Задача (5) определена для любого $d > 0$ и, более того, для нее справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 [14]. *Задача* (5) *разрешима для любого* $d > 0$.

В дальнейшем, как правило, в качестве коррекции для НЗ ВП (1) будет рассматриваться задача (5). Тем не менее полезно будет установить зависимости между величинами $\bar{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$, что может иметь значение при практическом определении параметра регуляризации d.

Очевидно, что эквивалентность оптимальной коррекции (3) и задачи (4), определяющей метод квазирешений, во многом зависит от величины d. При этом существенными являются два значения d:

$$\bar{d} = \min\{\|x\|^2 \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\} \quad \text{и} \quad d^* = \min\{\|x\| \mid x \in X^*_{\bar{\sigma}} = \operatorname{Arg}\min_{x \in X_{\bar{\sigma}}} f_0(x)\}.$$

При $d < \bar{d}$ задача (4) не имеет решений, при $d = \bar{d}$ допустимое (и оптимальное) множество у задачи (4) состоит из одной точки $\bar{x} \in X_{\bar{\sigma}}$, для которой $\bar{d} = \|\bar{x}\|^2$. Если $\bar{d} \le d \le d^*$, то задача (4) разрешима в некоторой точке $x^*_d \in X_{\bar{\sigma}} \cap Q_d$, такой что $f^* \le f_0(x^*_d) \le f_0(\bar{x})$, где $f^* = f_0(x^*)$, $x^* \in X^*_{\bar{\sigma}}$. При $d \ge d^*$ множество решений задачи (4) имеет вид $X^*_d = X^*_{\bar{\sigma}} \cap Q_d$. В задаче (5) величина оптимальной коррекции ограничений $\tilde{\sigma}$ также зависит от d:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_d = \min\{\sigma \mid G_d(\sigma) \ne \varnothing\},$$

где $G_d(\sigma) = \{x \mid g_i^d(x) \le \sigma,\ i = 1, \ldots, m+1\}$, $g_i^d(x)$ — i-я компонента вектор-функции $g(x) = g^d(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x), \|x\|^2 - d]$.

Из сказанного выше следует, что в методе квазирешений особую роль играет выбор параметра $d = \bar{d}$. Поэтому в первую очередь желательно уметь эффективно оценивать значение $\bar{d}$.

Теорема 1. *Пусть для* НЗ ВП (3) $\bar{\sigma} > 0$ *и* $\bar{d} = \|\bar{x}\|^2 = \min\{\|x\|^2 \mid x \in X_{\bar{\sigma}}\}$. *Тогда для метода квазирешений* (5) *справедливы соотношения*

$$\tilde{\sigma}_d = \bar{\sigma} \quad (\forall d \ge \bar{d}); \tag{6}$$

$$\bar{\sigma} \le \tilde{\sigma}_d \le \max\{\bar{\sigma}, \bar{d} - d\} \quad (\forall d\colon 0 < d < \bar{d}). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 1 для любого $d > 0$ определена величина $\tilde{\sigma}_d = \min\limits_x \|g^+(x)\|_\infty$. Так как $\|g^+(x)\|_\infty \ge \|f^+(x)\|_\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n,\ d > 0)$, то

$$\tilde{\sigma}_d \ge \bar{\sigma} \quad (\forall d > 0). \tag{8}$$

Пусть $d_2 > d_1 > 0$. Тогда $(\|x\|^2 - d_2)^+ \le (\|x\|^2 - d_1)^+$ и, следовательно,

$$\tilde{\sigma}_{d_2} \le \tilde{\sigma}_{d_1}. \tag{9}$$

Так как $\tilde{\sigma}_{\bar{d}} = \min\limits_x \|g^{\bar{d}+}(x)\|_\infty \le \|g^{\bar{d}+}(\bar{x})\|_\infty = \|f^+(\bar{x})\|_\infty = \bar{\sigma}$, то с учетом (8) получаем

$$\tilde{\sigma}_{\bar{d}} = \bar{\sigma}. \tag{10}$$

Если $d > \bar{d}$, то согласно (9), (10) имеем $\tilde{\sigma}_d \le \tilde{\sigma}_{\bar{d}} = \bar{\sigma}$, что вместе с (8) дает требуемое равенство (6).

Поскольку $\tilde{\sigma}_d = \min\limits_x \Psi_d(x)$, где $\Psi_d(x) = \max\{\|f^+(x)\|_\infty, (\|x\|^2 - d)^+\}$, то $\tilde{\sigma}_d \le \Psi_d(\bar{x}) = \max\{\bar{\sigma}, (\bar{d} - d)^+\}$. Поэтому $\bar{\sigma} \le \tilde{\sigma}_d \le \max\{\bar{\sigma}, (\bar{d} - d)^+\}$. Отсюда, в частности, при $d \ge \bar{d}$ следует (6). Если же $d < \bar{d}$, то приходим к (7). □

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то для* $0 < d < \bar{d}$ *либо выполняется* $\tilde{\sigma}_d = \bar{\sigma} \ge \bar{d} - d$, *либо* $\bar{\sigma} \le \tilde{\sigma}_d \le \bar{d} - d$. *При этом*

$$\begin{cases} \textit{если} \quad d < \bar{d}, \ \textit{то} \quad \tilde{\sigma}_d = \bar{\sigma} \quad \textit{при} \quad d \ge \bar{d} - \bar{\sigma} \quad \textit{и} \quad \tilde{\sigma}_d > \bar{\sigma} \quad \textit{при} \quad d < \bar{d} - \bar{\sigma}; \\ \textit{если} \quad \bar{d} > \bar{\sigma}, \ \textit{то существует} \quad d \in (0, \bar{d}), \ \textit{для которого} \quad \tilde{\sigma}_d > \bar{\sigma}. \end{cases} \tag{11}$$

2. Метод квазирешений и метод барьерных функций

Выше уже отмечалось, что метод квазирешений эффективен при рассмотрении возмущенных задач оптимизации. Пусть в задаче (1) вместо $f_i(x)$ известны их приближения — непрерывные функции $f_i^\delta(x)$ такие, что

$$|f_i^\delta(x) - f_i(x)| \le \varphi_i(x,\delta), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0,1,\ldots,m, \tag{12}$$

где функции $\varphi_i(x,\delta) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0} \varphi_i(x,\delta) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$). При этом вместо (5) возникает задача

$$\inf\{f_0^\delta(x) \mid g_i^\delta(x) \le \tilde\sigma^\delta,\ i = 1,\ldots,m+1\}, \tag{13}$$

где $g_i^\delta(x) = f_i^\delta(x)$, $i = 1,\ldots,m$; $g_{m+1}^\delta(x) = g_{m+1}(x) = \|x\|^2 - d$, $d > 0$, $\tilde\sigma^\delta = \inf\limits_x \|g^{\delta^+}(x)\|_\infty$.

При практическом решении задачи (13) удобнее использовать эквивалентные постановки без ограничений, применяя для агрегирования ограничений некоторую функцию внешнего штрафа вида

$$P(x,\delta) = \sum_{i=1}^{m+1} \big(f_i^\delta\big)^{+^q}(x) \quad (q > 0).$$

В результате метод квазирешений заключается в отыскании точки x_δ такой, что

$$\Phi_\delta(x_\delta) \le \Phi_\delta^* + \gamma(\delta),$$

где $\Phi_\delta(x) = f_0^\delta(x) + r\,P(x,\delta)$, $\gamma(\delta) > 0$ ($\forall\delta > 0$), $r > 0$, $\Phi_\delta^* = \inf\limits_x \Phi_\delta(x)$. Требуется найти управление параметрами $r, \delta, \gamma(\delta)$, при котором последовательность $\{x_\delta\}$ будет сходиться к решению задачи (5) при $\delta \to 0$.

Специфика данной работы заключается в построении метода квазирешений для НЗ ВП, в котором вместо функций $P(x,\delta)$ для решения задачи (13) применяется вариант метода внутреннего штрафа — метод обратной барьерной функции. Хорошие свойства гладкости барьерной функции делают данный подход более привлекательным с точки зрения реализации практических методов нахождения точки x_δ.

Если (1) — разрешимая задача ВП, у которой множество внутренних точек $X^0 = \{x \mid f_i(x) < 0,\ i = 1,\ldots,m\}$ непусто, то метод обратной барьерной функции заключается (см., например, [4]) в нахождении

$$\inf_{x\in X^0}\Big\{B(x,\varepsilon) = f_0(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{f_i(x)},\ \varepsilon > 0\Big\} \quad (= B_\varepsilon^*). \tag{14}$$

При выполнении определенных условий на задачу (1) имеет место сходимость $B_\varepsilon^* \to f^*$ ($\varepsilon \to 0$), где f^* — оптимальное значение задачи (1).

Применим метод (14) к задаче (5). Вначале рассмотрим случай, когда функции $f_i(x)$ известны точно, т. е. когда в (12) $\varphi_i(x,\delta) = 0$ ($i = 0,1,\ldots,m$).

Так как аналог X^0 в задаче (5) — множество $G_{\tilde\sigma}^0 = \{x \mid g_i(x) < \tilde\sigma,\ i = 1,\ldots,m+1\}$ заведомо пусто, то роль допустимого множества в (14) будет играть $G_{\tilde\sigma+\alpha}^0 = \{x \mid g_i(x) < \tilde\sigma + \alpha,\ i = 1,\ldots,m+1\}$ для некоторого $\alpha > 0$. Здесь $G_{\tilde\sigma+\alpha}^0 \ne \varnothing$ ($\forall\alpha > 0$). Кроме того, из ограниченности множества решений у задачи (5) следует ее устойчивость по отношению к возмущению правых частей ограничений. Другими словами, будет справедлива следующая лемма.

Лемма 2 (см., например, [9]). *Для любого $\alpha > 0$ будет разрешима задача*

$$\min\{f_0(x) \mid x \in G_{\tilde\sigma+\alpha}\} \quad (= \bar f_\alpha);$$

здесь $G_{\tilde\sigma+\alpha} = \{x \mid g_i(x) \le \tilde\sigma + \alpha,\ i = 1,\ldots,m+1\}$, при этом $\bar f_\alpha \to \bar f$ ($\alpha \to 0$), где $\bar f$ — оптимальное значение задачи (5).

Таким образом, предметом дальнейшего исследования будет задача

$$\inf_{x\in G^0_{\tilde\sigma+\alpha}}\Big\{B(x,q)=f_0(x)+\varepsilon\Big[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\tilde\sigma+\alpha-f_i(x)}+\frac{1}{\tilde\sigma+\alpha+d-\|x\|^2}\Big]\Big\},\tag{15}$$

где $q=[\varepsilon,\alpha,d]$, $\varepsilon>0$, $\alpha>0$, $d>0$.

Теорема 2 [14]. *Для любого* $q=[\varepsilon,\alpha,d]>0$ *существует точка* $\bar x(q)\in G_{\tilde\sigma+\alpha}$, *для которой* $B(\bar x(q),q)=B^*_q=\inf\limits_{x\in G^0_{\tilde\sigma+\alpha}}B(x,q)$.

Рассмотрим далее зависимость решения задачи (15) от изменения параметров ε и α, считая постоянным значение $d=d_0$. Пусть задана последовательность значений $q=q_k=[\varepsilon_k,\alpha_k,d_0]$, $1>\varepsilon_k>\varepsilon_{k+1}>\ldots>0$, $\alpha_k>0$, $k=1,2,\ldots$. Положим

$$\bar x^k=\arg\min_{x\in G_k}B_k(x),\tag{16}$$

где $B_k(x)=B(x,q_k)$, $G_k=\{x\mid g_i(x)\le\tilde\sigma+\alpha_k,\ i=1,\ldots,m+1\}$.

Теорема 3. *Пусть в методе* (16) $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k/\alpha_k=0$. *Тогда любая предельная точка последовательности* $\{\bar x^k\}$ *при* $k\to\infty$ *будет обобщенным решением* НЗ ВП (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\bar x$ обобщенное решение (1) (решение задачи (5)), $f_0(\bar x)=\bar f$. Задача (16) разрешима для любого $k=1,2,\ldots$, и последовательность $\{\bar x^k\}$ ограничена. Пусть $\tilde x$ — предельная точка $\{\bar x^k\}$ при $k\to\infty$, $f_0(\tilde x)\ge\bar f$. Справедливы соотношения

$$f_0(\bar x^k)<B_k(\bar x^k)=\min_{x\in G_k}B_k(x)\le B_k(\bar x)=f_0(\bar x)+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{\varepsilon_k}{\tilde\sigma+\alpha_k-g_i(\bar x)}.\tag{17}$$

Так как $g_i(\bar x)\le\tilde\sigma$, то $\tilde\sigma-g_i(\bar x)+\alpha_k\ge\alpha_k>0$ и $\dfrac{1}{\tilde\sigma+\alpha_k-g_i(\bar x)}<\dfrac{1}{\alpha_k}$ $(i=1,\ldots,m+1;\ k=1,2,\ldots)$. Применяя эту оценку в (17), получим $f_0(\bar x^k)<\min\limits_{x\in G_k}B_k(x)<\bar f+(m+1)\,\dfrac{\varepsilon_k}{\alpha_k}$. Отсюда $\bar f\le f_0(\tilde x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_0(\bar x^k)=\lim\limits_{k\to\infty}\min\limits_{x\in G_k}B_k(x)<\bar f$, т. е. $f_0(\tilde x)=\bar f$. □

Заметим, что параметры задачи (15) можно определить вектором $q'=[\varepsilon,\sigma,d]$, где $\sigma>\tilde\sigma$. Понятно, что такой набор эквивалентен прежнему q, если положить $\sigma=\tilde\sigma+\alpha$ и считать $\alpha>0$. В теореме 3 параметры ε и α можно изменять согласованно, например положить $\alpha_k=\sqrt{\varepsilon_k}$. Тогда последовательность $\bar x^k=x(\varepsilon_k)$, вырабатываемая методом (16), согласно (17) будет удовлетворять оценке $f_0(\bar x^k)<B_k(\bar x^k)<\bar f+(m+1)\sqrt{\varepsilon_k}$.

Из формулировки метода квазирешений очевидно, что большое значение имеет знание величин $\tilde\sigma$ и $\bar d$. Эти величины, в частности, могут гарантировать единственность обобщенного решения для НЗ ВП.

Пусть в задаче (5) вместо $\tilde\sigma=\min\|g^+(x)\|_\infty$ взята величина $\tilde\sigma+\triangle$, $\triangle>0$. Тогда в качестве некоторого приближения для оптимальной коррекции НЗ ВП можно принять задачу

$$\min\{f_0(x)\mid x\in G_{\tilde\sigma+\triangle}\},\tag{18}$$

где $G_{\tilde\sigma+\triangle}=\{x\mid g_i(x)\le\tilde\sigma+\triangle,\ i=1,\ldots,m+1\}$. Обозначим через $\bar x_\triangle$ решение задачи (18), $f_0(\bar x_\triangle)=\bar f_\triangle$. В силу леммы 2 $\lim\limits_{\triangle\to0}\bar f_\triangle=\bar f$ — в этом и заключается аппроксимационный смысл задачи (18). Аналог метода (16) приобретает следующий вид:

найти

$$\tilde x^k=\arg\min_{x\in G'_k}B'_k(x),\tag{$*$}$$

где $B_k'(x) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m+1} \dfrac{\varepsilon_k}{\tilde{\sigma}+ \vartriangle + \alpha_k - g_i(x)}$, $G_k' = \{x \mid g_i(x) \leq \tilde{\sigma}+ \vartriangle + \alpha_k,\ i = 1,\dots,m+1\}$, $\varepsilon_k \in (0,1]$, $\alpha_k \in (0,1]$, $k = 1,2,\dots$.

Придерживаясь схемы доказательства теоремы 3, нетрудно удостовериться в том, что при тех же условиях на параметры ε_k и α_k, как в теореме 3, любая предельная точка последовательности $\{\tilde{x}^k\}$ из условия $(*)$ при $k \to \infty$ будет решением задачи (18).

Заметим, что задача (*) — частный случай общей постановки для метода квазирешений:

$$\inf_{x \in G_\sigma^0} \Big\{ B(x, q') = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varepsilon}{\sigma - g_i(x)} \Big\},$$

где $x \in G_\sigma^0 = \{x \mid g_i(x) < \sigma,\ i = 1,\dots,m+1\}$, $\sigma > \tilde{\sigma}$, $\varepsilon > 0$. Поэтому здесь применим аналог теоремы 3 из статьи [14], в соответствии с которой можно указать константу $C > 0$ такую, что справедлива оценка

$$0 < \bar{B}_k^* - \bar{f}_\vartriangle < C\sqrt{\varepsilon_k},$$

где $\bar{B}_k^* = \min\limits_{x \in G_{\tilde{\sigma}+\vartriangle}} \Big\{ \bar{B}(x, \varepsilon_k) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m+1} \dfrac{\varepsilon_k}{\tilde{\sigma}+ \vartriangle - g_i(x)} \Big\}$, $\varepsilon_k \in (0,\ \vartriangle^2/4)$.

3. Алгоритмы нахождения величины $\tilde{\sigma}$

Предложим два алгоритма оптимальной коррекции НЗ ВП (5), основанных на применении некоторой модификации функции $B(x,q)$ из (15). Изменения в $B(x,q)$ состоят в том, что вместо фиксированного значения $\tilde{\sigma}$ вводится произвольный управляющий параметр $\sigma_k > \tilde{\sigma}$. Определение же значения $\tilde{\sigma}$ является одной из целей работы алгоритмов.

А л г о р и т м А1. Пусть x_0 — произвольная точка из $\mathbb{R}^n$, α_k, θ_k — последовательности положительных чисел такие, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = 0$. Положим $\sigma_0 = \|g^+(x_0)\|_\infty$, где $g(x) = [g_1(x),\dots,g_{m+1}(x)]$, $g_i(x)$ — из (5) $(i = 1,\dots,m+1)$;

$$Y_0^0 = \{x \mid g_i(x) < \sigma_0 + \alpha_0,\ i = 1,\dots,m+1\}.$$

Опишем $(k+1)$-ю итерацию алгоритма, считая известными точку x_k, параметры σ_k, α_k, θ_k и множество $Y_k^0 = \{x \mid g_i(x) < \sigma_k + \alpha_k,\ i = 1,\dots,m+1\}$. Построим функцию

$$B_k(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k - g_i(x)}, \quad \varepsilon_k > 0,$$

определим точку $x_{k+1} \in Y_k^0$ согласно условию

$$B_k(x_{k+1}) - \inf_{x \in Y_k^0} B_k(x) < \theta_k. \tag{19}$$

Положим $\sigma_{k+1} = \|g^+(x_{k+1})\|_\infty$.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (1) $X = \varnothing$, *в задаче* (5) *множество* $G_{\tilde{\sigma}} = \{x \mid g_i(x) \leq \tilde{\sigma},\ i = 1,\dots,m+1\}$ *состоит из одной точки*: $G_{\tilde{\sigma}} = \{\bar{x}\}$, $f_0(x) \geq \tilde{f} > -\infty$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$ *и* $\varepsilon_k = \varepsilon_0 > 0$ $(\forall k)$. *Тогда для последовательностей* $\{\sigma_k\}$, $\{x_k\}$, *вырабатываемых алгоритмом* А1, *справедливы равенства*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \tilde{\sigma}, \quad \lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $X = \varnothing$, то $\sigma_k > 0$ $(\forall k)$. Обозначим $\bar{f}_k = \inf\{f_0(x) \mid x \in Y_k^0\}$. В силу условия $g_{m+1}(x) < \sigma_k + \alpha_k$ множество Y_k^0 ограничено, следовательно $\bar{f}_k > -\infty$ $(\forall k)$. Образуем множество

$$M_k = \Big\{x \mid g_i(x) \le \sigma_k + \alpha_k - \frac{\varepsilon_k}{B^k - \bar{f}_k + \theta_k},\ i = 1, \dots, m+1\Big\},$$

где $B^k = \bar{f} + \dfrac{(m+1)\,\varepsilon_k}{\sigma_k - \tilde{\sigma} + \alpha_k}$, $\bar{f} = f_0(\bar{x})$. Очевидно, что $G_{\tilde{\sigma}} \subset Y_k^0$ $(\forall k)$. Поэтому $\bar{f} \ge \bar{f}_k$ и $B^k - \bar{f}_k + \theta_k > 0$. Следовательно, $M_k \subset Y_k^0$. Так как множество M_k компактно в $\mathbb{R}^n$, то существует точка $y_k \in M_k$ такая, что $B_k(y_k) = \min\limits_{x \in M_k} B_k(x)$.

Пусть для некоторой точки $x' \in Y_k^0$ выполняется неравенство $B_k(x') \le B_k(y_k)$. Тогда для $\bar{x} \in G_{\tilde{\sigma}}$ имеем

$$\bar{f}_k + \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k - g_i(x')} < f_0(x') + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k - g_i(x')} = B_k(x') \le B_k(y_k)$$

$$\le B_k(\bar{x}) = \bar{f} + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k - g_i(\bar{x})} \le \bar{f} + \frac{(m+1)\,\varepsilon_k}{\sigma_k - \tilde{\sigma} + \alpha_k} = B^k < B^k + \theta_k.$$

Отсюда $g_i(x') < \sigma_k + \alpha_k - \dfrac{\varepsilon_k}{B^k - \bar{f}_k + \theta_k}$, $i = 1, \dots, m+1$, т.е. $x' \in M_k$. Поэтому $B_k(y_k) = \min\limits_{x \in M_k} B_k(x) = \inf\limits_{x \in Y_k^0} B_k(x)$.

Пусть точка x_{k+1} удовлетворяет неравенству (19). Так как $x_{k+1} \in Y_k^0$, то

$$\bar{f}_k + \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k - g_i(x_{k+1})} < B_k(x_{k+1}) < B_k(y_k) + \theta_k \le B_k(\bar{x}) + \theta_k < B^k + \theta_k.$$

Значит,

$$g_i(x_{k+1}) < \sigma_k + \alpha_k - \frac{\varepsilon_k}{B^k - \bar{f}_k + \theta_k}, \quad i = 1, \dots, m+1. \tag{20}$$

Очевидно, что

$$B^k - \bar{f}_k + \theta_k = \frac{(m+1)\,\varepsilon_k}{\sigma_k - \tilde{\sigma} + \alpha_k} + \bar{f} - \bar{f}_k + \theta_k > \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + \alpha_k} > 0,$$

поэтому $\sigma_k + \alpha_k - \dfrac{\varepsilon_k}{B^k - \bar{f}_k + \theta_k} > 0$ и из (20) следует

$$0 < \sigma_{k+1} < \sigma_k + \alpha_k - \frac{\varepsilon_k}{B^k - \bar{f}_k + \theta_k} < \sigma_k + \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{21}$$

Из последних неравенств и условия $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$ вытекает (см., например, [4]) сходимость последовательности σ_k. Кроме того,

$$\lim_{k \to \infty} (\sigma_k - \sigma_{k+1} + \alpha_k) = 0. \tag{22}$$

Краткости ради обозначим $\lambda_k = \bar{f} - \bar{f}_k + \theta_k$, $\mu_{k+1} = \sigma_k - \sigma_{k+1} + \alpha_k$, $\nu_k = \sigma_k - \tilde{\sigma} + \alpha_k$. Из неравенства (21) следует $\dfrac{\varepsilon_k}{B^k - \bar{f}_k + \theta_k} < \mu_{k+1}$. Отсюда, вспоминая определение B^k, получаем

$$\frac{\varepsilon_k}{\mu_{k+1}} < B^k - \bar{f}_k + \theta_k = \bar{f} - \bar{f}_k + \theta_k + \frac{(m+1)\,\varepsilon_k}{\sigma_k - \tilde{\sigma} + \alpha_k} = \lambda_k + \frac{(m+1)\,\varepsilon_k}{\nu_k}.$$

Из этого неравенства вытекает

$$\nu_k(\varepsilon_k - \lambda_k\,\mu_{k+1}) < (m+1)\,\varepsilon_k\,\mu_{k+1}.$$

Так как по условию теоремы $\varepsilon_k = \varepsilon_0 > 0$ $(\forall k)$, а значение λ_k ограничено: $0 < \lambda_k < \bar{f} - \tilde{f} + \theta_0$, то для достаточно большого $\bar{k}$ имеем $\varepsilon_0 - \lambda_k\,\mu_{k+1} > 0$, а потому

$$\nu_k < \frac{(m+1)\,\mu_{k+1}}{1 - \lambda_k\,\mu_{k+1}\,\varepsilon_0^{-1}} \quad (k \geq \bar{k}). \tag{23}$$

Отсюда и из (22) следует $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_{k+1} = 0$, а потому

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \lim_{k\to\infty} (\nu_k + \tilde{\sigma} + \alpha_k) = \tilde{\sigma}. \tag{24}$$

Из (23), (24) и условий теоремы получаем

$$g_{m+1}(x_{k+1}) = \|x_{k+1}\|^2 - d_0 < \sigma_k + \alpha_k < \sigma_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \mathrm{const},$$

т. е. последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Пусть x^* — ее предельная точка при $k \to \infty$. В силу (20) и (24) $g_i(x^*) \leq \tilde{\sigma}$, $i = 1, \ldots, m+1$, следовательно, $x^* \in G_{\tilde{\sigma}}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^* = \bar{x}$. $\square$

Алгоритм A1 можно модифицировать, изменив правило выбора параметра α_k.

А л г о р и т м A2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_0 = \|g^+(x_0)\|_\infty$, $\varepsilon_k = \varepsilon_0 \in (0,1]$, $\theta_k \in (0,1]$, $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = 0$. По аналогии с алгоритмом A1 определим функцию $B_k(x)$ и множество Y_k^0. Найдем точку x_1 из условия (19) при $k = 0$. Положим

$$\sigma_1 = \|g^+(x_1)\|_\infty, \quad \mu_1 = \sigma_0 - \sigma_1 + \alpha_0, \quad 0 < \alpha_1 < \min\{\mu_1, \theta_1\}.$$

На $(k+1)$-м шаге находим точку x_{k+1} в соответствии с (19), вычисляем

$$\sigma_{k+1} = \|g^+(x_{k+1})\|_\infty, \quad \mu_{k+1} = \sigma_k - \sigma_{k+1} + \alpha_k, \quad 0 < \alpha_{k+1} < \min\{\mu_{k+1}, \theta_{k+1}\}.$$

Теорема 5. *Алгоритм* A2 *вырабатывает последовательности* $\{\sigma_k\}$, $\{x_k\}$, *для которых*
a) $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \tilde{\sigma}$;
b) *любая предельная точка последовательности* $\{x_k\}$ *допустима в задаче* (5);
c) $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{f}_k = \bar{f}$, *где* $\bar{f}_k = \min\{f_0(x) \mid x \in Y_k^0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя схеме доказательства теоремы 4, приходим к неравенству (21). Из него вытекает, что $\mu_{k+1} > 0$ $(\forall k)$ и, значит, $0 < \alpha_{k+1} \leq \mu_{k+1}$. Отсюда же получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ и $\sigma_{k+1} + \alpha_{k+1} < \sigma_k + \alpha_k$, т. е. последовательность $\gamma_k = \sigma_k + \alpha_k$ монотонно убывает и ограничена снизу величиной $\tilde{\sigma}$. Поэтому существует $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \sigma^* \geq \tilde{\sigma}$, а также $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{k+1} = 0$. В силу монотонности γ_k справедливы соотношения $G_{\tilde{\sigma}} \subset Y_{k+1}^0 \subset Y_k^0 \subset Y_0^0$. Тогда будут выполняться неравенства $\bar{f} \geq \bar{f}_{k+1} \geq \bar{f}_k \geq \ldots \geq \bar{f}_0$. Из этих неравенств и леммы 2 следует утверждение c): $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{f}_k = \bar{f}$.

Последовательность λ_k из (23) будет ограниченной: $0 < \lambda_k = \bar{f} - \bar{f}_k + \theta_k \leq \bar{f} - \bar{f}_0 + \theta_0$, поэтому ограничено и значение знаменателя в (23), что согласно (22) и (23) влечет выполнение равенства a): $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = \tilde{\sigma}$.

Обозначив через $\tilde{x}$ предельную точку последовательности $\{x_k\}$ при $k \to \infty$, из того, что $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = \tilde{\sigma}$, получим $\tilde{x} \in G_{\tilde{\sigma}}$, т. е. имеет место утверждение b). $\square$

З а м е ч а н и е 1. Алгоритм A2 в отличие от A1 не требует, чтобы множество $G_{\tilde{\sigma}}$ состояло из одной точки и чтобы функция $f_0(x)$ была ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, предположение $G_{\tilde{\sigma}} = \{\bar{x}\}$ можно не считать чересчур обременительным. Если $X_{\tilde{\sigma}} \neq \varnothing$, то выполнение данного условия можно обеспечить подходящим выбором параметра d в зависимости от $\bar{d}$ и $\tilde{\sigma}$. Подробнее о выборе d речь пойдет в разд. 4.

З а м е ч а н и е 2. Алгоритмы А1, А2 при практической реализации предполагают умение численно решать задачу минимизации выпуклой функции n переменных $B_k(x)$ на выпуклом множестве с заданной точностью (см. (19)). Существует обширная литература, где приводятся эффективные методы решения подобной задачи (см., например, [4; 11]). В нашем случае положительным моментом в выборе подходящего метода будет структура функции $B_k(x)$, которая обладает высокой степенью гладкости при условии дифференцируемости функций исходной задачи (1). Это обстоятельство позволяет применять для минимизации $B_k(x)$ алгоритмы высокого порядка (типа метода Ньютона), что выгодно отличает барьерную функцию от стандартных функций внешнего штрафа.

4. Об определении параметра d в методе квазирешений

Метод квазирешений (15) определяется набором параметров ε, σ, α, d. В разд. 1 уже отмечалась особая роль выбора $d = \bar{d}$. В теореме 1 установлена тесная связь между этим выбором и величинами оптимальной коррекции ограничений $\sigma = \bar{\sigma}$ и $\sigma = \tilde{\sigma}$. Знание точных значений d и σ значительно упростило бы нахождение обобщенного решения НЗ ВП.

Покажем, что в ряде случаев для нахождения параметра $\bar{d}$ можно построить достаточно простой итеративный алгоритм. Будем считать, что имеется метод безусловной минимизации функций многих переменных, позволяющий эффективно вычислять величины $\bar{\sigma} = \min \|f^+(x)\|_\infty$ и $\tilde{\sigma}_d = \min \|g_d^+(x)\|_\infty$. Тогда можно предложить итеративный метод нахождения параметра $\bar{d}$, основанный на сравнении величин $\tilde{\sigma}_d$ и $\bar{\sigma}$ (см. соотношения (6)–(11)). Понятно, что при известном $\bar{\sigma}$ значение $\bar{d}$ можно искать непосредственно, проектируя точку $x = 0$ на выпуклое множество $X_{\bar{\sigma}}$. Однако решение этой задачи условной минимизации может потребовать больше вычислительных затрат, чем последовательное нахождение чисел $\tilde{\sigma}_d$.

А л г о р и т м В (определение оптимального значения параметра $d = \bar{d}$ в методе квазирешений). Предположим, что в задаче (4) $d = \bar{d} > \bar{\sigma}$. Тогда можно выбрать интервал $\Delta_0 = [a_0, b_0]$, локализующий значение $\bar{d}$: $a_0 < \bar{d} < b_0$ и удовлетворяющий условиям $\tilde{\sigma}_{a_0} > \bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{b_0} = \bar{\sigma}$. Первое из этих условий согласно (11) выполняется, когда $0 < a_0 < \bar{d} - \bar{\sigma}$, второе условие в силу (6) имеет место при $b_0 > \bar{d}$. Обозначим длину $|\Delta_0| = b_0 - a_0$ отрезка Δ_0 через ρ. Полагаем $d_0 = a_0$, находим $d_1 = (a_0 + b_0)/2$, вычисляем $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_{d_1}$. Если $\tilde{\sigma}_1 > \bar{\sigma}$, то считаем $a_1 = d_1$, $b_1 = b_0$; если $\tilde{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$, то $a_1 = a_0$, $b_1 = d_1$. Получим отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, $d_1 \in \Delta_1$, $|\Delta_1| = b_1 - a_1 = \rho/2$.

Заметим, что при $\tilde{\sigma}_1 > \bar{\sigma}$ из (7) следует, что $d_1 < \bar{d}$, $\bar{\sigma} < \bar{d} - d_1$ (т. е. $d_1 < \beta \equiv \bar{d} - \bar{\sigma}$) и $\beta \in \Delta_1 = [d_1, b_0]$. В случае $\tilde{\sigma}_1 = \bar{\sigma}$ имеем либо $d_1 \geq \bar{d}$ (см. (6)), либо $d_1 < \bar{d}$ и (см. (7)) $\bar{\sigma} \geq \bar{d} - d_1$, т. е. $d_1 \geq \beta$ и $\beta \in \Delta_1 = [a_0, d_1]$. Таким образом, в обоих случаях $\beta \in \Delta_1$.

Пусть найден отрезок $\Delta_k = [a_k, b_k]$, где $\tilde{\sigma}_{a_k} \geq \bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{b_k} = \bar{\sigma}$, $d_k \in \Delta_k$, $|\Delta_k| = \rho\, 2^{-k}$, $\beta \in \Delta_k$. Обозначим $d_{k+1} = (a_k + b_k)/2$, вычислим $\tilde{\sigma}_{k+1} = \tilde{\sigma}_{d_{k+1}}$. Если $\tilde{\sigma}_{k+1} > \bar{\sigma}$, то полагаем $a_{k+1} = d_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$; если $\tilde{\sigma}_{k+1} = \bar{\sigma}$, то $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = d_{k+1}$. Здесь $d_{k+1} \in \Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, $|\Delta_{k+1}| = b_{k+1} - a_{k+1} = \rho\, 2^{-(k+1)}$, $\beta \in \Delta_{k+1}$ (последнее включение следует из рассуждений, аналогичных тем, что и для $\beta \in \Delta_0$).

При заданной точности $\varepsilon > 0$ алгоритм В останавливается через $\bar{k}$ шагов, где $\bar{k}$ — минимальное целое решение неравенства $\rho < 2^k \varepsilon$. В результате работы алгоритма возникает система вложенных сегментов $\beta \in \Delta_{k+1} \subset \Delta_k$, длины которых стремятся к нулю при возрастании k. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \beta$. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \beta = \bar{d} - \bar{\sigma}$, т. е. $\bar{d} = \bar{\sigma} + \lim\limits_{k\to\infty} d_k$.

Проиллюстрируем работу алгоритма В на следующем простом примере НЗ ВП в пространстве $\mathbb{R}^2$.

П р и м е р 1. Исходная НЗ ВП в пространстве $\mathbb{R}^2 = \{x = [x_1, x_2]\}$ имеет вид

$$\min\{x_1\colon (x_1 - 2)^2 - x_2 \leq -2,\ x_1 + x_2 \leq 4,\ -x_1 + 2x_2 \leq 0\}.$$

Т а б л и ц а 1

Результат работы алгоритма B на примере 1

k	d_k	$\tilde{\sigma}_k$	a_k	b_k	$\lvert\Delta_k\rvert = 2^{-k}\rho$
0	5	1	5	10	5
1	7.5	$\bar{\sigma}$	5	7.5	2.5
2	6.25	0.75	6.25	7.5	1.25
3	6.875	$\bar{\sigma}$	6.25	6.875	0.625
4	6.5625	$\bar{\sigma}$	6.25	6.5625	0.3125
5	6.4062	0.66	6.4062	6.5625	0.1562
6	6.4844	0.644	6.4844	6.5625	0.0781
7	6.5234	$\bar{\sigma}$	6.4844	6.5234	0.0391
8	6.5039	$\bar{\sigma}$	6.4844	6.5039	0.0196
9	6.4941	0.635	6.4941	6.5039	0.0098
10	6.499	0.63	6.499	6.5039	0.0049
11	6.5014	0.6275	6.5014	6.5039	0.0024
12	6.5026	0.6263	6.5026	6.5039	0.0012
13	6.5032	0.6256	6.5032	6.5039	0.0006
14	6.5036	0.6253	6.5036	6.5039	0.0003
15	6.5038	0.6251	6.5038	6.5039	0.0001

Здесь $X = \varnothing$, $\bar{\sigma} = 0.625$, $X_{\bar{\sigma}} = X^*_{\bar{\sigma}} = \{\bar{x}\}$, $\bar{x} = [2.25, 1.4375]$. Отсюда $\bar{d} = \|\bar{x}\|^2 = 7.129$, $\beta = \bar{d} - \bar{\sigma} = 6.504$. Теперь определим величину $\bar{d}$ с помощью алгоритма B.

В качестве начального отрезка Δ_0 возьмем $\Delta_0 = [a_0, b_0] = [5, 10]$. Его длина $|\Delta_0| = b_0 - a_0 = \rho = 5$. Вычислим величины $\tilde{\sigma}_{a_0}$ и $\tilde{\sigma}_{b_0}$. Имеем $\tilde{\sigma}_{a_0} = 1 > \bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{b_0} = 0.625 = \bar{\sigma}$. Полагаем $d_0 = a_0$, $d_1 = (a_0 + b_0)/2 = 7.5$, находим $\tilde{\sigma}_{d_1}$. Так как $\tilde{\sigma}_{d_1} = \bar{\sigma}$, то следующий отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1] = [a_0, d_1] = [5, 7.5]$, $|\Delta_1| = \rho/2 = 2.5$, $\beta \in \Delta_1$. Полагаем $d_2 = (a_1 + b_1)/2 = 6.25$, находим $\tilde{\sigma}_{d_2} = 0.75 > \bar{\sigma}$, $\Delta_2 = [a_2, b_2] = [d_2, b_2] = [6.25, 7.5]$, $|\Delta_2| = 1.25 = \rho/4$, $\beta \in \Delta_2$.

Продолжая и далее следовать алгоритму B, получим результаты вычислений, приведенные в табл. 1. Из табл. 1 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 6.5039$. Таким образом, $\bar{d} = \bar{\sigma} + \lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0.625 + 6.5039 = 7.129$. При этом точность $\varepsilon = 0.1$ достигается через 6 итераций алгоритма B, точность $\varepsilon = 0.01$ — через 9 итераций, а $\varepsilon = 0.001$ — через 12 итераций.

З а м е ч а н и е 3. Для работы алгоритма B необходимо знать числа a_0 и b_0, для которых

$$0 < a_0 < \bar{d} - \bar{\sigma}, \quad \bar{d} < b_0. \tag{25}$$

Условие (25) может и не выполняться для конкретной НЗ ВП.

П р и м е р 2. В пространстве $\mathbb{R}^2 = \{x = [x_1, x_2]\}$ рассмотрим задачу

$$\min\{f_0(x)\colon f_i(x) \le 0,\ i = 1, 2\}, \tag{26}$$

где $f_0(x) = x_1 + x_2^2$, $f_1(x) = x_1 - x_2 + 4$, $f_2(x) = -x_1 + x_2 + 2$. Здесь $X = \varnothing$, (26) — НЗ ВП. Построим для нее аппроксимацию (2):

$$\min\bigl\{f_0(x)\colon x \in X_{\bar{\sigma}} = \{x\colon -x_1 + x_2 = 1\}\bigr\}.$$

В этой задаче $\bar{\sigma} = \min \|f^+(x)\|_\infty = 3$, $\rho(0, X_{\bar{\sigma}}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} = [-0.5, 0.5]$, $\bar{d} = \|\bar{x}\|^2 = 0.5$, $\bar{d} < \bar{\sigma}$.

В методе квазирешений

$$\min\{f_0(x)\colon -x_1 + x_1 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 \le d\} \tag{27}$$

для поиска $d = \bar{d}$ алгоритм B неприменим, поскольку условие (25) не выполняется.

Т а б л и ц а 2

Результат работы алгоритма В после замены переменных

k	d_k	$\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_{d_k}$	a_k	b_k	$\lvert\Delta_k\rvert = 2^{-k}\rho$
0	8	5	8	40	32
1	24	3	8	24	16
2	16	4	16	24	8
3	20	3.6	20	24	4
4	22	3	20	22	2
5	21	3.5	21	22	1
6	21.5	3	21	21.5	0.5
7	21.25	3.25	21.25	21.5	0.25
8	21.375	3.125	21.375	21.5	0.125
9	21.4375	3.0625	21.4375	21.5	0.0625
10	21.4687	3.0313	21.4687	21.5	0.0312
11	21.4843		21.4843	21.5	0.0156

В задаче (26) сделаем замену переменных. Положим $x_1 = y_1 + 3$, $x_2 = y_2 - 3$. В новых переменных получим задачу

$$\min\{\tilde{f}_0(y)\colon \tilde{f}_i(y) \le 0,\ i = 1, 2\}, \tag{28}$$

где $\tilde{f}_0(y) = y_1 + (y_2 - 3)^2 + 3$, $\tilde{f}_1(y) = y_1 - y_2 + 10$, $\tilde{f}_2(y) = -y_1 + y_2 - 4$. После оптимальной коррекции (28) по правым частям ограничений возникает задача

$$\min\{\tilde{f}_0(y)\colon y \in Y_{\tilde{\sigma}}\}, \tag{29}$$

где $Y_\sigma = \{y\colon \tilde{f}_i(y) \le \sigma,\ i = 1, 2\}$, $\tilde{\sigma} = \min\{\sigma\colon Y_\sigma \ne \varnothing\}$. В нашей ситуации $\tilde{\sigma} = 3$, $Y_{\tilde{\sigma}} = \{y\colon -y_1 + y_2 = 7\}$, $\rho(0, Y_{\tilde{\sigma}}) = \big\|\bar{y} = [-3.5, 3.5]\big\|$, $\bar{d} = \bar{d}_y = \|\bar{y}\|^2 = 24.5$.

Так как в задаче (29) $\bar{d}_y > \tilde{\sigma}$, то алгоритм В можно применить для нахождения оптимального значения параметра d в методе квазирешений:

$$\min\{f_0(y)\colon -y_1 + y_2 = 7,\ y_1^2 + y_2^2 \le d\}. \tag{30}$$

Здесь $\bar{d}_y = 24.5$, $\tilde{\sigma} = 3$, $\tilde{\beta} = \bar{d}_y - \tilde{\sigma} = 21.5$. В качестве начального отрезка $\Delta_0 = [a_0, b_0]$ возьмем $\Delta_0 = [8, 40]$. Обозначая $\tilde{\sigma}_d = \min \|g_d^+(x)\|_\infty$, вычисляем $d_0 = a_0$, $\tilde{\sigma}_{d_0} = 5 > \bar{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_{b_0} = 3 = \bar{\sigma}$, $\rho = |\Delta_0| = 32$. Результаты работы алгоритма В приведены в табл. 2

Из табл. 2 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \tilde{\beta} = 21.5$. Отсюда для задачи (30) $\bar{d}_y = \bar{\sigma} + \tilde{\beta} = 3 + 21.5 = 24.5$. При этом достигнута точность $\varepsilon = 0.01$ на 12-й итерации алгоритма В. Пусть в задаче (30) $\bar{d}_y = \rho^2(0, \bar{y})$, где $\bar{y} \in Y_{\tilde{\sigma}} \cap Q_{\bar{d}_y}$, т. е. $\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 = \bar{d}_y = 24.5$, $-\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 7$. Тогда в задаче (27) $\bar{d} = \bar{d}_x = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = (\bar{y}_1 + 3)^2 + (\bar{y}_2 - 3)^2 = \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + 6\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + 18 = 24.5 - 42 + 18 = 0.5$.

5. Сходимость метода квазирешений в случае неточной информации

Рассмотрим некоторые особенности метода квазирешений при анализе возмущенных задач ВП. Пусть функции задачи (1) заданы с некоторой погрешностью, а именно выполняются условия (12), где погрешности $\varphi_i(x, \delta)$ согласованы со стабилизатором $\Omega(x)$ в следующем смысле: $\varphi_i(x, \delta) = \delta\,(1 + \Omega(x))$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$ (см., например, [4]). Таким образом, считаем, что в исходной задаче вместо $f_i(x)$ определены непрерывные функции $f_i^\delta(x)$, для которых

$$|f_i^\delta(x) - f_i(x)| \le \delta\,(1 + \|x\|^2) \quad (i = 0, 1, \ldots, m), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \delta > 0. \tag{31}$$

Тогда задача (5) приобретает форму (13), а аналог задачи (15) будем рассматривать в виде

$$\inf_{x\in G_\alpha^\delta}\Big\{B^\delta(x,q)=f_0^\delta(x)+\sum_{i=1}^m\frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha-f_i^\delta(x)}+\frac{\varepsilon}{\sigma+\alpha+d-\|x\|^2}\Big\},\tag{32}$$

где $G_\alpha^\delta=\{x \mid g_i^\delta(x)<\tilde\sigma^\delta+\alpha,\ i=1,\dots,m+1\}$, $g_i^\delta(x)=f_i^\delta(x)$, $i=1,\dots,m$; $g_{m+1}^\delta(x)=g_{m+1}(x)=\|x\|^2-d$, $q=[\varepsilon,\sigma,\alpha,d]$, $\varepsilon\in(0,1]$, $\sigma\ge\tilde\sigma^\delta$, $\alpha>0$, $d>0$, $\delta>0$, $\tilde\sigma^\delta=\inf\limits_x\|g^{\delta^+}(x)\|_\infty$.

Лемма 3. *Если выполнены условия* (31), *то*

a) *для любого $\delta>0$ имеет место неравенство*

$$\tilde\sigma^\delta<\tilde\sigma+\delta\,(1+\|\bar x\|^2),\tag{33}$$

где $\bar x=\arg\min\{\|x\| \mid x\in G_{\tilde\sigma}\}$, $G_{\tilde\sigma}=\{x \mid g_i(x)\le\tilde\sigma,\ i=1,\dots,m+1\}$;

b) *множество G_α^δ непусто и ограничено для любых $\delta_0\ge\delta>0$, $\alpha_0\ge\alpha>0$;*

c) *если $D_0=d+\tilde\sigma+\alpha_0+\delta_0\,(1+\|\bar x\|^2)$, то справедливы соотношения*

$$G_{\tilde\sigma}\subset G_\alpha^\delta\subset G_{\tilde\sigma+2\alpha}\quad(\forall\alpha>0,\ \delta\in(0,\alpha/(1+D_0))),\tag{34}$$

где $G_{\tilde\sigma+2\alpha}=\{x \mid g_i(x)\le\tilde\sigma+2\alpha,\ i=1,\dots,m+1\}$.

Доказательство. a) Из определения (31) для любого $x\in\mathbb R^n$ имеем $\|g^{\delta^+}(x)\|_\infty<\|g^+(x)\|_\infty+\delta\,(1+\|x\|^2)$, отсюда

$$\inf_x\|g^{\delta^+}(x)\|_\infty<\inf_x\{\|g^+(x)\|_\infty+\delta\,(1+\|x\|^2)\}\le\|g^+(\bar x)\|_\infty+\delta\,(1+\|\bar x\|^2),$$

т. е. справедливо неравенство (33).

b) Так как $\tilde\sigma^\delta=\inf\limits_x\|g^{\delta^+}(x)\|_\infty\ge0$, то по определению операции inf для любого $\beta>0$ существует точка x_β^δ такая, что

$$\|g^{\delta^+}(x_\beta^\delta)\|_\infty<\tilde\sigma^\delta+\beta,\tag{35}$$

т. е. при $\alpha=\beta$ $x_\alpha^\delta\in G_\alpha^\delta$ и $G_\alpha^\delta\ne\varnothing$. Пусть $x'\in G_\alpha^\delta$. Тогда в соответствии с (33) получим

$$g_{m+1}(x')=\|x'\|^2-d\le\tilde\sigma^\delta+\alpha<\tilde\sigma+\alpha+\delta\,(1+\|\bar x\|^2),$$

откуда следует $\|x'\|^2\le D_0=d+\tilde\sigma+\alpha_0+\delta_0\,(1+\|\bar x\|^2)$. Таким образом, множество G_α^δ ограничено $(\forall\delta\in(0,\delta_0],\ \alpha\in(0,\alpha_0])$.

c) Аналогично выводу неравенства (33) для любого $x\in\mathbb R^n$ и точки x_β^δ из (35) имеем

$$\tilde\sigma=\inf_x\|g^+(x)\|_\infty<\inf_x\big\{\|g^{\delta^+}(x)\|_\infty+\delta\,(1+\|x\|^2)\big\}$$

$$\le\|g^{\delta^+}(x_\beta^\delta)\|_\infty+\delta\,(1+\|x_\beta^\delta\|^2)<\tilde\sigma^\delta+\beta+\delta\,(1+D_0)\quad(\beta\in(0,\delta]).$$

Следовательно, для $\bar x\in G_{\tilde\sigma}$ получим $g_i(\bar x)<\tilde\sigma^\delta+\beta+\delta\,(1+D_0)\le\tilde\sigma^\delta+\alpha$, если $0<\beta\le\delta$, $\alpha\ge\delta\,(2+D_0)$. Таким образом,

$$G_{\tilde\sigma}\subset G_\alpha^\delta\quad\text{при}\quad0<\delta\le\alpha/(2+D_0).\tag{36}$$

Пусть $x'\in G_\alpha^\delta$. Тогда

$$g_i(x')<g_i^\delta(x')+\delta\,(1+\|x'\|^2)\le\|g^{\delta^+}(x')\|_\infty+\delta\,(1+D_0)$$

$$\le\tilde\sigma^\delta+\alpha+\delta\,(1+D_0)<\tilde\sigma+\delta\,(1+\|\bar x\|^2)+\delta\,(1+D_0)+\alpha\le\tilde\sigma+2\alpha\quad\text{при}\quad\alpha\ge\delta\,(2+\|\bar x\|^2+D_0).$$

Поэтому

$$G_\alpha^\delta\subset G_{\tilde\sigma+2\alpha}\quad\text{при}\quad0<\delta\le\frac{\alpha}{2(1+D_0)}.\tag{37}$$

Из (36) и (37) следует утверждение c) леммы 3. $\square$

Теорема 6. *Пусть в задаче* (32) $\sigma \geq \tilde{\sigma}^{\delta} + \alpha$, $\alpha > 2\delta\,(1 + D_0)$. *Тогда оптимальное значение* $\widetilde{B}^{\delta}$ *этой задачи удовлетворяет оценке*

$$0 < B_q^* - \widetilde{B}^{\delta} < 2m\,(1 + D_0)\,\frac{\varepsilon\,\delta}{\alpha^2}, \tag{38}$$

где $B_q^* = \min\limits_{x \in G_{\tilde{\sigma}+2\alpha}} B(x, q)$, $B(x, q) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m+1} \dfrac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - g_i(x)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x' \in G_{\alpha}^{\delta}$, то

$$B(x', q) = f_0(x') + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - g_i(x')} = f_0^{\delta}(x') + \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x')} + \frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha + d - \|x'\|^2}$$

$$+ f_0(x') - f_0^{\delta}(x') + \sum_{i=1}^{m} \Big[\frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - f_i(x')} - \frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x')}\Big]$$

$$\leq B^{\delta}(x', q) + \delta\,(1 + \|x'\|^2) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \Big[\frac{1}{\sigma + \alpha - f_i(x')} - \frac{1}{\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x')}\Big]. \tag{39}$$

Оценим разность $\dfrac{1}{\sigma + \alpha - f_i(x')} - \dfrac{1}{\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x')}$. Так как $\sigma \geq \tilde{\sigma}^{\delta} + \alpha$, то

$$\sigma + \alpha - f_i(x') > \tilde{\sigma}^{\delta} + 2\alpha - f_i^{\delta}(x') - \delta\,(1 + \|x'\|^2) > \alpha - \delta\,(1 + \|x'\|^2)$$

$$\geq \alpha/2 + \alpha/2 - \delta\,(1 + D_0) > \alpha/2 > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leq \frac{\alpha}{2(1 + D_0)},$$

поэтому $\dfrac{1}{\sigma + \alpha - f_i(x')} < \dfrac{2}{\alpha}$. Так как

$$\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x') \geq \tilde{\sigma}^{\delta} + 2\alpha - f_i^{\delta}(x') > \alpha > 0,$$

то $\dfrac{1}{\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x')} < \dfrac{1}{\alpha}$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{\sigma + \alpha - f_i(x')} - \frac{1}{\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x')} = \frac{f_i(x') - f_i^{\delta}(x')}{(\sigma + \alpha - f_i(x'))(\sigma + \alpha - f_i^{\delta}(x'))} < \frac{2\delta\,(1 + \|x'\|^2)}{\alpha^2}.$$

Учитывая последнее неравенство, из (39) для любого $x' \in G_{\alpha}^{\delta}$ получаем

$$B(x', q) < B^{\delta}(x', q) + \delta\,(1 + \|x'\|^2)\Big(1 + \frac{2m\,\varepsilon}{\alpha^2}\Big).$$

Отсюда и из леммы 3 следует соотношение (38):

$$\min_{x \in G_{\tilde{\sigma}+2\alpha}} B(x, q) \leq \inf_{x \in G_{\alpha}^{\delta}} B(x, q) < \inf_{x \in G_{\alpha}^{\delta}} B^{\delta}(x, q) + 2m\,(1 + D_0)\,\frac{\varepsilon\,\delta}{\alpha^2}. \qquad \square$$

Сформулируем общую теорему о сходимости метода квазирешений (13).

Теорема 7. *Пусть в задаче* (32) $\sigma \geq \sigma^{\delta} + \alpha$, $\alpha > 0$, $\varepsilon \to 0$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon/\alpha \to 0$, $0 < \delta \leq 2\alpha\,(1 + D_0)$. *Тогда*

$$\lim \inf_{x \in G_{\alpha}^{\delta}} B^{\delta}(x, q) = \bar{f}, \tag{40}$$

где $\bar{f} = \bar{f}_{\tilde{\sigma}} = \min\{f_0(x) \mid x \in G_{\tilde{\sigma}}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (34) имеем $\bar{f}_{\tilde{\sigma}} \geq \bar{f}_{\alpha}^{\delta\,(\alpha)} \geq \bar{f}_{\tilde{\sigma}+2\alpha}$ для любых $\alpha > 0$, $0 < \delta = \delta(\alpha) < 2\alpha\,(1 + D_0)$, где $\bar{f}_{\alpha}^{\delta\,(\alpha)} = \inf\limits_{x \in G_{\alpha}^{\delta}} f_0(x)$, $\bar{f}_{\tilde{\sigma}+2\alpha} = \min\limits_{x \in G_{\tilde{\sigma}+2\alpha}} f_0(x)$. Учитывая лемму 2, получим

$$\lim_{\alpha\to 0} \bar{f}_{\alpha}^{\delta\,(\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0} \bar{f}_{\tilde{\sigma}+2\alpha} = \bar{f}_{\tilde{\sigma}}. \tag{41}$$

Пусть $x' \in G_{\alpha}^{\delta}$. Тогда

$$\sigma + \alpha - g_i^{\delta}(x') \geq \tilde{\sigma}^{\delta} + 2\alpha - g_i^{\delta}(x') \geq \alpha > 0, \quad \frac{1}{\sigma + \alpha - g_i^{\delta}(x')} < \frac{1}{\alpha},$$

а потому

$$B^{\delta}(x', q) = f_0^{\delta}(x') + \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\varepsilon}{\sigma + \alpha - g_i(x')} < f_0(x') + \delta\,(1 + D_0) + (m+1)\,\frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Следовательно, если $x' = \bar{x}(\delta, q) = \arg\min\limits_{x \in \bar{G}_{\alpha}^{\delta\,(\alpha)}} B^{\delta}(x, q)$, то

$$\bar{f}_{\alpha}^{\delta(\alpha)} - \delta\,(1 + D_0) \leq f_0(\bar{x}(\delta, q)) - \delta\,(1 + D_0) \leq f_0^{\delta}(\bar{x}(\delta, q)) < B^{\delta}(\bar{x}(\delta, q), q)$$

$$\leq B^{\delta}(\bar{x}, q) < f_0(\bar{x}) + \delta\,(1 + D_0) + (m+1)\,\frac{\varepsilon}{\alpha},$$

где $\bar{x} \in G_{\tilde{\sigma}}$ — обобщенное решение НЗ ВП (1). Из последних неравенств и (41) получаем равенство (40). $\square$

Заключение

Работа посвящена нахождению аппроксимационных решений НЗ ВП, прежде всего задач с возможно противоречивой системой ограничений. Вследствие частоты их появления в практике математического моделирования актуальной становится разработка методов коррекции таких задач. Этот процесс предполагает построение семейства близких в определенном смысле разрешимых моделей, решение одной из которых принимается за обобщенное решение НЗ ВП. В работе за модель коррекции принята задача минимизации целевой функции на множестве точек минимума чебышевской нормы невязки ограничений. Рассматриваемая проблема чувствительна к точности задания своих функций, поэтому естественной является попытка использовать при коррекции НЗ идею регуляризации некорректных моделей оптимизации. С этой целью в качестве метода регуляризации в работе рассматривается известный метод квазирешений. Особенностью принятой модификации метода квазирешений является переход к задаче безусловной минимизации не с помощью методов внешнего штрафа, как обычно, а используя для агрегации ограничений метод внутренней штрафной (барьерной) функции. Такой подход представляется более перспективным с точки зрения численной реализации, поскольку барьерная функция обладает лучшими по сравнению с функциями внешнего штрафа свойствами дифференцируемости, что позволяет применить методы минимизации более высокого порядка сходимости. Предложены две конкретные итерационные процедуры для определения оптимальной величины коррекции ограничений в НЗ ВП. Также построен алгоритм для вычисления значения параметра регуляризации в методе квазирешений. Знание величин параметров коррекции и регуляризации значительно упрощают исходную задачу нахождения обобщенного решения НЗ. Также по сравнению с работой [14] рассматриваются более традиционные способы возможного возмущения условий задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: кн. 1,2. МЦНМО, 2011. 1056 с.
5. **Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 2, no. 1. P. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
6. **Renaut R., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 2. P. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
7. **Васильев Ф.П., Потапов М.М., Артемьева Л.А.** Экстраградиентный метод коррекции противоречивых задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 12. С. 1992–1998. doi: 10.31857/S004446690003547-2 .
8. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
9. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 196 с.
10. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
11. **Мину М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.
12. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
13. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. Т. 3. С. 3–11.
14. **Скарин В.Д.** Метод квазирешений на основе барьерных функций в анализе несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 201–215.

Поступила 27.03.2023
После доработки 14.07.2023
Принята к публикации 21.07.2023

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I. I. Duality for improper problems of linear and convex programming. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 23, pp. 62–66.
2. Eremin I. I., Mazurov Vl. D., Astaf'ev N. N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
4. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii. T.* 1, 2. [Optimization methods. Vol. 1, 2]. Moscow, Moskovskii Tsentr Nepr. Mat. Obr. Publ., 2011, 1056 p. ISBN: 978-5-94057-707-2, 978-5-94057-708-9.
5. Golub G.H., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432
6. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889

7. Vasil'ev F.P., Potapov M.M., Artem'eva L.A. Extragradient method for correction of inconsistent linear programming problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 1919–1925. doi: 10.1134/S0965542518120163
8. Fiacco A.V., McCormick G.P. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques.* Classics in applied mathematics, vol. 4. Philadelphia: SIAM, 1987, 226 p. doi: 10.1137/1.9781611971316 Translated to Russian under the title *Nelineinoe programmirovanie. Metody posledovatel'noi bezuslovnoi minimizatsii*, Moscow: Mir Publ., 1972, 240 p.
9. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming], Moscow: Nauka Publ., 1976, 196 p.
10. Evtushenko Yu.G. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primenenie v sistemakh optimizatsii* [Methods of solving extremal problems and their application in optimization systems], Moscow: Nauka Publ., 1982, 432 p.
11. Minoux M. *Programmation mathematique: theorie et algorithmes.* Dunod, 1987. Translated to Russian under the title *Matematicheskoe programmirovanie: teoriya i algoritmy*, Moscow, Nauka Publ., 1990, 488 p. ISBN: 5-02-013980-7.
12. Skarin V.D. Barrier function method and correction algorithms for improper convex programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. S120–S134. doi: 10.1134/S0081543808060126
13. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010
14. Skarin V.D. The method of quasi-solutions based on barrier functions in the analysis of improper convex programming problems. *Proc. Steklov. Inst. Math.*(*Suppl.*), vol. 319, suppl. 1, pp. S242–S256. doi: 10.1134/S0081543822060219

Received March 27, 2023
Revised July 14, 2023
Accepted July 21, 2023

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2023-913).

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. D. Skarin. The method of quasi-solutions based on barrier functions in the analysis of improper convex programming problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 168–184 .