ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.85

СРАВНЕНИЕ И ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРАВИЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ МНОГОГРАННИКА РАСПИСАНИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ ИДЕНТИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ[1]

Р. Ю. Симанчев, И. В. Уразова

В работе рассматривается выпуклая оболочка множества расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами. На множестве требований заданы условия предшествования в обслуживании требований. Все требования поступают в очередь на обслуживание одновременно и имеют одинаковые длительности обслуживания. Прерывания в обслуживании требований запрещены. Время дискретно. В статье изучаются полиэдральные свойства некоторых построенных ранее классов правильных неравенств. Проводится сравнение отсечений по "глубине", выделяются наиболее сильные подклассы отсечений. Также исследовано взаимное расположение многогранника расписаний и порождаемых неравенствами гиперплоскостей.

Ключевые слова: расписания, многогранник, правильное неравенство, сравнение неравенств.

R. Yu. Simanchev, I. V. Urazova. Comparison and polyhedral properties of valid inequalities for a polytope of schedules for servicing identical requests.

The paper considers the convex hull of a set of schedules for servicing identical requests by parallel devices. Precedence conditions are given on the set of requests. All requests enter the service queue simultaneously and have the same service duration. Interruptions in request servicing are prohibited. Time is discrete. The polyhedral properties of some previously constructed classes of valid inequalities are studied. The "depth" cuts are compared, and the strongest subclasses of cuts are found. The mutual arrangement of the schedule polyhedron and hyperplanes generated by inequalities is also studied.

Keywords: schedules, polytope, valid inequality, comparison of inequalities.

MSC: 90C10, 90C57

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-156-167

Введение

Многие экстремальные комбинаторные задачи могут быть формализованы в следующей постановке. Среди множеств некоторого семейства подмножеств $\mathcal{H} \subset 2^E$ конечного множества E, на котором задан аддитивный вещественный функционал $c\colon E \longrightarrow R$, найти множество, максимизирующее (минимизирующее) функцию $c(S) = \sum\limits_{e \in S} c(e)$, $S \subseteq E$. Нас интересует полиэдральная структура таких задач, базовым объектом которой является выпуклая оболочка векторов инциденций множеств из $\mathcal{H}$. Принципиальная возможность использования свойств евклидова пространства для анализа и решения комбинаторных задач вытекает из классической теоремы Вейля — Минковского, согласно которой выпуклая оболочка конечного числа точек в $\mathbb{R}^n$ (многогранник) может быть представлена как множество решений системы линейных уравнений и неравенств с n переменными (полиэдр). Исследование полиэдральной структуры экстремальной комбинаторной задачи подразумевает изучение аффинной оболочки многогранника допустимых решений (см. [1]), установление вида линейных неравенств, порождающих грани многогранника, исследование смежности его вершин, решетки граней, свойств релаксационных полиэдров (см. [2]) и так далее. На полиэдральных свойствах основываются методы решения задач, в первую очередь процедуры отсечения и процедуры ветвей

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Омского научного центра СО РАН (номер госрегистрации проекта 121022000112-2).

и границ (см. [3–5]). Наиболее впечатляющие рекорды (по размерности) при точном решении индивидуальных экстремальных комбинаторных задач получены именно с применением полиэдральных постановок.

Число работ, связанных с применением полиэдрального подхода к задачам теории расписаний, невелико. Результаты, касающиеся полиэдральных свойств некоторых задач теории расписаний, можно найти в [3; 6–10] и др. Невысокий интерес к полиэдральному анализу задач теории расписаний связан, на наш взгляд, в первую очередь с тем, что в них возникают серьезные теоретические трудности уже на этапе формализации множества расписаний как семейства подмножеств конечного множества и представления целевой функции в виде линейного функционала.

Эта статья является продолжением наших исследований, посвященных анализу полиэдральных свойств множества расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами. Дано множество требований V, $|V| = n$, на котором задано отношение частичного порядка $\lhd$, определяющее условия предшествования в обслуживании требований. Требования обслуживаются m параллельными идентичными приборами. Все требования поступают в очередь на обслуживание одновременно в момент времени $k = 0$ и имеют одинаковые (равные 1) длительности обслуживания. Прерывания в обслуживании требований запрещены. Время дискретно. Допустимым расписанием или просто расписанием называется *всякий порядок обслуживания требований*, допустимый относительно частичного порядка $\lhd$ (см., например, [11; 12]).

Это множество расписаний допускает следующую формализацию (см. [11]). Расписанием называется такая *функция* $\sigma\colon V \longrightarrow D = \{1, 2, \ldots, d\}$, что

(i) соотношение $i \lhd j$ влечет неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$;

(ii) для любого $k \in D$ имеется не более m требований $i \in V$ таких, что $\sigma(i) = k$.

Множество расписаний, определенных условиями (i)–(ii), будем обозначать через S_d.

Описанное множество расписаний является множеством допустимых решений ряда оптимизационных задач, которые определяются различными целевыми функциями (например, минимизация общего времени обслуживания всех требований, минимизация суммарного взвешенного времени обслуживания всех требований).

Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть описан с помощью ориентированного ациклического графа. Ациклический орграф, задающий частичный порядок на множестве требований V, будем обозначать буквой G. Через V и A будем обозначать множества его вершин и дуг, соответственно. Вершины орграфа G будем обозначать буквами i или j, индексируя их при необходимости. Дугу с началом в i и концом в j будем обозначать через ij. Если $H \subseteq G$, то через VH и AH будем обозначает множества его вершин и дуг, соответственно. *Путем* в орграфе G будем называть подграф, порожденный множеством вершин i_1, i_2, $\ldots, i_t$, удовлетворяющих условию $i_s i_{s+1} \in A$ для всех $s = 1, 2, \ldots, t-1$. Длину $|P|$ пути P в орграфе G будем считать равной числу содержащихся в нем дуг. Дуга ij называется *транзитивной*, если в орграфе G существует путь из i в j, отличный от дуги ij. Исходя из определения расписания, будем далее полагать, что орграф G не содержит транзитивных дуг.

В процедурах отсечения важную роль играет “глубина” используемых правильных неравенств. Сравнение неравенств производится относительно релаксационного множества, содержащего многогранник, ассоциированный с задачей. На основе анализа глубины отсечений строятся оценки числа итераций алгоритмов отсечения, выделяются наискорейшие по числу итераций алгоритмы (см. [13]).

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведена система линейных неравенств, целочисленные решения которой являются векторами инциденций расписаний из S_d, а также классы правильных неравенств для выпуклой оболочки расписаний. Раздел 2 посвящен сравнению предложенных классов. В каждом классе выделены наиболее сильные неравенства. В разд. 3 подробно рассмотрена структура этих классов с точки зрения взаимного расположения параметров, определяющих неравенства. Найдены условия, при которых многогранник расписаний целиком лежит на границе полупространства, определяемого неравенством, выделены эквивалентные неравенства.

1. Полиэдральная релаксация многогранника расписаний и классы правильных неравенств

Перейдем к описанию многогранника расписаний и его полиэдральной релаксации.

Всякому расписанию $\sigma \in S_d$ сопоставим $(0,1)$-вектор $x^\sigma = (x^\sigma_{ik},\ i \in V,\ k \in D) \in \mathbb{R}^{nd}$ по правилу: $x^\sigma_{ik} = 1$, если $\sigma(i) = k$; $x^\sigma_{ik} = 0$ — в противном случае. Вектор x^σ будем называть *вектором инциденций расписания* σ. Многогранник расписаний определяется как множество

$$P_{d,Z} = \mathrm{conv}\{x^\sigma \in \mathbb{R}^{nd} \mid \sigma \in S_d\}.$$

В силу условий предшествования (i) для каждой вершины $i \in V$ имеются такие моменты времени $k \in D$, в которые требование $i \in V$ обслуживаться не может, т.е. заведомо $x^\sigma_{ik} = 0$ для любого расписания $\sigma \in S_d$. Это можно формализовать следующим образом.

Через p_i, $i \in V$, обозначим характеристику задачи, определяемую условиями:

— для любого расписания $\sigma \in S_d$ выполняется $x^\sigma_{i1} = x^\sigma_{i2} = \ldots = x^\sigma_{ip_i} = 0$;

— существует расписание $\sigma_\star \in S_d$ такое, что $x^{\sigma_\star}_{i(p_i+1)} = 1$.

Через q_i, $i \in V$, обозначим характеристику задачи, определяемую условиями:

— для любого расписания $\sigma \in \Sigma_d$ выполняется $x^\sigma_{i(d-q_i+1)} = x^\sigma_{i(d-q_i+2)} = \ldots = x^\sigma_{id} = 0$;

— существует расписание $\sigma_\star \in \Sigma_d$ такое, что $x^{\sigma_\star}_{i(d-q_i)} = 1$.

Задача нахождения значений прарметров p_i и q_i эквивалентна одной из широко известных задач теории расписаний, а именно минимизации общего времени обслуживания всех требований:

$$\max_{i \in V} \sigma(i) \longrightarrow \min_{\sigma \in S_d}.$$

Действительно, если к графу предшествований G добавить еще одну вершину i' и провести к ней дуги из всех вершин, имеющих нулевую полустепень исхода (антибаза; см. [14]), то поиск $p_{i'}$ эквивалентен решению задачи минимизации общего времени обслуживания на графе G. Ясно, что аналогичное рассуждение справедливо и для параметра q_i.

Отметим сразу, что эта задача, послужившая катализатором настоящей работы, NP-трудна при произвольном числе приборов m. Если m фиксировано, то ее сложностной статус на сегодняшний день не известен (см. [15]). Этот факт в определенной степени оправдывает введение параметров p_i и q_i. В [12] приведены полиномиальные алгоритмы решения этой задачи для случаев, когда $m = 2$ и когда частичный порядок на V является корневым деревом. Для иных случаев в [15] эта задача упомянута как открытая в смысле NP-трудности.

Для каждой вершины $i \in V$ определим множество $D_i = \{p_i+1, p_i+2, \ldots, d-q_i\} \subset D$. Из определения параметров p_i и q_i следует, что требование $i \in V$ не может обслуживаться за пределами этого множества моментов времени ни в каком расписании. Имея множества D_i, определим для каждого $k \in D$ множество $V_k = \{i \in V \mid k \in D_i\}$. В работах [3;10] показано, что $(0,1)$-вектор $x \in \mathbb{R}^{nd}$ является вектором инциденций расписания тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе линейных уравнений и неравенств:

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1, \quad i \in V; \tag{1}$$

$$\sum_{i \in V_k} x_{ik} \le m, \quad k \in D; \tag{2}$$

$$x_{ik} \le \sum_{l \in D_j,\, l > k} x_{jl}, \quad ij \in A, \quad k \in D_i; \tag{3}$$

$$0 \le x_{ik} \le 1, \quad i \in V, \quad k \in D_i; \tag{4}$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, \quad k \in D \setminus D_i. \tag{5}$$

Полиэдр, задаваемый ограничениями (1)–(5) обозначим через M_d. Таким образом,

$$P_{d,Z} = \mathrm{conv}(M_d \cap Z^{nd}),$$

где Z^{nd} — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^{nd}$. К принципиальным свойством релаксации M_d относится то, что она не содержит "лишних" целочисленных точек, не являющихся векторами инциденций расписаний; иначе говоря, множество всех целочисленных решений системы (1)–(5) является множеством векторов инциденций всех расписаний из S_d. Отметим также, что в целом полиэдр M_d имеет нецелочисленные вершины, т. е. $M_d \setminus P_{d,Z} \neq \varnothing$. Соответствующие примеры можно найти в [3; 10].

При решении оптимизационных задач на множестве расписаний S_d использование полиэдра M_d осложняется некоторой "неопределенностью" конкретных значений параметров p_i и q_i. На практике в качестве множества D_i можно взять любое множество моментов времени, содержащее $\{p_i + 1, p_i + 2, \ldots, d - q_i\}$. Например, в [3; 10] в качестве p_i взята уменьшенная на единицу длина максимального пути из базы графа G до вершины i, а в качестве q_i — длина максимального пути из i в антибазу графа G.

Семейство расписаний S_d на фиксированном графе предшествований G можно рассматривать при различных значениях параметра d. Легко заметить, что при различных d семейства S_d удовлетворяют условию монотонности в том смысле, что при $d < d'$ имеет место включение $S_d \subset S_{d'}$. В связи с этим далее мы везде будем полагать, что $d = n$, поскольку множество S_n заведомо не пусто при любом графе предшествований на n вершинах. Более тонкие оценки для значения d, гарантирующие непустоту множества S_d, можно найти в [10].

Линейное неравенство в пространстве $\mathbb{R}^{nd}$ называется *правильным относительно множества* $P \subset \mathbb{R}^{nd}$, если всякая точка из P ему удовлетворяет. Правильное неравенство используется при построении процедур отсечения в тех случаях, когда множество точек начальной или текущей полиэдральной релаксации, нарушающих это неравенство, вообще говоря, не пусто. При этом правильное неравенство называется *отсечением.*

В работах [10; 16] предложены три класса правильных неравенств для многогранника $P_{d,Z}$. Первый из них основан на путях в графе предшествований G и определяется следующим образом.

Класс неравенств *I* [10]. Пусть $P \subset G$ — путь, $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subseteq V(P)$ и $k \in D$. Тогда неравенство

$$\sum_{s=1}^{t} x_{i_s k} \le 1 \tag{6}$$

является правильным к многограннику $P_{d,Z}$. Справедливость этого утверждения легко вытекает из того, что все вершины ориентированного пути связаны отношениями предшествования и не могут обрабатываться в один и тот же момент времени.

Второй класс также использует понятие пути в графе G, но учитывает весь диапазон моментов времени D, чем несколько расширяет класс I.

Класс неравенств *IZ* [10]. Пусть $P \subset G$ — путь, $k \in D$, $1 < k < d$, и пусть $i, z \in VP$ — первая и последняя вершины пути P. Тогда неравенство

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in VP} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \le 1 \tag{7}$$

является правильным относительно многогранника $P_{d,Z}$.

Одним из принципиальных свойств неравенств классов I и IZ является то, что задача идентификации таких неравенств для заданной точки из $M_d \setminus P_{d,Z}$ (separation problem) полиномиально разрешима с трудоемкостью $O(n^3)$ (см. [10]).

Для описания следующего класса правильных относительно $P_{d,Z}$ неравенств введем необходимые определения и обозначения.

Орграф H назовем *t-дольным*, если множество его вершин можно разбить на t попарно непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_t$ так, что для любого $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ множество $V_j \cup V_{j+1}$ индуцирует в H двудольный орграф с началами дуг в V_j и концами в V_{j+1}. Если в этом определении для любого $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ множество $V_j \cup V_{j+1}$ индуцирует полный двудольный орграф, то граф H называется *полным t-дольным*. Полный t-дольный орграф будем обозначать через $H(V_1, V_2, \dots, V_t; AH)$.

Класс неравенств *ID* [16]. Пусть $H(V_1, V_2, \dots, V_t; AH)$ — полный t-дольный ациклический орграф в G, $k \in D$. Тогда неравенство

$$\sum_{i\in V_1} \sum_{l=k}^{d} x_{il} + \sum_{j=2}^{t-1} \sum_{i\in V_j} x_{ik} + \sum_{i\in V_t} \sum_{l=1}^{k} x_{il} \leq \max_{j=\overline{1,t}} (|V_j|)$$

является правильным относительно $P_{d,Z}$.

Для всех описанных классов неравенств в работах [10] и [16] имеются примеры точек из $M_d \setminus P_{d,Z}$, которые ими отсекаются.

2. Сравнение отсечений

Сравнение неравенств между собой производится на основании следующего определения. Говорим, что неравенство $a^T x \leq a_0$ не сильнее неравенства $b^T x \leq b_0$ относительно M_d, если $\{x \in M_d \mid a^T x > a_0\} \subseteq \{x \in M_d \mid b^T x > b_0\}$.

На рис. 1 слева проиллюстрирована ситуация, когда одно неравенство не сильнее другого, справа — несравнимые неравенства.

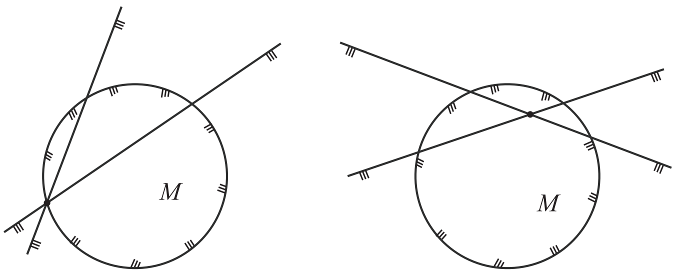

Рис. 1. Сравнение неравенств.

Утверждение 1. *Пусть $P_1, P_2 \subset G$ — пути и $VP_1 \subset VP_2$. Тогда для любого $k \in D$ неравенство $\sum\limits_{j\in VP_1} x_{jk} \leq 1$ не сильнее неравенства $\sum\limits_{j\in VP_2} x_{jk} \leq 1$.*

Доказательство. Действительно, так как компоненты векторов $x^\sigma, \sigma \in S_d$ неотрицательны, то $\sum\limits_{j\in VP_1} x^\sigma_{jk} \leq \sum\limits_{j\in VP_2} x^\sigma_{jk}$. □

Отсюда, в частности, следует, что неравенства вида (6), построенные на максимальных по включению путях орграфа G, более предпочтительны для использования в релаксациях многогранника $P_{d,Z}$ и алгоритмах отсечения.

Для анализа класса IZ сначала покажем, что конструкция, основанная на максимальных по включению путях, не позволяет сравнивать неравенства класса IZ. В следующем примере построены точка $\bar{x}$ и два неравенства вида (7) на путях P_1 и P_2, для которых $P_1 \subset P_2$, и при этом первым неравенством точка $\bar{x}$ отсекается, а вторым — сохраняется.

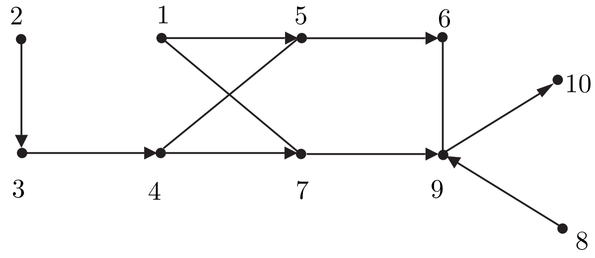

Рис. 2. Ортграф G.

П р и м е р. Рассмотрим орграф G с множеством вершин $V = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$ и множеством дуг $E = \{15, 17, 23, 34, 45, 47, 56, 69, 79, 89, 910\}$ (см. рис. 2). Пусть $d = n = 10$, $m = 3$.

Координаты точки $\bar{x}$ зададим с помощью таблицы 10×10, строки которой соответствуют множеству V, а столбцы — множеству D (см. табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Задание точки $\bar{x}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0.75	0.25	0	0	0	0	0
4	0	0	0.25	0	0.5	0.25	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.5	0.25	0.25	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.75	0	0.25	0	0
7	0	0	0	0	0.5	0	0.25	0.25	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0.5	0.25	0.25	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0.75	0	0.25

Возьмем путь P_1 с $VP_1 = \{3, 4\}$ и $k = 4$. Неравенство вида (7), построенное на пути P_1, отсекает точку $\bar{x}$. Возьмем путь P_2 с $VP_2 = \{3, 4, 5\}$ и $k = 4$. Неравенство вида (7), построенное на пути P_2, не отсекает точку $\bar{x}$. □

Однако правильность неравенств класса IZ позволяет определить еще два класса правильных неравенств, в которых максимальность по включению путей позволяет выделить “более сильные” неравенства. Эти классы описаны в следующем утверждении.

Утверждение 2. *Пусть $P \subset G$ — путь, $k \in D$, $1 < k < d$, и пусть $i, z \in VP$ — первая и последняя вершины пути P. Тогда неравенства*

$$\sum_{j \in VP} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \leq 1, \tag{8}$$

$$\sum_{j \in VP} x_{jk} + \sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} \leq 1 \tag{9}$$

являются правильными относительно многогранника $P_{d,Z}$.

Неравенства вида (8) и (9) обозначим через IZ_{up} и IZ_l соответственно.

Вновь пользуясь неотрицательностью компонент векторов x^{σ}, получим следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть $P \subset G$ — путь, $k \in D$, $i \in VP$ и $z \in VP$ — начальная и конечная вершины пути P. Неравенство вида* (6) *не сильнее соответствующих неравенств вида* (8) *и* (9)*, которые в свою очередь не сильнее неравенства* (7).

Пусть $i \in V$ и $k \in D$. Разобьем неравенства класса IZ_{up} на подклассы $IZ_{up}(i,k)$ по следующему правилу. Неравенство вида (8) принадлежит подклассу $IZ_{up}(i,k)$, если фигурирующий в нем путь P имеет вершину i в качестве начальной. Очевидно, что подклассы $IZ_{up}(i,k)$ попарно не пересекаются при различных парах (i,k) и

$$IZ_{up} = \bigcup_{i \in V} \bigcup_{k \in D} IZ_{up}(i,k).$$

Пусть $\mathcal{P}(i)$ — множество путей, выходящих из вершины $i \in V$, а $\mathcal{P}^*(i)$ — множество максимальных по включению путей в $\mathcal{P}(i)$. Соответственно через $IZ^*_{up}(i,k) \subseteq IZ_{up}(i,k)$ обозначим множество тех неравенств, которые построены на путях $P \in \mathcal{P}^*(i)$. В силу утверждений 1 и 2 в классе IZ_{up} можно выделить новый, “наиболее сильный”, подкласс неравенств

$$IZ^*_{up} = \bigcup_{i \in V} \bigcup_{k \in D} IZ^*_{up}(i,k).$$

Аналогичная конструкция возможна и для класса IZ_l.

Разобьем неравенства класса IZ_l на подклассы $IZ_l(k,z)$ по следующему правилу. Неравенство вида (9) при $z \in V$ и $k \in D$ принадлежит подклассу $IZ_l(k,z)$, если фигурирующий в нем путь P имеет вершину z в качестве конечной. Очевидно, что подклассы $IZ_l(k,z)$ попарно не пересекаются и

$$IZ_l = \bigcup_{z \in V} \bigcup_{k \in D} IZ_l(k,z).$$

Пусть $\Gamma(z)$ — множество путей, входящих в вершину $z \in V$, а $\Gamma^*(z)$ — множество максимальных по включению путей в $\Gamma(z)$. Соответственно через $IZ^*_l(k,z) \subseteq IZ_l(k,z)$ обозначим множество тех неравенств, которые построены на путях $P \in \Gamma^*(z)$. В силу утверждений 1 и 2, в классе IZ_l можно выделить новый, “наиболее сильный”, подкласс неравенств

$$IZ^*_l = \bigcup_{z \in V} \bigcup_{k \in D} IZ^*_l(k,z).$$

В заключение этого раздела рассмотрим достаточное условие сравнимости для неравенств класса ID.

Полный t-дольный орграф $H(V_1, V_2, \ldots, V_t; AH)$ дополним до орграфа $\bar{H}$ следующим образом. К орграфу H добавим q долей так, чтобы

1) орграф $\bar{H}$ был полным $(t+q)$-дольным орграфом и

2) $\max\{|V_j| \mid V_j \subset VH,\ j = 1,2,\ldots,t\} = \max\{|V_l| \mid V_l \subset V\bar{H},\ l = 1,2,\ldots,t+q\}$.

Покажем, что неравенство

$$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i \in V_j} x_{ik} \le \max\{|V_j| \mid V_j \subset VH,\ j = 1,2,\ldots,t\},$$

построенное на орграфе H, не сильнее неравенства

$$\sum_{l=1}^{t+q} \sum_{i \in V_l} x_{ik} \le \max\{|V_l| \mid V_l \subset V\bar{H},\ l = 1,2,\ldots,t+q\},$$

построенного на орграфе $\bar{H}$. Рассмотрим такую точку $\bar{x} \in M_d$, что

$$\sum_{l=1}^{t} \sum_{i \in V_l} \bar{x}_{ik} > \max\{|V_l| \mid V_l \subset V\bar{H},\ l = 1, 2, \ldots, t\}.$$

В силу неотрицательности компонент точки $\bar{x}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i \in V_j} \bar{x}_{ik} \le \sum_{l=1}^{t+q} \sum_{i \in V_l} \bar{x}_{ik}.$$

Остается заметить, что по построению $\max\{|V_j| \mid V_j \subset VH,\ j = 1, 2, \ldots, t\} = \max\{|V_l| \mid V_l \subset V\bar{H},\ l = 1, 2, \ldots, t+q\}$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{t+q} \sum_{i \in V_j} \bar{x}_{ik} > \max\{|V_j| \mid V_j \subset VH,\ j = 1, 2, \ldots, t+q\}.$$

Таким образом, если точка $\bar{x} \in M_d$ отсекается неравенством, построенным на орграфе H, то она отсекается и неравенством, построенным на орграфе $\bar{H}$. Заметим также, что если первая и последняя доли в орграфе H совпадают с первой и последней долями орграфа $\bar{H}$, то неравенство, построенное на H, не сильнее неравенства, построенного на $\bar{H}$.

3. Полиэдральные свойства неравенств

В разд. 2 для каждой вершины j графа G, определяющего условия предшествования, были введены специальные характеристики p_j и q_j. Смысл этих величин заключается в том, что за пределами множества $D_j = \{p_j, p_j+1, \ldots, d-q_j\} \subset D$ требование j заведомо не может обслуживаться. Всякое неравенство класса IZ определяется путем $P \subset G$ с началом в вершине i и концом в вершине z и моментом обслуживания $k \in D$. Рассмотрим свойства неравенств класса IZ в зависимости от того, как располагаются относительно друг друга множества D_i, D_z и параметр k. Пусть $P \subset G$ — путь, $i \in VP$ — начальная, $z \in VP$ — конечная вершины пути P, $k \in D$. Так как вершины i и z принадлежат одному пути и $i \lhd j$, то очевидно, что $p_i < p_z$ и $d - q_i < d - q_z$.

I. Рассмотрим сначала ситуацию, в которой $D_i \cap D_j \ne \varnothing$. Тогда $p_i < p_z \le d - q_i < d - q_z$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $k < p_i$. Тогда условие $k < p_j$ выполняется для любой вершины $j \in VP$, т. е. $k \notin D_j$ для любой $j \in VP$. Значит, в силу условия (5) для любого $l \le k$ и любой $j \in VP$ имеем $x_{jl} = 0$. Отсюда следует, что $\sum\limits_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 0$ и $\sum\limits_{j \in VP} x_{jk} = 0$. Тогда левая часть неравенства (7) будет иметь вид $\sum\limits_{l=k+1}^{d} x_{il}$. Из $k < p_i$ следует, что $\{k+1, k+2, \ldots, d\} \supseteq D_i$. Теперь, воспользовавшись ограничением (1), получим

$$\sum_{l=k+1}^{d} x_{il} = \sum_{l \in D_i} x_{il} = 1.$$

Таким образом, при $k < p_i$ полиэдр M_d принадлежит каждой из трех гиперплоскостей

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 0, \quad \sum_{j \in VP} x_{jk} = 0, \quad \sum_{l \in D_i} x_{il} = 1.$$

б) Пусть $k > d - q_z$. Тогда условие $k > d - q_z$ выполняется для каждой вершины $j \in VP$. Вновь в силу (5) для любого $l \ge k$ и любой $j \in VP$ имеем $x_{jl} = 0$ или, что то же, $\sum\limits_{j \in VP} x_{jk} = 0$

и $\sum\limits_{l=k+1}^{d} x_{il} = 0$. Из $k > d - q_z$ непосредственно следует, что $\{1, 2, \ldots, k-1\} \supset D_z$. Вновь воспользовавшись (1), получаем $\sum\limits_{l=1}^{k-1} x_{zl} = \sum\limits_{l\in D_z} x_{zl} = 1$. В итоге показано, что при $k > d - q_z$ полиэдр M_d принадлежит каждой из трех гиперплоскостей

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 1, \quad \sum_{j\in VP} x_{jk} = 0, \quad \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} = 0.$$

Объединим полученные результаты.

Утверждение 4. *Пусть $P \subset G$ — путь с начальной вершиной i и конечной вершиной z, $k \in D$. Если $k < p_i$, то полиэдр M_d целиком лежит в пересечении гиперплоскостей*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 0, \quad \sum_{j\in VP} x_{jk} = 0, \quad \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} = 1.$$

Если $k > d - q_z$, то полиэдр M_d целиком лежит в пересечении гиперплоскостей

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 1, \quad \sum_{j\in VP} x_{jk} = 0, \quad \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} = 1.$$

Теперь рассмотрим еще два случая, определяемых условиями $p_i \le k \le p_z$ и $d - q_i \le k \le d - q_z$. Для описания результатов, полученных в этих случаях, нам понадобится следующее понятие. Неравенства $a^T x \le a_0$ и $b^T x \le b_0$ *эквивалентны* относительно M_d, если

$$\{x \in M_d \mid a^T x = a_0\} = \{x \in M_d \mid b^T x = b_0\}.$$

в) Пусть $p_i \le k \le p_z$ и для точки $\bar{x}$ выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{k-1} \bar{x}_{zl} + \sum_{j\in VP} \bar{x}_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} \bar{x}_{il} = 1. \tag{10}$$

Из рассуждений, аналогичных проведенным в п. а), получаем, что $\bar{x}_{zl} = 0$ для всех $l < k$. Таким образом, равенство (10) будет иметь вид

$$\sum_{j\in VP} \bar{x}_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} \bar{x}_{il} = 1.$$

г) Пусть $d - q_i \le k \le d - q_z$ и для $\bar{x}$ выполняется равенство (10). Для любого $l > k$ выполняется равенство $\bar{x}_{il} = 0$. Следовательно, левая часть (10) примет вид $\sum\limits_{l=1}^{k-1} \bar{x}_{zl} + \sum\limits_{j\in VP} \bar{x}_{jk}$.

Объединим пп. в) и г).

Утверждение 5. *Пусть $P \subset G$ — путь с начальной вершиной i и конечной вершиной z, $k \in D$. Неравенство*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j\in VP} x_{jl} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \le 1$$

при $p_i \le k \le p_z$ эквивалентно относительно M_d неравенству

$$\sum_{j\in V(P)} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \le 1,$$

а при $d - q_i \le k \le d - q_z$ — неравенству

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in V(P)} x_{jk} \le 1.$$

На этом рассмотрение ситуации $D_i \cap D_z \ne \varnothing$ завершено.

II. Перейдем к рассмотрению случая $D_i \cap D_j = \varnothing$. В этом случае характеристики p_i, q_i, p_z, q_z удовлетворяют неравенствам $p_i \le d - q_i < p_z \le d - q_z$. Случаи $k < p_i$ и $k > d - q_z$ полностью совпадают с утверждением 4. Если $d - q_i \le k \le p_z$, то имеем следующее. Из условия $k \le p_z$ следует, что $x_{zl} = 0$ для любого $l < k$, а из условия $k \ge d - q_i$ следует, что $x_{il} = 0$ для любого $l > k$. Значит, при таком k имеем $\sum\limits_{l=1}^{k-1} x_{zl} = 0$ и $\sum\limits_{l=k+1}^{d} x_{il} = 0$. Отсюда получаем утверждение.

Утверждение 6. *Пусть $P \subset G$ — путь с начальной вершиной i и конечной вершиной z, $d - q_i \le k \le p_z$. Тогда неравенства*

$$\sum_{l=1}^{k-1} x_{zl} + \sum_{j \in VP} x_{jk} + \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \le 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j \in VP} x_{jk} \le 1$$

эквивалентны относительно M_d.

Заключение

Настоящая работа является продолжением ряда работ авторов, посвященных анализу полиэдральных свойств множества расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами. Проведено сравнение отсечений внутри трех классов неравенств, правильных относительно многогранника расписаний. В каждом классе выделены наиболее сильные отсечения. Изучено взаимное расположение многогранника расписаний и порождаемых неравенствами гиперплоскостей. Полученные результаты целесообразно использовать при разработке процедур отсечения для решения оптимизационных задач на рассматриваемом множестве расписаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симанчёв Р.Ю., Соловьева П.В., Уразова И.В.** Аффинная оболочка многогранника расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами // Дискрет. анализ и исследование операций. 2021. Т. 28, № 1. С. 48–67. doi: 10.33048/daio.2021.28.697
2. **Simanchev R.Yu., Urazova I.V.** The polytope of schedules of processing of identical requirements: the properties of the relaxation polyhedron // 20th Internat. Conf. “MOTOR 2021” /eds. A. Strekalovsky et. al. 2021. P. 257–270 (Communications in Computer and Information Science; vol. 1476). doi: 10.1007/978-3-030-86433-0_18
3. **Симанчев Р. Ю., Уразова И. В.** Целочисленная модель задачи минимизации общего времени обслуживания параллельными приборами единичных требований с предшествованиями // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 100–106.
4. **Grotschel M., Wakabayashi Y.** A cutting plane algorithm for a clustering problem // Math. Prog. (Ser. B). 1989. № 45. P. 59–96. doi: 10.1007/BF01589097
5. **Khachai D., Sadykov R., Battaia O., Khachay M.** Precedence constrained generalized traveling salesman problem: Polyhedral study, formulations, and branch-and-cut algorithm // European J. Oper. Res. 2023. Vol. 309, no. 2. P. 488–505. doi: 10.1016/j.ejor.2023.01.039
6. **Balas E.** On the facial structure of sheduling polyhedra // Mathematical Programming Essays in Honor of George B. Dantzig. Part I / ed. R. W. Cottle. 1985. P. 179–218 (Math. Prog. Study, vol. 24). doi: 10.1007/BFb0121051
7. **Mokotoff E.** An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem // Europ. J. Oper. Res. 2004. Vol. 152, no. 3. P. 758–769. doi: 10.1016/S0377-2217(02)00726-9

8. **Queyranne M., Wang Y.** Single-machine scheduling polyhedra with precedence constraints // Mathematics Oper. Res. 1991. № 16. P. 1–20.
9. **Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.** A cutting plane algorithm of single machine scheduling problem with release times // Combinatorial Optimization: New Frontiers in the Theory and Practice / eds. M. Akgül et. al. Berlin: Springer, 1992. P. 63–84 (NATO ASI Series F: Computer and System Science; vol. 82). doi: 10.1007/978-3-642-77489-8_4
10. **Симанчев Р.Ю., Уразова И.В.** Многогранник расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами // Дискрет. анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 11. С. 85–97.
11. **Garey M.R., Johnson D.S.** Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness. NY: W.H. Freeman and co., 1979. 340 p.
12. **Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский В.В.** Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1987. 384 p.
13. **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сибирский журн. исследования операций. Новосибирск, 1994. Т. 1, № 2. С. 18–39.
14. **Christofides N.** Graph theory. An algorithmic approach. NY: Acad. Press., 1975. 400 p.
15. **Brucker P., Knust S.** Complexity results for scheduling problems [e-resource]. URL: www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class .
16. **Симанчев Р.Ю., Уразова И.В.** Класс t-дольных неравенств для многогранника расписаний обслуживания требований параллельными приборами // Proc. of the Workshop on Data, Modeling and Security (DMS-2017) / eds. Sergey V. Belim, Nadezda F. Bogachenko. Omsk, 2017. 5 p. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1965/paper8.pdf .

Поступила 11.05.2023
После доработки 13.06.2023
Принята к публикации 19.06.2023

Симанчев Руслан Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
зав. кафедрой
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского;
Омский науч. центр СО РАН
г. Омск
e-mail: SimanchevRiu@omsu.ru

Уразова Инна Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского
e-mail: UrazovaIV@omsu.ru

REFERENCES

1. Simanchev R. Yu., Solovieva P. V., Urazova I. V. The affine hull of the schedule polytope for servicing identical requests by parallel devices. *J. Appl. Industr. Math.*, 2021, vol. 15, no. 1, pp. 146–157. doi: 10.1134/S1990478921010130
2. Simanchev R.Yu., Urazova I.V. The polytope of schedules of processing of identical requirements: the properties of the relaxation polyhedron. In: *20th Internat. Conf. “MOTOR 2021”*, eds. A. Strekalovsky et al., Ser. Communications in Computer and Information Science, Cham, Springer, 2021, pp. 257–270. doi: 10.1007/978-3-030-86433-0_18
3. Simanchev R. Yu., Urazova I. V. An integer-valued model for the problem of minimizing the total servicing time of unit claims with parallel devices with precedences. *Autom. Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 10, pp. 2102–2108. doi: 10.1134/S0005117910100097
4. Grotschel M., Wakabayashi Y. A cutting plane algorithm for a clustering problem. *Math. Prog. (Ser. B)*, 1989, vol. 45, no. 1–3, pp. 59–96. doi: 10.1007/BF01589097
5. Khachai D., Sadykov R., Battaia O., Khachay M. Precedence constrained generalized traveling salesman problem: Polyhedral study, formulations, and branch-and-cut algorithm. *European J. Oper. Res.*, 2023, vol. 309, no. 2, pp. 488-505. doi: 10.1016/j.ejor.2023.01.039

6. Balas E. On the facial structure of scheduling polyhedra. In: *Mathematiacl Programming Essays in Honor of George B. Dantzig*, Part I, ed. R. W. Cottle, Ser. Math. Progr. Study, vol. 24, Berlin, Heidelberg, Springer, 1985, pp. 179–218. doi: 10.1007/BFb0121051
7. Mokotoff E. An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem. *Europ. J. Oper. Res.*, 2004, vol. 152, no. 3, pp. 758–769. doi: 10.1016/S0377-2217(02)00726-9
8. Queyranne M., Wang Y. Single-machine scheduling polyhedra with precedence constraints. *Mathematics Oper. Res.*, 1991, vol. 16, pp. 1–20.
9. Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W. A cutting plane algorithm of single machine scheduling problem with release times. In: *Combinatorial Optimization: New Frontiers in the Theory and Practice*, eds. M. Akgül et. al. NATO ASI Series F: Computer and System Science, Berlin, Springer, 1992, vol. 82, pp. 63–84. doi: 10.1007/978-3-642-77489-8_4
10. Simanchev R.Yu., Urazova I.V. The polytope of schedules of identical jobs on parallel processors. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2011, vol. 18, no. 1, pp. 85–97 (in Russian).
11. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, NY, W.H. Freeman and co., 1979, 340 p. ISBN: 0-7167-1045-5. Translated to Russian under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Moscow, Mir Publ., 1982, 416 p.
12. Tanaev V.S., Gordon V.S., Shafranskii V.V. *Teoriya raspisanii. Odnostadiinye sistemy* [Theory of schedules. One-stage systems], Moscow, Nauka Publ., 1984, 384 p.
13. Kolokolov A.A. Regular partitionings and cuttings of in integer programming. *Sib. Zhurn. Issled. Oper.*, 1994, vol. 1, no. 2, pp. 18–39 (in Russian).
14. Christofides N. *Graph theory. An algorithmic approach*, NY, Acad. Press, 1975, 400 p. ISBN: 978-0121743505. Translated to Russian under the title *Teoriya grafov. Algoritmicheskii podkhod*, Moscow, Mir Publ, 1978, 432 p.
15. Brucker P., Knust S. *Complexity results for scheduling problems* [e-resource]. Available on: http://www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class .
16. Simanchev R.Yu., Urazova I.V. The class of T-share inequalities for the service schedules of requirements by parallel devices polytope. In: *Proceedings of the Workshop on Data, Modeling and Security (DMS 2017)*, eds. Sergey V. Belim, Nadezda F. Bogachenko, Omsk, Dostoevsky Omsk State University Publ., 2017. 5 p. Available on: http://ceur-ws.org/Vol-1965/paper8.pdf .

Received May 11, 2023

Revised June 13, 2023

Accepted June 19, 2023

Funding Agency: This research was carried out within the state task of the Omsk Scientific Center SB RAS (project registration no. 121022000112-2).

Ruslan Yurievich Simanchev, Dr. Phys.-Math. Sci., Dostoevsky Omsk State University, Omsk, 644077 Russia; Omsk Scientific Center of SB RAS, Omsk, 644025 Russia, e-mail: osiman@rambler.ru .

Inna Vladimirovna Urazova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dostoevsky Omsk State University, Omsk, 644077 Russia, e-mail: urazovainn@mail.ru .

Cite this article as: R. Yu. Simanchev, I. V. Urazova. Comparison and polyhedral properties of valid inequalities for a polytope of schedules for servicing identical requests. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 156–167.