ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 519.658.4

БАРЬЕРЫ И СИММЕТРИЧНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ПРИ АНАЛИЗЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л. Д. Попов

В данной статье автор продолжает исследования по модификации и адаптации классических методов центрального пути в целях приложения их к анализу несобственных задач линейного программирования. В новых конструкциях, представленных ниже, в отличие от разработанных ранее, появляется возможность применения методов оптимизации второго порядка. При этом нет необходимости заранее оговаривать тип несобственности решаемой задачи. Приведены теоремы сходимости построенных методов, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения, представлены данные численных экспериментов.

Ключевые слова: линейное программирование, несобственные задачи, обобщенные решения, метод барьерных функций, регуляризация.

L. D. Popov. Barriers and symmetric regularization of the Lagrange function in the analysis of improper linear programming problems.

In this paper, the author continues his research on the modification and adaptation of classical methods of the central path in order to apply them to the analysis of improper problems of linear programming. In the new constructions presented in the paper, in contrast to those developed earlier, it becomes possible to apply second-order optimization methods. Moreover, there is no need to specify in advance the type of impropriety of the problem being solved. Convergence theorems for the constructed methods are given, a meaningful interpretation of the obtained generalized solution is provided, and the results of numerical experiments are presented.

Keywords: linear programming, improper problems, generalized solutions, barrier function method, regularization.

MSC: 90C05, 90C51, 90C53

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-138-155

Введение

Несобственными называют задачи математического программирования, для которых нарушены основные соотношения двойственности [1; 2]. В линейном программировании (ЛП) единственной причиной такого нарушения служит несовместность системы ограничений в прямой или двойственной задаче либо в обеих задачах одновременно. Несовместность ограничений может быть вызвана как неточностью задания исходных данных задачи, так и наличием реальных противоречий у экономического объекта или феномена, по каким-то причинам не учтенных на текущей стадии моделирования его деятельности [2–5].

В любом случае имеющиеся противоречия должны быть сняты. Поэтому понятно, что от программных средств и комплексов оптимизации в данной ситуации ожидают не просто констатации факта противоречивости исходной постановки, но и полного перечня "узких"мест модели и оценки степени их рассогласования. Еще лучше, если автоматически будут предложены разумные варианты корректировки модели, ее структуры и данных (обычно в задачу стараются внести минимальные поправки), а также найдено решение исправленной задачи для перехода к следующему этапу моделирования (такое решение часто называют обобщенным или аппроксимационным).

В научной литературе разработка и внедрение указанных программных средств и методов ведутся достаточно давно (см. например, [2; 5–13]). Были исследованы различные формальные инструменты анализа и коррекции противоречивых задач ЛП: это и оригинальные схемы двойственности в линейном программировании, и регуляризация задачи по Тихонову, и штрафные функции, и применение многокритериальной оптимизации и многое другое.

В данной статье автор продолжает развивать свой подход к анализу несобственных задач ЛП. Предлагаемые им методы сочетают технику барьерных функций с приемами регуляризации таких задач. В его новых конструкциях, представленных ниже, в отличие от разработанных ранее появляется возможность применения методов оптимизации второго порядка. При этом нет необходимости заранее оговаривать тип несобственности решаемой задачи. В работе представлены теоремы сходимости построенных методов, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения, представлены данные численных экспериментов.

1. Постановка задачи и исходные предположения

Пусть имеются задача линейного программирования

$$\max\{(c,x)\colon Ax \le b,\ x \ge 0\} \tag{1.1}$$

и двойственная к ней задача

$$\min\{(b,y)\colon A^T y \ge c,\ y \ge 0\}; \tag{1.2}$$

здесь векторы $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и числовая матрица $A = (a_{ij})_{m\times n}$ заданы; нужно найти $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор прямых и $y \in \mathbb{R}^m$ — вектор двойственных переменных (неизвестных); круглые скобки используются для обозначения скалярного произведения.

Поскольку в дальнейшем разрешимость исходных задач не будет предполагаться, сразу поясним, что мы будем понимать под их обобщенным решением. Следуя ставшему классическим подходу, разработанному в [2], погрузим задачу (1.1) в параметрическое семейство задач вида

$$\mathtt{opt}(\Delta c, \Delta b) := \max\{(c-\Delta c, x)\colon Ax \le b + \Delta b,\ x \ge 0\}, \tag{1.3}$$

где Δc, Δb — векторные параметры коррекции. Соответственно двойственная задача (1.2) окажется погруженной в параметрическое семейство задач вида

$$\mathtt{opt}^*(\Delta c, \Delta b) := \min\{(b+\Delta b, y)\colon A^T y \ge c - \Delta c,\ y \ge 0\}.$$

Обозначим допустимые множества скорректированных задач через

$$M(\Delta b) = \{x\colon Ax \le b + \Delta b,\ x \ge 0\} \quad \text{и} \quad M^*(\Delta c) = \{y\colon A^T y \ge c - \Delta c,\ y \ge 0\}.$$

Как известно, скорректированные задачи будут разрешимы тогда и только тогда, когда набор векторов коррекции $\omega = (\Delta b, \Delta c)$ принадлежит множеству $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \{\Delta b\colon M(\Delta b) \ne \varnothing\}, \quad \Omega_2 = \{\Delta c:\ M^*(\Delta c) \ne \varnothing\}.$$

Именно для этих наборов векторов коррекции имеет место равенство

$$-\infty < \mathtt{opt}(\Delta c, \Delta b) = \mathtt{opt}^*(\Delta c, \Delta b) < +\infty.$$

Введем векторы оптимальной коррекции

$$\overline{\Delta b} = \arg\min_{\Delta b \in \Omega_1} \|\Delta b\|, \quad \overline{\Delta c} = \arg\min_{\Delta c \in \Omega_2} \|\Delta c\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма соответствующего пространства. Отметим, что в силу очевидной непустоты, выпуклости и замкнутости множеств Ω_1 и Ω_2, векторы $\overline{\Delta b}$ и $\overline{\Delta c}$ существуют и определяются единственным образом [2], что дает нам возможность корректно определить обобщенное (аппроксимационное) решение (либо решения) несобственной задачи (1.1) как обычное решение (решения) задачи

$$\overline{\mathtt{opt}} := \max\{(c - \overline{\Delta c}, x)\colon Ax \le b + \overline{\Delta b},\ x \ge 0\}. \tag{1.4}$$

Аналогично под обобщенным (аппроксимационным) решением (решениями) несобственной задачи (1.2) будем понимать обычное решение (решения) задачи

$$\overline{\mathtt{opt}} := \min\{(b + \overline{\Delta b}, y) \colon A^T y \geq c - \overline{\Delta c},\ y \geq 0\}. \tag{1.5}$$

Подчеркнем, что в случае разрешимости исходных задач имеют место очевидные равенства $\overline{\Delta c} = 0$, $\overline{\Delta b} = 0$ и введенные выше обобщенные решения совпадают с самыми обычными решениями этих задач.

В общем случае векторы $\overline{\Delta b}$ и $\overline{\Delta c}$, будучи проекциями нуля на выпуклые замкнутые множества Ω_1 и Ω_2, удовлетворяют специальным неравенствам

$$(\overline{\Delta b}, \overline{\Delta b} - \Delta b) \leq 0 \quad (\forall \Delta b \in \Omega_1) \quad \text{и} \quad (\overline{\Delta c}, \overline{\Delta c} - \Delta c) \leq 0 \quad (\forall \Delta c \in \Omega_2)$$

или, что то же самое, неравенствам

$$\|\overline{\Delta b} - \Delta b\|^2 \leq (\Delta b, \Delta b - \overline{\Delta b}) \quad (\forall \Delta b \in \Omega_1) \quad \text{и} \quad \|\overline{\Delta c} - \Delta c\|^2 \leq (\Delta c, \Delta c - \overline{\Delta c}) \quad (\forall \Delta c \in \Omega_2).$$

В завершение постановочной части укажем на альтернативное представление допустимых областей скорректированных задач (1.4), (1.5) в виде

$$M(\overline{\Delta b}) = \operatorname{Arg}\min_{x \geq 0} \|(Ax - b)^+\|, \quad M^*(\overline{\Delta c}) = \operatorname{Arg}\min_{y \geq 0} \|(c - A^T y)^+\|,$$

где “+” над вектором означает операцию его положительной срезки (замены его отрицательных координат нулями). Это является связующим звеном между обсуждаемой тематикой и теорией штрафных функций (см., например, [2; 14]).

2. Регуляризованная функция Лагранжа

Решение задач (1.1) и (1.2) традиционно связывают с понятием седловой точки их функции Лагранжа

$$L(x, y) = (c, x) - (y, Ax - b), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Напомним, что точка $(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$ называется седловой для этой функции, если

$$L(x, \overline{y}) \leq L(\overline{x}, \overline{y}) \leq L(\overline{x}, y) \quad \forall x \geq 0,\ \forall y \geq 0.$$

Если такая точка найдена, то ее компоненты $\overline{x}$ и $\overline{y}$ есть решения исходных задач (1.1) и (1.2) соответственно, и наоборот, любая пара оптимальных векторов этих задач образует свою седловую точку функции $L(x, y)$ [15].

Однако при неразрешимости (несобственности) исходных задач классическая функция Лагранжа не имеет седловых точек в своей области определения. Поэтому возникла необходимость найти другой инструмент исследования таких задач, и в [2;8] на роль такого инструмента была предложена функция Лагранжа, симметрично регуляризованная по обеим переменным в духе Тихонова

$$L^\sigma(x, y) = (c, x) - (y, Ax - b) - \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0; \tag{2.1}$$

здесь $\sigma = (\alpha, \beta) > 0$ — набор малых параметров регуляризации.

Регуляризованная функция, будучи сильно вогнутой по прямым переменным и сильно выпуклой по двойственным переменным, имеет седловые точки уже вне зависимости от разрешимости или неразрешимости задач (1.1), (1.2), причем эти точки в случае неразрешимости исходных задач дают основу для хороших приближений к их обобщенным решениям.

А именно обозначим через $\overline{x}$ минимальный по норме оптимальный вектор задачи (1.4), а через $\overline{y}$ — минимальный по норме оптимальный вектор двойственной к ней задачи (1.5).

Пусть (x^σ, y^σ) — седловая точка регуляризованной функции Лагранжа (2.1). Как показано в работе [8], имеют место оценки

$$\|(Ax^\sigma - \ b \ - \overline{\Delta b})^+\| \le \sqrt{\beta}\big(\|\overline{y}\| + K_0(\sigma)\big), \quad \|(c - A^T y^\sigma - \overline{\Delta c})^+\| \le \sqrt{\alpha}\big(\|\overline{x}\| + K_0(\sigma)\big),$$

$$\max\{|(c - \overline{\Delta c}, x^\sigma) - \overline{\mathtt{opt}}|, \, |(b + \overline{\Delta b}, y^\sigma) - \overline{\mathtt{opt}}|\} \le \max\{\|\overline{x}\|, \|\overline{y}\|\} K_3(\sigma),$$

где

$$K_0(\sigma) = \sqrt{\alpha\|\overline{x}\|^2 + \beta\|\overline{y}\|^2}, \quad K_1(\sigma) = \sqrt{\beta}\|\overline{y}\| + K_0(\sigma), \quad K_2(\sigma) = \sqrt{\alpha}\|\overline{x}\| + K_0(\sigma),$$

$$K_3(\sigma) = \max\big\{\sqrt{\alpha}\|\overline{x}\| K_2(\sigma), \sqrt{\beta}\|\overline{y}\| K_1(\sigma)\big\}.$$

Таким образом, при $\sigma = (\alpha, \beta) \to +0$ обобщенная последовательность точек $\{x^\sigma\}$ сходится по расстоянию к оптимальному множеству задачи (1.4), а обобщенная последовательность точек $\{y^\sigma\}$ — к оптимальному множеству задачи (1.5) тоже по расстоянию (при этом в несобственном случае хотя бы одна из этих последовательностей не ограничена).

Завершая краткий обзор свойств функции (2.1), отметим в качестве некоторого ее недостатка невозможность применить для поиска ее седловых точек итерационные методы второго порядка (здесь приходится ограничить себя градиентными методами типа Эрроу — Гурвица и им подобными). Преодолеть этот недостаток можно за счет включения в регуляризованную функцию Лагранжа дополнительных слагаемых барьерного типа.

3. Добавление в функцию Лагранжа барьерных слагаемых

Построим расширенную функцию Лагранжа вида

$$\underline{L}^\nu(x, y) = L(x, y) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \frac{\beta}{2}\|y\|^2 + \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \epsilon_2 \sum_{j=1}^{m} \ln y_j, \tag{3.1}$$

где $\nu = (\alpha, \beta, \epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ — набор малых числовых параметров. Здесь к обычной регуляризованной функции (2.1), в которой для удобства параметры регуляризации поделены пополам, добавлены еще два логарифмических слагаемых, которые играют роль барьеров, запрещающих переменным x и y покидать неотрицательные ортанты соответствующих пространств.

Очевидно, функция (3.1) сохраняет свойство сильной вогнутости по прямым переменным и сильной выпуклости по двойственным переменным. Кроме того, она является собственной и замкнутой по терминологии [16] и потому при всяком конкретном наборе параметров $\nu > 0$ также имеет единственную седловую точку $(x^\nu, y^\nu) > 0$ в области своего определения, т. е. точку, для которой выполнены неравенства

$$\underline{L}^\nu(x, y^\nu) \le \underline{L}^\nu(x^\nu, y^\nu) \le \underline{L}^\nu(x^\nu, y) \ \ \forall x > 0, \ \ y > 0.$$

В плане вычисления седловая точка функции (3.1) может быть найдена (и это очень удобно) из решения достаточно простой системы нелинейных уравнений

$$\nabla_x \underline{L}^\nu(x, y) = c - A^T y - \alpha x + \epsilon_1 X^{-1} e = 0, \quad x > 0, \tag{3.2}$$

$$\nabla_y \underline{L}^\nu(x, y) \ = \ b - Ax \ + \ \beta y - \epsilon_2 Y^{-1} e = 0, \quad y > 0, \tag{3.3}$$

где для краткости использованы обозначения $X = \mathrm{diag}(x)$, $Y = \mathrm{diag}(y)$, $\mathrm{diag}(a)$ — диагональная матрица с компонентами вектора a на своей диагонали, $e = (1, 1, \dots, 1)$ — вектор нужной размерности, составленный из единиц. Система (3.2), (3.3) имеет много сходного с уравнениями, описывающими классический центральный путь для пары исходных постановок (1.1), (1.2) (см. [17]).

Рассмотрим свойства седловых точек функции $\underline{L}^\nu(x,y)$, или, что то же самое, свойства решений системы (3.2), (3.3) при $\nu = (\alpha,\beta,\epsilon_1,\epsilon_2) \to +0$.

Выпишем двойственную пару симметрично скорректированных задач

$$\max\{(c-\alpha x^\nu, x)\colon Ax \le b+\beta y^\nu,\ x \ge 0\}, \tag{3.4}$$

$$\min\{(b+\beta y^\nu, y)\colon A^T y \ge c-\alpha x^\nu,\ y \ge 0\}. \tag{3.5}$$

Утверждение 1. *Пусть набор векторов* (x^ν, y^ν) *удовлетворяет системе соотношений* (3.2), (3.3). *Тогда вектор* x^ν *оказывается допустимым для задачи* (3.4), *а вектор* y^ν *— допустимым для двойственной к ней задачи* (3.5). *При этом*

$$(c-\alpha x^\nu, x^\nu) \ge \mathtt{opt}(3.4) - n\epsilon_1 - m\epsilon_2 \quad \textit{и} \quad (b+\beta y^\nu, y^\nu) \le \mathtt{opt}(3.4) + n\epsilon_1 + m\epsilon_2.$$

Доказательство. Допустимость указанных векторов для задач (3.4) и (3.5) вытекает из их положительности и того, что в силу соотношений (3.2), (3.3)

$$Ax^\nu - b - \beta y^\nu = -\epsilon_2 Y_\nu^{-1} e \le 0 \quad \text{и} \quad A^T y^\nu - c + \alpha x^\nu = \epsilon_1 X_\nu^{-1} e \ge 0.$$

Далее, исходя этих же соотношений имеем $c-\alpha x^\nu = A^T y^\nu - \epsilon_1 X_\nu^{-1} e$ и $b+\beta y^\nu = Ax^\nu + \epsilon_2 Y_\nu^{-1} e$, откуда следует

$$\underbrace{(b+\beta y^\nu, y^\nu) - \mathtt{opt}(3.4)}_{\ge 0} + \underbrace{\mathtt{opt}(3.4) - (c-\alpha x^\nu, x^\nu)}_{\ge 0}$$

$$= (b+\beta y^\nu, y^\nu) - (c-\alpha x^\nu, x^\nu) = (Ax^\nu + \epsilon_2 Y_\nu^{-1} e, y^\nu) - (A^T y^\nu - \epsilon_1 X_\nu^{-1} e, x^\nu)$$

$$= n\epsilon_1 + m\epsilon_2,$$

что и доказывает наше утверждение[1].

Таким образом, векторы коррекции $\Delta b = \beta y^\nu$ и $\Delta c = \alpha x^\nu$, получаемые на основе седловой точки расширенной функции Лагранжа (3.1), приводят исходную несобственную задачу к разрешимому виду, а ее компоненты x^ν и y^ν являются субоптимальными для отвечающих им задач (3.4), (3.5) соответственно.

Итак, $\Delta b = \beta y^\nu \in \Omega_1$ и $\Delta c = \alpha x^\nu \in \Omega_2$.

На самом деле, как показано далее, в пределе $\Delta b = \beta y^\nu \to \overline{\Delta b}$, $\Delta c = \alpha x^\nu \to \overline{\Delta c}$, и мы получаем приближения к обобщенным решениям исходных задач, если те являются несобственными (или к их обычным решениям в случае их разрешимости).

Утверждение 2. *Пусть пара векторов* (x^ν, y^ν) *удовлетворяет системе соотношений* (3.2), (3.3). *Тогда*

$$\max\bigl(\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|\bigr) \le \gamma N_1 + \sqrt{\gamma N_2(\nu)},$$

где

$$N_1 = 2\max(\|\overline{x}\|, \|\overline{y}\|), \quad N_2(\nu) = n\epsilon_1 + m\epsilon_2, \quad \gamma = \max(\alpha,\beta).$$

Таким образом,

$$\Delta c = \alpha x^\nu \to \overline{\Delta c}, \quad \Delta b = \beta y^\nu \to \overline{\Delta b}$$

при $\nu = (\alpha,\beta,\epsilon_1,\epsilon_2) \to +0$.

[1] В дальнейшем мы постоянно будет использовать прием выражения одних слагаемых из соотношений (3.2), (3.3) через другие.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось в постановочной части работы, по свойствам проекции нуля на выпуклое замкнутое множество при всех $\Delta b \in \Omega_1$, $\Delta c \in \Omega_2$ выполняются неравенства $\|\overline{\Delta b} - \Delta b\|^2 \le (\Delta b, \Delta b - \overline{\Delta b})$ и $\|\overline{\Delta c} - \Delta c\|^2 \le (\Delta c, \Delta c - \overline{\Delta c})$. А поскольку выше установлено, что $\Delta b = \beta y^\nu \in \Omega_1$ и $\Delta c = \alpha x^\nu \in \Omega_2$ (в силу утверждения 1), то

$$\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2 \le (\beta y^\nu, \beta y^\nu - \overline{\Delta b})$$

$$\le (\beta y^\nu, \beta y^\nu + b - A\overline{x}) = (\beta y^\nu, \underbrace{\beta y^\nu + b - Ax^\nu}_{=\epsilon_2 Y_\nu^{-1} e} + Ax^\nu - A\overline{x}) = \epsilon_2 \beta m + \beta(A^T y^\nu, x^\nu - \overline{x}),$$

и

$$\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 \le (\alpha x^\nu, \alpha x^\nu - \overline{\Delta c})$$

$$\le (\alpha x^\nu, \alpha x^\nu - c + A^T\overline{y}) = (\alpha x^\nu, \underbrace{\alpha x^\nu - c + Ay^\nu}_{=\epsilon_1 X_\nu^{-1} e} - Ay^\nu + A^T\overline{y}) = \epsilon_1 \alpha n - \alpha(Ax^\nu, y^\nu - \overline{y}).$$

Сложим два этих неравенства почленно, предварительно поделив первое из них на $\beta > 0$, а второе — на $\alpha > 0$. Получим

$$\frac{1}{\beta}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 \le m\epsilon_2 + (A^T y^\nu, x^\nu - \overline{x}) + n\epsilon_1 - (Ax^\nu, y^\nu - \overline{y})$$

$$= n\epsilon_1 + m\epsilon_2 - (\overline{x}, A^T y^\nu) + (\overline{y}, Ax^\nu)$$

$$= n\epsilon_1 + m\epsilon_2 - (\overline{x}, \underbrace{c - \alpha x^\nu + \epsilon_1 X_\nu^{-1} e}_{=A^T y^\nu}) + (\overline{y}, \underbrace{b + \beta y^\nu - \epsilon_2 Y_\nu^{-1}}_{=Ax^\nu})$$

$$\le n\epsilon_1 + m\epsilon_2 - (\overline{x}, c - \alpha x^\nu) + (\overline{y}, b + \beta y^\nu)$$

$$= n\epsilon_1 + m\epsilon_2 + \underbrace{(\overline{y}, b + \overline{\Delta b}) - (\overline{x}, c - \overline{\Delta c})}_{=0} + (\overline{y}, \beta y^\nu - \overline{\Delta b}) - (\overline{x}, \overline{\Delta c} - \alpha x^\nu)$$

$$\le n\epsilon_1 + m\epsilon_2 + \|\overline{y}\| \cdot \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\| + \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|$$

$$\le n\epsilon_1 + m\epsilon_2 + 2\max(\|\overline{x}\|, \|\overline{y}\|) \cdot \max\bigl(\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|\bigr).$$

Умножим левую и правую части полученного неравенства на $\gamma = \max(\alpha, \beta) > 0$ и применим результат для оценки величины

$$\max\bigl(\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|\bigr)^2$$

$$\le \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2 + \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 \le \gamma\beta^{-1}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2 + \gamma\alpha^{-1}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2$$

$$\le \gamma(n\epsilon_1 + m\epsilon_2) + 2\gamma\max(\|\overline{x}\|, \|\overline{y}\|) \cdot \max\bigl(\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|\bigr).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\gamma\beta^{-1} \ge 1$ и $\gamma\alpha^{-1} \ge 1$.

Обозначим

$$\lambda = \max\bigl(\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|\bigr), \quad N_1 = 2\max(\|\overline{x}\|, \|\overline{y}\|), \quad N_2(\nu) = n\epsilon_1 + m\epsilon_2.$$

Тогда последнее неравенство примет очень простой вид $\lambda^2 \le \gamma N_1 \lambda + \gamma N_2(\nu)$, отсюда вытекает искомое

$$\max\bigl(\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|\bigr) = \lambda \le \frac{\gamma N_1}{2} + \sqrt{\frac{(\gamma N_1)^2}{4} + \gamma N_2(\nu)} \le \gamma N_1 + \sqrt{\gamma N_2(\nu)}.$$

В данном случае и выше применены простые соотношения $\max(|a|,|b|) \le |a|+|b| \le 2\max(|a|,|b|)$ и $\sqrt{|a|+|b|} \le \sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}$. Предположим, что $\nu=(\alpha,\beta,\epsilon_1,\epsilon_2)\to +0$. Соответственно

$$0 \le \lambda = \max\bigl(\|\overline{\Delta b}-\beta y^\nu\|, \|\overline{\Delta c}-\alpha x^\nu\|\bigr) \le \gamma N_1 + \sqrt{\gamma N_2(\nu)} \to 0.$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. *Пусть векторы* $x^\nu > 0$, $y^\nu > 0$ *удовлетворяют системе соотношений* (3.2), (3.3) *и пусть* $\nu=(\alpha,\beta,\epsilon_1,\epsilon_2)\to +0$. *Тогда*

$$\|(Ax^\nu - b - \overline{\Delta b})^+\| \to 0, \quad \|(c-\overline{\Delta c}-A^Ty^\nu)^+\| \to 0,$$

$$|(c-\overline{\Delta c}, x^\nu) - \overline{\mathtt{opt}}| + |\overline{\mathtt{opt}} - (b+\overline{\Delta b}, y^\nu)| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, в силу соотношений (3.2), (3.3) и последнего утверждения имеем

$$Ax^\nu - b - \overline{\Delta b} = \beta y^\nu - \overline{\Delta b} - \epsilon_2 Y_\nu^{-1} e < \beta y^\nu - \overline{\Delta b} \to 0,$$

$$c + \overline{\Delta c} - A^T y^\nu = \alpha x^\nu - \overline{\Delta c} - \epsilon_1 X_\nu^{-1} e < \alpha x^\nu - \overline{\Delta c} \to 0.$$

Также

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \|\overline{y}\|\cdot\|(Ax^\nu - b - \overline{\Delta b})^+\| &\ge (c-\overline{\Delta c}, x^\nu) - \overline{\mathtt{opt}} \\ = (c-\alpha x^\nu, x^\nu) - \mathtt{opt}(3.4) &+ \frac{1}{\alpha}\underbrace{(\alpha x^\nu - \overline{\Delta c}, \alpha x^\nu)}_{\ge 0} + \mathtt{opt}(3.4) - \overline{\mathtt{opt}} \\ &\ge -n\epsilon_1 - m\epsilon_2 + \mathtt{opt}(3.4) - \overline{\mathtt{opt}} \to 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow -\|\overline{x}\|\cdot\|(A^T y^\nu - c + \overline{\Delta c})^+\| &\le (b+\overline{\Delta b}, y^\nu) - \overline{\mathtt{opt}} \\ = (b+\beta y^\nu, y^\nu) - \mathtt{opt}(3.5) &- \frac{1}{\beta}\underbrace{(\beta y^\nu - \overline{\Delta b}, \beta y^\nu)}_{\ge 0} + \mathtt{opt}(3.5) - \overline{\mathtt{opt}} \\ &\le n\epsilon_1 + m\epsilon_2 + \mathtt{opt}(3.5) - \overline{\mathtt{opt}} \to 0. \end{aligned}$$

Здесь снова учтены свойства проекции нуля на выпуклое замкнутое множество, а также непрерывность и субдифференцируемость единой функции оптимального значения задач (1.4), (1.5) в области их разрешимости (эта функция, как известно, выпукла по Δb и вогнута по Δc [15;16]).

Таким образом векторы x^ν сходятся по расстоянию к оптимальному множеству задачи (1.4), а векторы y^ν — к оптимальному множеству задачи (1.5). При этом в несобственном случае хотя бы одна из этих последовательностей окажется неограниченной (неограниченным будет и оптимальное множество, к которому эта последовательность сходится по расстоянию).

Перейдем к обсуждению алгоритмических аспектов предлагаемого метода.

4. Алгоритмические аспекты нового метода

Представим систему уравнений (3.2), (3.3) в виде

$$\Phi_\nu(z) = \begin{pmatrix} \alpha x - c + A^T y - \epsilon_1 X^{-1} e \\ \beta y - Ax + b - \epsilon_2 Y^{-1} e. \end{pmatrix} = 0, \quad z=(x,y)>0. \tag{4.1}$$

Применим для решения этой системы метод Ньютона, который генерирует последовательность приближений по правилам

$$z^{(0)} > 0, \quad z^{(k+1)} = z^{(k)} - \tau_k\Bigl(\nabla\Phi_\nu(z^{(k)})\Bigr)^{-1}\Phi_\nu(z^{(k)}), \quad k=0,1,2\dots . \tag{4.2}$$

Шаговый параметр τ_k берется обычно равным 1.

Якобиан системы положительно определен и вычисляется по простой формуле

$$\nabla\Phi_\nu(z) = \begin{pmatrix} D_{1,\nu} & A^T \\ -A & D_{2,\nu} \end{pmatrix},$$

где $D_{1,\nu} = \alpha E + \epsilon_1 X^{-2}$, $D_{2,\nu} = \beta E + \epsilon_2 Y^{-2}$, $E = \mathrm{diag}(e)$ — единичные матрицы нужного порядка. Соответственно

$$\Big(\nabla\Phi_\nu(z)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} D_{1,\nu}^{-1}\big(E - A^T Q_\nu A D_{1,\nu}^{-1}\big) & -D_{1,\nu}^{-1} A^T Q_\nu \\ -Q_\nu A D_{1,\nu}^{-1} & Q_\nu \end{pmatrix},$$

где $Q_\nu = P_\nu^{-1}, P_\nu = D_{2,\nu} + A D_{1,\nu}^{-1} A^T$.

Как мы видим, основная сложность алгоритма (4.2) заключается в необходимости обращения на каждой его итерации нетривиальной матрицы P_ν размера $m \times m$ (обращение диагональной матрицы $D_{1,\nu}$ не составляет труда).

Наряду с выписанными выше формулами можно рассмотреть и альтернативный процесс.

Введем в систему (3.1), (3.2) дополнительные переменные $u = \epsilon_1 X^{-1} e$ и $v = \epsilon_2 Y^{-1} e$. Получим эквивалентную ей систему уравнений

$$\Psi_\nu(w) = \begin{pmatrix} \alpha x - c + A^T y - u \\ \beta y - Ax + b - v \\ Ux - \epsilon_1 e \\ Vy - \epsilon_2 e \end{pmatrix} = 0, \quad w = (x, y, u, v) > 0. \tag{4.3}$$

Здесь также используются сокращения $U = \mathrm{diag}(u)$, $V = \mathrm{diag}(v)$.

Посмотрим, как будет выглядеть метод Ньютона для новой системы уравнений, число переменных у которой выросло вдвое. Как всегда, метод генерирует последовательность приближений по правилу

$$w^{(0)} > 0, \quad w^{(k+1)} = w^{(k)} - \tau_k p^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2\dots,$$

где τ_k — шаговый параметр (обычно 1), а направление спуска $p^{(k)} = (p_x, p_y, p_u, p_v)$ определяется из решения разреженной блочной системы линейных уравнений

$$\nabla\Psi_\nu(z^{(k)})p = \begin{pmatrix} \alpha E & A^T & -E & 0 \\ -A & \beta E & 0 & -E \\ U_k & 0 & X_k & 0 \\ 0 & V_k & 0 & Y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \Psi_\nu(z^{(k)}). \tag{4.4}$$

Решение системы (4.4), несмотря на ее большую размерность, получается не сложнее, чем поиск направления спуска в предыдущей схеме алгоритма. В самом деле, методом исключения Гаусса эта система может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} \alpha E & A^T & -E & 0 \\ -A & \beta E & 0 & -E \\ E & H_k X_k A^T & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_u \\ p_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ H_k(h_3 + X_k h_1) \\ G_k\big(h_4 + Y_k h_2 + Y_k A H_k(h_3 + X_k h_1)\big) \end{pmatrix}.$$

где E — единичные матрицы нужного порядка,

$$H_k = \big(U_k + \alpha X_k\big)^{-1}, \quad G_k = \big(V_k + \beta Y_k + Y_k A H_k X_k A^T\big)^{-1}.$$

Отсюда вытекает

Утверждение 3. *Решение системы* (4.4) *можно найти последовательно по формулам*

$$p_y = G_k\big(h_4 + Y_k h_2 + Y_k A H_k(h_3 + X_k h_1)\big),$$

$$p_x = H_k(h_3 + X_k h_1) - H_k X_k A^T p_y,$$

$$p_u = \alpha p_x + A^T p_y - h_1,$$

$$p_v = \beta p_y - A p_x - h_2.$$

Таким образом, и здесь на каждой итерации обращается единственная нетривиальная матрица того же размера, что и в схеме (4.2), но, как показали вычислительные эксперименты, теперь метод стал более быстрым из-за расширения области его эффективной сходимости. Также повысилась его устойчивость к ошибкам округления и способность работать при меньших значениях параметров регуляризации.

5. Управление погрешностями вычислений

Метод Ньютона эффективно сходится лишь в достаточно малой окрестности искомого решения, которая в нашем случае зависит от величины штрафных параметров и параметров регуляризации. Поскольку начальные приближения обычно выбираются достаточно произвольно и могут далеко отстоять от точного решения, на практике принято начинать счет с умеренных значений этих параметров, лишь постепенно и плавно уменьшая их от итерации к итерации по мере снижения невязки (рассогласования) решаемой системы в текущей точке итерационного процесса. Возникает вопрос: как согласовывать значения параметров регуляризации и штрафа с текущей точностью получаемого решения?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, введем в нашу систему уравнений (4.3) дополнительные параметры, управляющие допусками на погрешности вычислений:

$$-\epsilon_3 e \le u - \alpha x + c - A^T y \le \epsilon_3 e, \quad 0 < u_i x_i \le (1+\delta_1)\epsilon_1 \ \ (i = 1,\dots,n), \tag{5.1}$$

$$-\epsilon_4 e \le v - \beta y + A x - b \le \epsilon_4 e, \quad 0 < v_j y_j \le (1+\delta_2)\epsilon_2 \ \ (j = 1,\dots,m). \tag{5.2}$$

Здесь переменные x, u, y, v по-прежнему являются положительными, а символ e означает вектор подходящей размерности, составленный из 1. При этом набор малых параметров метода расширился (сохраним за ним принятое обозначение $\nu = (\alpha, \beta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) > 0$). Также появились два новых параметра $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, которые мы будем считать просто константами.

Заметим, что точные решения систем (4.1) и (4.3) с очевидностью удовлетворяют выписанным неравенствам с некоторым запасом, так что их выполнение всякий раз может быть достигнуто за конечное число итераций метода Ньютона, примененного к ним.

Посмотрим, как скажутся введенные нами погрешности на свойствах последовательностей, составленных теперь уже из решений системы неравенств (5.1), (5.2).

Начнем с аналога утверждению 1.

Выпишем следующую пару скорректированных постановок:

$$\max\{(c - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e, x)\colon Ax \le b + \beta y^\nu + \epsilon_4 e,\ x \ge 0\,\}, \tag{5.3}$$

$$\min\{(b + \beta y^\nu + \epsilon_4 e, y)\colon A^T y \ge c - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e,\ y \ge 0\,\}. \tag{5.4}$$

Утверждение 4. *Пусть набор положительных векторов* $(x^\nu, u^\nu, y^\nu, v^\nu)$ *удовлетворяет системе соотношений* (5.1), (5.2). *Тогда вектор* x^ν *допустим для задачи* (5.3), *а вектор* y^ν *— для двойственной к ней задачи* (5.4). *При этом*

$$(c - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e, x^\nu) - \mathtt{opt}(5.3) \ge -n(1+\delta_1)\epsilon_1 - m(1+\delta_2)\epsilon_2 - 2\epsilon_3\|x^\nu\| - 2\epsilon_4\|y^\nu\|,$$

$$(b + \beta y^\nu + \epsilon_4 e, y^\nu) - \mathtt{opt}(5.4) \ \le\ n(1+\delta_1)\epsilon_1 \ +\ m(1+\delta_2)\epsilon_2 + 2\epsilon_3\|x^\nu\| + 2\epsilon_4\|y^\nu\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. элементарно и дословно повторяет прежние рассуждения.

Таким образом, векторы x^ν и y^ν, получаемые на основе приближенной системы (5.1), (5.2), являются субоптимальными для задач (5.3) и (5.4) соответственно (правда, с большей погрешностью, чем это было при точных вычислениях).

Далее будем пользоваться сокращением $\epsilon_1' = (1+\delta_1)\epsilon_1$ и $\epsilon_2' = (1+\delta_2)\epsilon_2$.

Утверждение 5. *Пусть набор положительных векторов* $(x^\nu, u^\nu, y^\nu, v^\nu)$ *удовлетворяет системе соотношений* (5.1), (5.2). *Тогда*

$$0 < \lambda = \max\bigl(\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|, \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|\bigr) \le \gamma N_3(\nu) + \sqrt{\gamma N_4(\nu)},$$

где

$$N_3(\nu) = 2\max\Bigl\{\Bigl(\frac{5\epsilon_3}{\alpha} + \|\overline{x}\|\Bigr), \Bigl(\frac{5\epsilon_4}{\beta} + \|\overline{y}\|\Bigr)\Bigr\},$$

$$N_4(\nu) = \epsilon_1' n + \epsilon_2' m + \frac{2\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c}\| + \frac{2\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b}\| + \epsilon_3\|\overline{x}\| + \epsilon_4\|\overline{y}\|,$$

$$\gamma = \max(\alpha, \beta),$$

Д о к а з а т е л ь с т в о в целом следует схеме доказательства утверждения 2. Начнем с оценки величины $\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|$. С одной стороны, имеет место простое неравенство

$$\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 - 2\epsilon_3\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\| + \epsilon_3^2 \le \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 - 2(\epsilon_3 e, \overline{\Delta b} - \beta y^\nu) + \epsilon_3^2 = \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e\|^2.$$

С другой стороны, уже доказано, что $\alpha x^\nu + \epsilon_3 e \in \Omega_2$, и по уже упоминавшемуся выше свойству операции проектирования на выпуклое замкнутое множество имеем

$$\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e\|^2 \le (\alpha x^\nu + \epsilon_3 e,\, \alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c})$$

$$= (\alpha x^\nu,\, \alpha x^\nu - \overline{\Delta c}) + 2\epsilon_3(e,\, \alpha x^\nu - \overline{\Delta c}) + \epsilon_3(e,\, \overline{\Delta c}) + \epsilon_3^2$$

$$\le (\alpha x^\nu,\, \alpha x^\nu - \overline{\Delta c}) + 2\epsilon_3\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\| + \epsilon_3\|\overline{\Delta c}\| + \epsilon_3^2.$$

Далее заметим, что

$$(\alpha x^\nu, \alpha x^\nu - \overline{\Delta c}) = (\alpha x^\nu, \underbrace{\alpha x^\nu - c + A^T y^\nu}_{\le u^\nu + \epsilon_3 e} - A^T y^\nu + \underbrace{c - \overline{\Delta c}}_{\le A^T\overline{y}})$$

$$\le \alpha\epsilon_1' n + \epsilon_3(\|\alpha x^\nu - \overline{\Delta c}\| + \|\overline{\Delta c}\|) - \alpha(Ax^\nu, y^\nu - \overline{y}).$$

Сведя все эти неравенства воедино, придем к соотношению

$$\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 \le \alpha\epsilon_1' n + 5\epsilon_3\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\| + 2\epsilon_3\|\overline{\Delta c}\| - \alpha(Ax^\nu, y^\nu - \overline{y})$$

или, что то же,

$$\frac{1}{\alpha}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 \le \epsilon_1' n + \frac{5\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\| + \frac{2\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c}\| - (Ax^\nu, y^\nu - \overline{y}).$$

Аналогично получается симметричное неравенство (подробности опустим)

$$\frac{1}{\beta}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2 \le \epsilon_2' m + \frac{5\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\| + \frac{2\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b}\| + (A^T y^\nu, x^\nu - \overline{x}).$$

Сложим эти два неравенства почленно:

$$\mathcal{H}(\nu) := \frac{1}{\alpha}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 + \frac{1}{\beta}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2$$

$$\leq \epsilon_1' n + \frac{5\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\| + \frac{2\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c}\| + \epsilon_2' m \tag{5.5}$$

$$+ \frac{5\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\| + \frac{2\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b}\| + \frac{2\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b}\| + (Ax^\nu, \overline{y}) - (A^T y^\nu, \overline{x}).$$

Опираясь на соотношения (5.1), (5.2), оценим в последнем неравенстве два последних слагаемых. Получим

$$(\overline{y}, Ax^\nu) \leq (\overline{y}, b + \beta y^\nu - v^\nu + \epsilon_4 e) = (\overline{y}, b + \beta y^\nu - \overline{\Delta b} + \overline{\Delta b} - v^\nu + \epsilon_4 e)$$

$$\leq (\overline{y}, b + \overline{\Delta b}) + (\overline{y}, \beta y^\nu - \overline{\Delta b}) - (\overline{y}, v^\nu) + \epsilon_4\|\overline{y}\|$$

$$\leq (\overline{y}, b + \overline{\Delta b}) + \|\overline{y}\| \cdot \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\| + \epsilon_4\|\overline{y}\|$$

и (по аналогии)

$$-(\overline{x}, A^T y^\nu) \leq (\overline{x}, \overline{\Delta c} - c) + \|\overline{x}\| \cdot \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\| + \epsilon_3\|\overline{x}\|.$$

Это приводит нас к продолжению оценки (5.5):

$$\mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{\alpha}\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 + \frac{1}{\beta}\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2$$

$$\leq \epsilon_1' n + \epsilon_2' m + + \Big(\frac{5\epsilon_3}{\alpha} + \|\overline{x}\|\Big)\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|$$

$$+ \Big(\frac{5\epsilon_4}{\beta} + \|\overline{y}\|\Big)\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\| + \frac{2\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c}\| + \frac{2\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b}\| + \epsilon_3\|\overline{x}\| + \epsilon_4\|\overline{y}\|$$

$$\leq N_3(\nu) \cdot \max\big(\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|, \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|\big) + N_4(\nu),$$

где

$$N_3(\nu) = 2\max\Big\{\Big(\frac{5\epsilon_3}{\alpha} + \|\overline{x}\|\Big), \Big(\frac{5\epsilon_4}{\beta} + \|\overline{y}\|\Big)\Big\},$$

$$N_4(\nu) = \epsilon_1' n + \epsilon_2' m + \frac{2\epsilon_3}{\alpha}\|\overline{\Delta c}\| + \frac{2\epsilon_4}{\beta}\|\overline{\Delta b}\| + \epsilon_3\|\overline{x}\| + \epsilon_4\|\overline{y}\|.$$

Вновь обозначаем $\gamma = \max(\alpha, \beta)$ и проводим заключительную оценку

$$\Big(\max\big(\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|, \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|\big)\Big)^2 \leq \|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2 + \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2$$

$$\leq \gamma\left[\frac{\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|^2}{\alpha} + \frac{\|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|^2}{\beta}\right] = \gamma\,\mathcal{H}(\nu)$$

$$\leq \gamma N_3(\nu) \cdot \max\big(\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|, \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|\big) + \gamma N_4(\nu),$$

Здесь мы снова воспользовались тем, что $\gamma/\alpha \geq 1$, $\gamma/\beta \geq 1$.

Итак, для величины $\lambda = \max\big(\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|, \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|\big)$ имеем квадратное неравенство

$$\lambda^2 \leq \gamma N_3(\nu)\lambda + \gamma N_4(\nu),$$

откуда традиционно следует искомое $0 < \lambda \leq \gamma N_3(\nu) + \sqrt{\gamma N_4(\nu)}$.

Утверждение доказано.

Осталось привести условия согласования параметров регуляризации, штрафных параметров и допусков на погрешности вычислений, гарантирующих сходимость предложенного метода.

Следствие 2. *Пусть в системе* (5.1), (5.2) *параметры* $\nu = (\alpha, \beta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) \to +0$, *причем* $\epsilon_3 = o(\alpha)$, $\epsilon_4 = o(\beta)$. *Тогда*

$$\|(Ax^\nu - b - \overline{\Delta b})^+\| \to 0, \quad \|(c - \overline{\Delta c} - A^T y^\nu)^+\| \to 0,$$

$$|(c - \overline{\Delta c}, x^\nu) - \overline{\mathtt{opt}}| + |\overline{\mathtt{opt}} - (b + \overline{\Delta b}, y^\nu)| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, в силу соотношений (5.1), (5.2) и последнего утверждения имеем

$$Ax^\nu - b - \overline{\Delta b} \le \beta y^\nu - v + \epsilon_4 e - \overline{\Delta b} \le \beta y^\nu - \overline{\Delta b} + \epsilon_4 e \to 0,$$

$$c - \overline{\Delta c} - A^T y^\nu \le \alpha x^\nu - u + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c} \le \alpha x^\nu - \overline{\Delta c} + \epsilon_3 e \to 0.$$

Вместе с тем по свойствам проекции нуля на выпуклое замкнутое множество

$$(c - \overline{\Delta c}, x^\nu) = (c - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e, x^\nu) + \frac{1}{\alpha}\underbrace{(\alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c}, \alpha x^\nu + \epsilon_3 e)}_{\ge 0} - \frac{\epsilon_3}{\alpha}(\alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c}, e)$$

$$\ge (c - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e, x^\nu) - \frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c}\|.$$

Поэтому, используя оценки из утверждения 4, получаем

$$(c - \overline{\Delta c}, x^\nu) - \overline{\mathtt{opt}} \ge (c - \alpha x^\nu - \epsilon_3 e, x^\nu) - \mathtt{opt}(5.3) - \frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c}\| + \mathtt{opt}(5.3) - \overline{\mathtt{opt}}$$

$$\ge -n\epsilon_3' - m\epsilon_4' - 2\frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu\| - 2\frac{\epsilon_4}{\beta}\|\beta y^\nu\| - \frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c}\| + \mathtt{opt}(5.3) - \overline{\mathtt{opt}}.$$

В итоге

$$0 \leftarrow \|\overline{y}\| \cdot \|(Ax^\nu - b - \overline{\Delta b})^+\| \ge (c - \overline{\Delta c}, x^\nu) - \overline{\mathtt{opt}} \ge Q_1(\nu) + \mathtt{opt}(5.3) - \overline{\mathtt{opt}} \to +0,$$

где

$$Q_1(\nu) = -n\epsilon_3' - m\epsilon_4' - 2\frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu\| - 2\frac{\epsilon_4}{\beta}\|\beta y^\nu\| - \frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu + \epsilon_3 e - \overline{\Delta c}\| \to +0.$$

Здесь мы снова учли свойства функции оптимального значения задачи (5.3) и то, что

$$\nu \to +0, \quad \epsilon_3 = o(\alpha), \quad \epsilon_4 = o(\beta), \quad \beta y^\nu \to \overline{\Delta b}, \quad \alpha x^\nu \to \overline{\Delta c}.$$

Аналогично показывается, что

$$0 \leftarrow -\|\overline{x}\| \cdot \|(c + \overline{\Delta c} - A^T y^\nu -)^+\| \le (b + \overline{\Delta b}, y^\nu) - \overline{\mathtt{opt}} \le Q_2(\nu) + \mathtt{opt}(5.4) - \overline{\mathtt{opt}} \to +0,$$

где

$$Q_2(\nu) = n\epsilon_3' + m\epsilon_4' + 2\frac{\epsilon_3}{\alpha}\|\alpha x^\nu\| + 2\frac{\epsilon_4}{\beta}\|\beta y^\nu\| + \frac{\epsilon_4}{\beta}\|\beta y^\nu + \epsilon_4 e - \overline{\Delta b}\| \to +0.$$

Таким образом векторы x^ν сходятся по расстоянию к оптимальному множеству задачи (1.4), а векторы y^ν — по расстоянию к оптимальному множеству задачи (1.5).

6. Альтернативные схемы управления параметрами

Для согласования параметров метода можно предложить и другие, альтернативные условия, завязанные на значения вспомогательных переменных u и v. Эти условия имеют вид

$$0 \le \alpha x - c + A^T y \le (1+\delta_1)u, \quad 0 < u_i x_i \le (1+\delta_3)\epsilon_1 \ \ (i = 1, \dots, n), \tag{6.1}$$

$$0 \le \beta y \; - Ax \; + b \; \le (1+\delta_2)v, \quad 0 < v_j y_j \le (1+\delta_4)\epsilon_2 \ \ (j = 1, \dots, m). \tag{6.2}$$

Переменные x, u, y, v по-прежнему являются положительными. Кроме того, в алгоритм добавлены новые параметры $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0, \delta_4 > 0$, которые, впрочем, не обязаны стремиться к нулю, а могут считаться константами.

Заметим, что точные решения систем (4.1) и (4.3) также с очевидностью удовлетворяют выписанным неравенствам с некоторым запасом, так что их выполнение всякий раз может быть достигнуто за конечное число итераций метода Ньютона, примененного к ним.

Вернемся к вспомогательным задачам

$$\max\{(c - \alpha x^\nu, x)\colon Ax \le b + \beta y^\nu, \ x \ge 0\}, \tag{6.3}$$

$$\min\{(b + \beta y^\nu, y)\colon A^T y \ge c - \alpha x^\nu, \ y \ge 0\}. \tag{6.4}$$

Утверждение 6. *Пусть набор положительных векторов* $(x^\nu, u^\nu, y^\nu, v^\nu)$ *удовлетворяет системе соотношений* (6.1), (6.2). *Тогда вектор* x^ν *допустим для задачи* (6.3), *а вектор* y^ν *— для двойственной к ней задачи* (6.4). *При этом*

$$(c - \alpha x^\nu, x^\nu) - \mathtt{opt}(6.3) \ge -n(1+\delta_1)(1+\delta_3)\epsilon_1 - m(1+\delta_2)(1+\delta_4)\epsilon_2.$$

$$(b + \beta y^\nu, y^\nu) - \mathtt{opt}(6.4) \le n(1+\delta_1)(1+\delta_3)\epsilon_1 + m(1+\delta_2)(1+\delta_4)\epsilon_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о элементарно и дословно повторяет прежние рассуждения.

Утверждение 7. *Пусть набор положительных векторов* $(x^\nu, u^\nu, y^\nu, v^\nu)$ *удовлетворяет системе соотношений* (6.1), (6.2). *Тогда*

$$0 < \lambda = \max\bigl(\|\overline{\Delta c} - \alpha x^\nu\|, \|\overline{\Delta b} - \beta y^\nu\|\bigr) \le \gamma N_5(\nu) + \sqrt{\gamma N_6(\nu, \delta)},$$

где

$$N_5 = 2\max(\|\overline{x}\|, \|\overline{y}\|), \quad N_6(\nu, \delta) = n(1+\delta_1)(1+\delta_3)\epsilon_1 + m(1+\delta_2)(1+\delta_4)\epsilon_2,$$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4), \quad \gamma = \max(\alpha, \beta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о в целом следует схеме доказательства утверждения 2 (с минимальными изменениями) и потому здесь не повторяется.

Следствие 3. *Пусть векторы* $x^\nu > 0$, $y^\nu > 0$, $u^\nu > 0$, $v^\nu > 0$ *удовлетворяют системе соотношений* (6.1), (6.2) *и пусть* δ_{1-4} *— постоянны, а* $\nu = (\alpha, \beta, \epsilon_1, \epsilon_2) \to +0$.

Тогда

$$\|(Ax^\nu - b - \overline{\Delta b})^+\| \to 0, \quad \|(c - \overline{\Delta c} - A^T y^\nu)^+\| \to 0,$$

$$|(c - \overline{\Delta c}, x^\nu) - \bar{\mathtt{opt}}| + |\bar{\mathtt{opt}} - (b + \overline{\Delta b}, y^\nu)| \to 0.$$

Таким образом, и в альтернативной схеме векторы x^ν сходятся по расстоянию к оптимальному множеству задачи (1.4), а векторы y^ν — к оптимальному множеству задачи (1.5).

В заключение раздела приведем алгоритм для пакета MatLab, с которым проводились вычислительные эксперименты.

А л г о р и т м Ньютона для пакета MatLab

```
t = xEPS
for it = 1:ITMAX
    % Определение направления спуска
    Dx = inv(diag(x));
    Dy = inv(diag(y));
    ER = t* [Dx*ex; Dy*ey];
    GR = [ A'*y - c + t*x; b - A*x + t*y ];
    HH = [ t*eye(no) + t*Dx*Dx, A'; - A, t*eye(mo) + t*Dy*Dy ];
    p  = HH\(GR - ER) ;
    z  = [x;y];
    % Подбор шагового параметра в методе Ньютона
    step=1;
    for i=1:(no+mo)
        if z(i) - step*p(i)<0
           step = 0.7*z(i)/p(i);
        end
    end
    z = z - step*p;      % Сам шаг метода Ньютона
    for i=1:no
        x(i) = z(i);
    end
    for i=1:mo
        y(i) = z(no+i);
    end
    % Проверка текущей точности решения НЛУ-системы
    CON = 0;
    for i=1:(no+mo)
        if GR(i) < 0 | GR(i) > (1 + xDLT)*ER(i)
           CON = 1;
           break
        end
    end
    % Понижение параметров регуляризации и штрафа
    if CON = 0
       t = max(xEPSmin, 0.6*t);
    end
    if norm(x-xo) < 1e-5
       break
    end
end
```

Алгоритм работает с системой (3.2), (3.3). В нем значения регуляризирующих и штрафных параметров совпадают и равны `t`. По мере того как невязка системы нелинейных уравнений на очередной итерации понижается ниже планки, задаваемой условиями (6.1), (6.2), происходит снижение их общего значения. Начальное значения параметров задается переменной `xEPS`.

7. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился в среде MATLAB на вычислительном комплексе УРАН ИММ УрО РАН. Были обработаны результаты 50 тестовых задач размерности 1000×3000 как разрешимых, так и несобственных (1-го рода). Их матрицы ограничений генерировались при помощи стандартного датчика случайных чисел. Матрицы имели разреженную структуру (заполнение матриц ненулевыми элементами составляло 3–5%). Правые части ограничений и коэффициенты целевой функции подбирались таким образом, чтобы решение (обобщенное решение) задач было единственным и совпадало с некоторым заданным заранее. Стартовые приближения во всех случаях были одинаковыми (их значения на порядок отличались от оптимальных).

В табл. 1 и 2 показано, сколько шагов метода Ньютона потребовалось для достижения заданной точности решения при различных начальных значениях параметров xEPS и xDLT. Точность определялась по условию $\|x-\bar{x}\| < 0.00001$ (при этом точность выполнения ограничений прямой задачи и достижения ее оптимального значения в конечной точке всегда получалась на один-два порядка выше).

Таблица 1

Результаты для задач с совместными системами ограничений

	xEPS = 100	xEPS = 10	xEPS = 1	xEPS = 0.1	xEPS = 0.01
xDLT = 0.001	250	120	120	133	360
xDLT = 0.01	120	83	86	123	350
xDLT = 0.1	100	83	86	123	340
xDLT = 1	92	79	83	122	332
xDLT = 10	77	70	71	117	320
xDLT = 100	56	66	65	114	313
xDLT = 1000	47	47	54	103	320
xDLT = 10000	72	61	61	105	321

Таблица 2

Результаты для задач с несовместными системами ограничений

	xEPS = 100	xEPS = 10	xEPS = 1	xEPS = 0.1	xEPS = 0.01
xDLT = 0.001	340	330	330	383	–
xDLT = 0.01	300	120	120	133	330
xDLT = 0.1	150	100	110	143	300
xDLT = 1	120	93	98	140	300
xDLT = 10	102	92	91	140	300
xDLT = 100	98	80	81	131	300
xDLT = 1000	66	72	71	128	300
xDLT = 10000	86	84	96	139	–

Мы видим, что предложенные схемы согласования параметров алгоритма работают достаточно уверенно (хотя противоречивость ограничений и вносит свои дополнительные трудности).

8. Взвешенные евклидовы нормы

В заключение рассмотрим вариант определения оптимальных векторов коррекции через взвешенные евклидовы нормы $\overline{\overline{\Delta b}} = \arg\min_{\Delta b\in\Omega_1} \|\Delta b\|_Y$, $\overline{\overline{\Delta c}} = \arg\min_{\Delta c\in\Omega_2} \|\Delta c\|_X$, где

$$\|\Delta b\|_Y = \sqrt{w_1\Delta b_1^2 + w_2\Delta b_2^2 + \ldots + w_m\Delta b_m^2}, \quad \|\Delta c\|_X = \sqrt{v_1\Delta c_1^2 + v_2\Delta c_2^2 + \ldots + v_m\Delta c_n^2};$$

здесь $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ и $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — фиксированные наборы положительных весовых параметров. Покажем, как применить в этом случае описанную выше технику вычислений.

Введем две диагональные матрицы масштабирования $W = \mathrm{diag}(\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \ldots, \sqrt{w_m})$, $V = \mathrm{diag}(\sqrt{v_1}, \sqrt{v_2}, \ldots, \sqrt{v_n})$ и построим по исходным задачам (1.1), (1.2) следующие их масштабированные версии:

$$\max\{(c, x)\colon WAx \le Wb,\ x \ge 0\}, \tag{8.1}$$

$$\min\{(b, y)\colon VA^T y \ge Vc,\ y \ge 0\}. \tag{8.2}$$

Чтобы эти задачи стали взаимодвойственными, применим операции растяжения пространств их переменных $x = Vx',\ y = Wy'$. В силу монотонности взвешенных норм и свойств диагональных матриц получим эквивалентные задачи вида

$$\max\{(Vc, x')\colon WAVx' \le Wb,\ x' \ge 0\}, \tag{8.3}$$

$$\min\{(Wb, y')\colon VA^T Wy' \ge Vc,\ y' \ge 0\}. \tag{8.4}$$

Эти две задачи разрешены или нет одновременно с исходными задачами (1.1), (1.2). Поэтому допустимые векторы коррекции Δb и Δc исходных задач переходят в допустимые векторы коррекции масштабированных задач $\Delta b' = W\Delta b$ и $\Delta c' = V\Delta c$ и наоборот. При этом их нормы связаны соотношениями

$$\|\Delta b'\| = \|\Delta b\|_Y, \quad \|\Delta c'\| = \|\Delta c\|_X,$$

так что оптимальные векторы коррекции $\overline{\overline{\Delta b}}$ и $\overline{\overline{\Delta c}}$ можно получить, применив описанную в первых разделах статьи технику к задачам (8.3), (8.4).

Впрочем, упомянутая техника может быть чуть упрощена. А именно, сформируем для масштабированных задач (8.3), (8.4) аналоги систем нелинейных уравнений (3.2), (3.3):

$$Vc - (WAV)^T y' - \alpha x' + \epsilon_1 (X')^{-1} e = 0, \quad x' > 0, \tag{8.5}$$

$$Wb - WAVx' + \beta y' - \epsilon_2 (Y')^{-1} e = 0, \quad y' > 0. \tag{8.6}$$

Умножим первую систему слева на матрицу V^{-1} и вторую из них — на матрицу W^{-1}. С учетом свойств диагональных матриц получим чуть более простые, но равносильные уравнения

$$c - A^T y - \alpha V^{-2} x + \epsilon_1 X^{-1} e = 0, \quad x > 0, \tag{8.7}$$

$$b - Ax + \beta W^{-2} y - \epsilon_2 Y^{-1} e = 0, \quad y > 0. \tag{8.8}$$

Тем самым мы пришли к ожидаемому выводу, что поиск оптимальных векторов коррекции во взвешенных евклидовых нормах можно получить путем совмещения техники барьерных функций и приема симметричной регуляризации функции Лагранжа исходной задачи, применяя для этого сопряженные нормы $\|x\|_X^*$ и $\|y\|_Y^*$. Условия сходимости метода сохраняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
4. **Морозов В.А.** О псевдорешениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 1387–1391.
5. **Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г.** Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 7. С. 1087–1090.
6. Исследования по несобственным задачам оптимизации: сб. науч. статей / УрО АН СССР. Свердловск, 1988. 78 с.
7. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: сб. науч. статей / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. 136 с.

8. **Скарин В.Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
9. Нерегулярная двойственность в математическом программировании: сб. науч. статей / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1990. 78 с.
10. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
11. **Попов Л.Д.** Поиск обобщенных решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования с помощью барьерных функций // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 2. С. 134–146.
12. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 83–89.
13. **Попов Л.Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 3. С. 3–11.
14. **Фиакко А., Мак–Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
15. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
16. **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. – 472 с.
17. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997. 484 p.

Поступила 26.01.2023
После доработки 9.06.2023
Принята к публикации 13.06.2023

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор, Институт математики и компьютерных наук
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: popld@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I. Duality for improper problems of linear and convex programming. *Sov. Math. Dokl.* 1981, vol. 23, pp. 62–66.
2. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
3. Eremin I.I. *Protivorechivye modely optimal'nogo planirovaniya* [Inconsistent models of optimal planning] Moscow: Nauka Publ., 1988, 160 p.
4. Morozov V.A. Pseudo-solutions. *USSR Comput. Math. Math. Physics*, 1969, vol. 9, no. 6, pp. 196–203. doi: 10.1016/0041-5553(69)90136-0
5. Kochikov I.V., Matvienko A.N., Yagola A.G. The generalized residual principle for the solution of inconsistent equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, vol. 24, no. 4, pp. 78–80. doi: 10.1016/0041-5553(84)90233-7
6. *Reseaches on improper optimization problems*: sbornik nauchnykh statei. Yekaterinburg, Ural Branch of the Academy of Sciences USSR Publ., 1988, 78 p. (in Russian)
7. *Parametric optimizarion and approximating methods for improper mathematical programming problems*: sbornik nauchnykh statei. Yekaterinburg, Ural Branch of the Academy of Sciences USSR Publ., 1985, 136 p. (in Russian)
8. Skarin V.D. An approach to the analysis of improper problems of linear programming. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 2, pp. 73–79. doi: 10.1016/0041-5553(86)90011-X

9. *Nonregular duality in matematical programming*: sbornik nauchnykh statei. Yekaterinburg, Ural Branch of the Academy of Sciences USSR Publ., 1990, 78 p. (in Russian)
10. Skarin V.D. Barrier function method and correction algorithms for improper convex programming problems. *Proc. Steklov Instit. Math.* (Suppl.), 2008, vol. 263, no. 2, pp. S120–S134. doi: 10.1134/S0081543808060126
11. Popov L.D. Search of generalized solutions to improper linear and convex programming problems using barrier functions. *Izv. Irkut. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 134–146 (in Russian).
12. Eremin I.I., Popov L.D. Interior penalty functions and duality in linear programming. *Proc. Steklov Instit. Math.* (Suppl.), 2013, vol. 283, no. 1, pp. 56–63 doi: 10.1134/S0081543813090058
13. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010
14. Fiacco A.V., McCormick G.P. *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*. Ser. Classics in Appl. Math., vol. 4, Philadelphia: SIAM, 1987, 226 p. ISBN: 0898712548. Translated to Russian under the title *Nelineinoe programmirovanie. Metody posledovatel'noi bezuslovnoi minimizatsii*, Moscow: Mir Publ., 1972, 240 p.
15. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoryu lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 192 p.
16. Rockafellar R.T. *Convex analysis*. Prinseton: Prinseton Univ. Press, 1970, 451 p. Translated to Russian under the title *Vypukly Analiz*, Moscow: Mir Publ., 1973, 472 p.
17. Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph. *Theory and algorithms for linear optimization*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997, 484 p.

Received January 26, 2023
Revised June 9, 2023
Accepted June 13, 2023

Leonid Denisovich Popov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: popld@imm.uran.ru .

Cite this article as: L. D. Popov. Barriers and symmetric regularization of the Lagrange function in the analysis of improper linear programming problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 138–155.