ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 3 2023

УДК 517.988.6+515.124.2

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ МЕТРИКАМИ[1]

Е. А. Панасенко

В работе изучается включение вида $\widetilde{y} \in F(x)$ с многозначным отображением, действующим в пространствах с векторнозначными метриками (чьи значения есть элементы конусов в банаховых пространствах), принимающих возможно бесконечные значения. Получено утверждение о существовании решения $x \in X$ и оценке его отклонения (в векторнозначной метрике) от заданного элемента $x_0 \in X$. Этот результат распространяет известные теоремы об аналогичных операторных уравнениях и включениях в метрических пространствах и в пространствах с n-мерной метрикой на более общий случай и применительно к конкретным классам функциональных уравнений и включений позволяет получить менее ограничительные, по сравнению с известными, условия разрешимости и более точные оценки решений. В работе этот результат применен к интегральному включению

$$\widetilde{y}(t) \in f\Big(t, \int_a^b \varkappa(t,s)x(s)\,ds, x(t)\Big), \quad t \in [a,b],$$

где функция $\widetilde{y}$ измерима, отображение f удовлетворяет условиям Каратеодори, а от решения x требуется лишь измеримость (суммируемость x не предполагается).

Ключевые слова: пространство с векторнозначной метрикой; многозначное отображение; векторная метрическая регулярность; липшицевость с операторным коэффициентом; операторное включение; интегральное включение.

E. A. Panasenko. On operator inclusions in spaces with vector-valued metrics.

We consider the inclusion $\widetilde{y} \in F(x)$ with a multivalued mapping acting in spaces with vector-valued metrics whose values are elements of cones in Banach spaces and can be infinite. A statement about the existence of a solution $x \in X$ and an estimate of its deviation from a given element $x_0 \in X$ in a vector-valued metric are obtained. This result extends the known theorems on similar operator equations and inclusions in metric spaces and in spaces with n-dimensional metric to a more general case and, applied to particular classes of functional equations and inclusions, allows to get less restrictive, compared to known, solvability conditions as well as more precise estimates of solutions. We apply this result to the integral inclusion

$$\widetilde{y}(t) \in f\Big(t, \int_a^b \varkappa(t,s)x(s)\,ds, x(t)\Big), \quad t \in [a,b],$$

where the function $\widetilde{y}$ is measurable, the mapping f satisfies the Carathéodory conditions, and the solution x is required to be only measurable (the integrability of x is not assumed).

Keywords: space with vector-valued metric, multivalued mapping, vector metric regularity, Lipschitz property with operator coefficient, operator inclusion, integral inclusion.

MSC: 54E35, 54H25, 34K09

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-106-127

Введение

В данной работе предлагается теорема о разрешимости операторного включения в пространстве, наделенном обобщенной метрикой, значениями которой являются элементы конуса банахова пространства или ∞. Эта теорема может трактоваться как утверждение о допустимых векторно липшицевых возмущениях векторно метрически регулярного (накрывающего) отображения, при которых сохраняется разрешимость соответствующего включения.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/.

Отметим, что пространства с векторнозначной метрикой очевидно метризуемы: норма векторнозначной метрики задает “обычную” метрику. Однако при такой метризации возможно, что векторно метрически регулярное отображение не будет “скалярно” метрически регулярным, а липшицево относительно векторной метрики отображение не будет “скалярно” липшицевым. Таким образом, предлагаемое утверждение позволяет рассматривать уравнения и включения, к которым не удается применить результаты анализа в метрических пространствах, в частности теорему Арутюнова о точках совпадения [1] и ее обобщения (см., например, [2;3]), теоремы о возмущениях накрывающих отображений метрических пространств [4;5].

Векторнозначная метрика со значениями в конусе банахова пространства является естественным распространением n-мерной метрики, принимающей значения в $\mathbb{R}^n_+$. В пространствах с n-мерной метрикой близкие рассматриваемым здесь утверждения для точек совпадения получены в [6;7], для уравнений — в [8]. Для включений соответствующие вопросы для пространств с n-мерной метрикой в известной нам литературе не рассматривались. Теоремы о неподвижной точке в пространствах с векторнозначной метрикой для однозначных отображений получены А. И. Перовым в [9], для многозначных отображений — в нашей, написанной в соавторстве с Е. С. Жуковским, работе [10]. В [11] представлены теоремы о неподвижных точках однозначных и многозначных отображений пространств с векторнозначной метрикой, аналогичные теоремам Л.В. Канторовича, а также теоремы о точках совпадения отображений в таких пространствах.

В перечисленных выше статьях рассматривались конечные векторнозначные (включая n-мерные) метрики. Дополнение бесконечностью значений векторнозначной метрики расширяет возможности приложений, что демонстрируется в разд. 4 настоящей работы на примере интегрального включения. Такое включение, предположительно имеющее несуммируемые особенности, может быть рассмотрено в максимально “широком” пространстве измеримых функций, а в качестве обобщенного расстояния между его элементами — функциями $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — можно выбрать функцию $|u(\cdot) - v(\cdot)|$, если она суммируема с некоторой степенью p, и ∞, если эта функция не является p-суммируемой. Если будет найдена измеримая функция x_0 такая, что отклонение правой части включения от значения интегрального оператора на x_0 будет суммируемой с p-й степенью функцией, то к данному включению можно применить предлагаемый в статье результат. Такой подход позволяет “стандартизировать” достаточно сложную процедуру выбора пространства, в котором “удобно” методами функционального анализа исследовать заданное уравнение или включение. Некоторые другие идеи выбора пространств для функционально-дифференциальных уравнений предложены в работах участников Пермского семинара Н. В. Азбелева (см. [12]).

1. Векторно метрическое пространство

1.1. Определение векторнозначной метрики

Дополним множество $\mathbb{R}$ действительных чисел элементом ∞ и обозначим такую “расширенную вещественную прямую” через $\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Будем считать, что

$$\infty - \infty = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x - \infty = \infty - x = \infty.$$

Также доопределим множество $\mathbb{R}_+$ неотрицательных действительных чисел элементом $+\infty$ и обозначим $\overline{\mathbb{R}_+} \doteq \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. Будем считать, что

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \;\; x < +\infty, \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Определение модуля $|\cdot|$ вещественного числа дополним равенством $|\infty| = +\infty$.

Наряду с “классической метрикой”, имеющей значения в $\mathbb{R}_+$, в литературе используется также метрика, которая кроме вещественных значений может принимать еще значение $+\infty$

(см., например, [13, § 1.1]). А именно, *метрикой* на произвольном множестве $X \neq \varnothing$ называется отображение $\rho_X : X \times X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ такое, что для любых $x, y, z \in X$ справедливы соотношения

1) $\rho_X(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$;

2) $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x)$;

3) $\rho_X(x, z) \leqslant \rho_X(x, y) + \rho_X(y, z)$.

При выполнении этих условий пару (X, ρ_X) называют *метрическим пространством.* Если удовлетворяющее перечисленным условиям отображение ρ_X действует в $\mathbb{R}_+$, то метрика называется конечной.

Например, в $\overline{\mathbb{R}}$ “стандартной метрикой” является функция

$$\rho_{\overline{\mathbb{R}}} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}_+}, \quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \overline{\mathbb{R}}, \tag{1.1}$$

а сужение этой функции на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть “обычная” конечная метрика.

Теперь определим рассматриваемое в работе обобщение понятия метрики.

Пусть E — нормированное пространство и $E_+ \subset E$ — замкнутый выпуклый острый конус. Зададим в E частичный порядок $\leqslant$ соотношением

$$\forall e, \tilde{e} \in E \quad \tilde{e} \leqslant e \quad \Leftrightarrow \quad e - \tilde{e} \in E_+.$$

Будем считать, что относительно этого порядка норма $\|\cdot\|_E$ в пространстве E является монотонной, т. е.

$$\forall e, \tilde{e} \in E_+ \quad \tilde{e} \leqslant e \;\Rightarrow\; \|\tilde{e}\|_E \leqslant \|e\|_E.$$

Определим “расширенный конус” — множество $\overline{E_+} = E_+ \cup \{+\infty\}$, дополнив конус E_+ элементом $+\infty$, причем будем полагать

$$\forall e \in E_+ \quad e < +\infty, \quad e + (+\infty) = (+\infty) + e = +\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Определение 1. Пусть $\Omega \neq \varnothing$. Отображение $\mathcal{P}_\Omega : \Omega \times \Omega \to \overline{E_+}$ будем называть *векторнозначной метрикой* или в. *метрикой* на Ω, если для любых $\omega, u, v \in \Omega$ выполнены следующие условия (“стандартные” аксиомы метрики):

1) $\mathcal{P}_\Omega(\omega, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega = u$;

2) $\mathcal{P}_\Omega(\omega, u) = \mathcal{P}_\Omega(u, \omega)$;

3) $\mathcal{P}_\Omega(\omega, u) \leqslant \mathcal{P}_\Omega(\omega, v) + \mathcal{P}_\Omega(v, u)$.

Множество Ω с определенной на нем в. метрикой $\mathcal{P}_\Omega$ будем называть *векторно метрическим пространством* или в. *метрическим пространством.*

Аналогичное определение в. метрики, но принимающей только “конечные” значения в конусе E_+, рассматривалось в [10].

В. метрические пространства естественным образом возникают, например, при рассмотрении систем уравнений, неравенств или включений, решения которых — векторы $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с компонентами u_i, являющимися элементами некоторых метрических пространств (Ω_i, ρ_i), $\rho_i : \Omega_i \times \Omega_i \to \overline{\mathbb{R}_+}$. В таком случае удобно рассмотреть декартово произведение $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$ с в. метрикой $\mathcal{P}_\Omega : \Omega^2 \to \overline{\mathbb{R}^n_+}$ (где $\overline{\mathbb{R}^n_+} = \mathbb{R}^n_+ \cup \{+\infty\}$), определяемой для любых $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \Omega$ формулой

$$\mathcal{P}_\Omega(u, v) \doteq \begin{cases} \big(\rho_1(u_1, v_1), \rho_2(u_2, v_2), \ldots, \rho_n(u_n, v_n)\big), & \text{если } \rho_i(u_i, v_i) \in \mathbb{R}_+ \text{ при всех } i = \overline{1, n}, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Такая в. метрика, но принимающая лишь конечные значения (т. е. $\rho_i : \Omega_i \times \Omega_i \to \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$), использовалась в работах [6–8] при исследовании точек совпадения векторных отображений, а также систем уравнений.

Для в. метрического пространства $(\Omega, \mathcal{P}_\Omega)$ сформулируем определения и обозначения, аналогичные введенным в [10] для пространства с конечной в. метрикой.

Обозначим $\mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e) \doteq \{\omega \in \Omega\colon \mathcal{P}_\Omega(\omega, \omega_0) \leqslant e\}$ — *замкнутый шар с центром в точке* $\omega_0 \in \Omega$ радиуса $e \in \overline{E_+}$; $\mathrm{B}_\Omega(\omega_0, \infty) \doteq \Omega$; $\mathrm{B}_\Omega(U, e) \doteq \bigcup_{\omega_0 \in U} \mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e)$ — *e-раздутие множества* $U \subset \Omega$. Следует отметить, что на в. метрические пространства не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в $\overline{E_+}$ может не иметь инфимума (так как, в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$, порядок в E частичный).

Сходимость $\omega_i \to \omega$ при $i \to \infty$ в Ω понимается в смысле сходимости векторного расстояния, а именно: существует такой номер I, что для любого $i > I$ выполнено $\mathcal{P}_\Omega(\omega_i, \omega) < +\infty$ и $\|\mathcal{P}_\Omega(\omega_i, \omega)\|_E \to 0$, т. е. фактически сходимость в Ω означает сходимость по расстоянию $\|\mathcal{P}_\Omega(\cdot,\cdot)\|_E$ пространства E. В случае существования предел, очевидно, единственный. Множество $U \subset \Omega$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности $\{\omega_i\} \subset U$, $\omega_i \to \omega$, выполнено $\omega \in U$. Последовательность $\{\omega_i\} \subset \Omega$ называется *фундаментальной,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер I такой, что для любых $i, j > I$ выполнено $\|(\omega_i, \omega_j)\|_E < \varepsilon$. Как и для "обычного" метрического пространства, из сходимости последовательности следует ее фундаментальность. Если любая фундаментальная последовательность в Ω сходится, то это в. метрическое пространство называется *полным.*

1.2. Пространство $S_p\big([a,b], \overline{\mathbb{R}}\,\big)$

Приведем еще один пример в. метрического пространства. Это пространство будет использоваться в четвертом разделе работы при исследовании интегрального включения.

Стандартно через $L_p\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ будем обозначать банахово пространство суммируемых в p-й степени $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ по Лебегу функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{L_p} \doteq \left(\displaystyle\int_a^b |x(s)|^p ds\right)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|x\|_{L_\infty} \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,b]} |x(s)|$. Множество $L_p([a,b],\mathbb{R}_+)$ функций из $L_p\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ со значениями в $\mathbb{R}_+$ является выпуклым замкнутым острым воспроизводящим конусом в пространстве $L_p([a,b],\mathbb{R})$, причем относительно порождаемого этим конусом "естественного" порядка норма $\|\cdot\|_{L_p}$ монотонна. Определим "расширенный конус": $\overline{L_p\big([a,b],\mathbb{R}_+\big)} \doteq L_p\big([a,b],\mathbb{R}_+\big) \cup \{+\infty\}$.

Далее рассматриваются функции, возможно принимающие значение ∞. Будем полагать, что функция $x : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *измерима,* если измеримо ее эффективное множество $\operatorname{dom} x \doteq \{t : x(t) \neq \infty\}$ и ее сужение $x|_{\operatorname{dom} x}$ на это множество является "обычной" измеримой функцией. Определим пространство $S_p\big([a,b],\overline{\mathbb{R}}\,\big)$ $\big(1 \leqslant p \leqslant \infty\big)$ всех измеримых функций $x : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, в котором для любых $x, u \in S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}}\,)$ определена функция

$$[a,b] \ni t \mapsto \mathcal{P}_{S_p}(x,u)(t) \doteq \begin{cases} |x(t) - u(t)|, & \text{если } \ x - u \in L_p\big([a,b],\mathbb{R}\big), \\ \quad +\infty, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{1.2}$$

таким образом, $\mathcal{P}_{S_p}(x,u) \in \overline{L_p\big([a,b],\mathbb{R}_+\big)}$. Очевидно, что отображение $\mathcal{P}_{S_p}$ является в. метрикой в соответствующем пространстве $S_p\big([a,b],\overline{\mathbb{R}}\,\big)$, и $S_p\big([a,b],\overline{\mathbb{R}}\,\big)$ является полным относительно в. метрики $\mathcal{P}_{S_p}$.

Отметим, что в. метрику $\mathcal{P}_{S_p}$ можно рассмотреть и в пространстве $S_p\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ $\big(1 \leqslant p \leqslant \infty\big)$ функций, принимающих только конечные значения.

2. Многозначные отображения векторно метрических пространств

Многозначное отображение Ψ, действующее из множества $X \neq \varnothing$ в множество $Y \neq \varnothing$, будем обозначать через $\Psi : X \rightrightarrows Y$. Для всех рассматриваемых многозначных отображений предполагаем, что образом любого аргумента является непустое множество.

В этом разделе для многозначных отображений в. метрических пространств определяются понятия замкнутости, липшицевости и регулярности, аналогичные соответствующим свойствам отображений метрических пространств. Начнем с основного в данной работе понятия векторной метрической регулярности многозначных отображений. Но прежде приведем определение “обычной” метрической регулярности, распространением которого на в. метрические пространства является предлагаемое понятие.

Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — “обычные” метрические пространства с конечными метриками $\rho_X : X^2 \to \mathbb{R}_+$, $\rho_Y : Y^2 \to \mathbb{R}_+$.

Определение 2 (см. [14, с.109]). Отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ называется *k-метрически регулярным* (*k-регулярным*), $k \geqslant 0$, если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \forall y \in \Psi(x) \ \ \forall y' \in Y \\ \exists x' \in X \ \ y' \in \Psi(x') \ \text{ и } \ \rho_X(x, x') \leqslant k\rho_Y(y, y') + \varepsilon.\end{gathered} \tag{2.1}$$

При определении метрической регулярности в случае, когда метрики могут принимать еще и значение $+\infty$, в соотношении (2.1) достаточно рассматривать только те $y' \in Y$, для которых расстояние до y конечно, т. е. это соотношение следует переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \forall y \in \Psi(x) \ \ \forall y' \in Y \ \ \rho_Y(y, y') < +\infty \\ \exists x' \in X \ \ y' \in \Psi(x') \ \text{ и } \ \rho_X(x, x') \leqslant k\rho_Y(y, y') + \varepsilon.\end{gathered} \tag{2.2}$$

В ситуации возможно бесконечных значений метрик несколько более ограничительным соотношением, чем (2.2), свойство регулярности (называемого также свойством накрывания) определялась в работах [15; 16].

Метрически регулярные однозначные и многозначные отображения, действующие в пространствах с конечной векторнозначной метрикой, принимающей значения в $\mathbb{R}^n_+$, подробно изучались в [6; 7] (см. также библиографию в указанных работах).

Пусть теперь заданы нормированные пространства E и M, упорядоченные выпуклыми замкнутыми острыми конусами E_+ и M_+ соответственно. Упорядоченности, которые задают конусы E_+ и M_+, будем обозначать одинаково, символом $\leqslant$. Нулевые элементы в E и M будем обозначать как 0_E и 0_M, соответственно. Будем предполагать что нормы $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_M$ этих пространств монотонны. Кроме того, будем предполагать, что конусы E_+ и M_+ воспроизводящие.

Обозначим через $\mathcal{L}(E, M)$ пространство линейных ограниченных операторов $E \to M$ (со стандартной нормой) и в этом пространстве определим подмножество

$$\mathcal{L}_+(E, M) \doteq \{F \colon E \to M \colon F(E_+) \subset M_+\}$$

положительных операторов. Рассуждениями, аналогичными приведенным в [10] (при рассмотрении множества положительных операторов $E \to E$), несложно показать, что множество $\mathcal{L}_+(E, M)$ является выпуклым замкнутым острым конусом в пространстве $\mathcal{L}(E, M)$. Этот конус задает порядок на $\mathcal{L}(E, M)$, который мы также будем обозначать символом $\leqslant$, т. е.

$$\forall \ F, \ G \in \mathcal{L}(E, M) \ \ G \leqslant F \Leftrightarrow F - G \in \mathcal{L}_+(E, M).$$

Обозначим действующий в M тождественный оператор символом I_M. Очевидно, тождественный оператор положителен, т. е. $I_M \in \mathcal{L}_+(M, M)$.

Пусть заданы в. метрические пространства $(X, \mathcal{P}_X)$ и $(Y, \mathcal{P}_Y)$, где $\mathcal{P}_X \colon X^2 \to \overline{M_+}$, $\mathcal{P}_Y \colon Y^2 \to \overline{E_+}$ — соответствующие в. метрики, $\overline{M_+} = M_+ \cup \{+\infty\}$, $\overline{E_+} = E_+ \cup \{+\infty\}$, и пусть $W \subset Y$, $W \neq \varnothing$.

Определение 3. Отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ будем называть *в. метрически регулярным относительно множества $W \subset Y$ с операторным коэффициентом $K \in \mathcal{L}_+(E, M)$* (*$K$-в. метрически регулярным относительно W* или просто *K-регулярным относительно W*), если

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \forall y \in \Psi(x) \ \ \forall y' \in W \ \ \mathcal{P}_Y(y, y') < +\infty \\ \exists x' \in X \ \ \exists \delta \in M_+ \ \ y' \in \Psi(x'), \ \ \|\delta\|_M < \varepsilon \ \text{ и } \ \mathcal{P}_X(x, x') \leqslant K\mathcal{P}_Y(y, y') + \delta.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Если $W = Y$, то при выполнении (2.3) отображение Ψ будем называть K-в. *метрически регулярным* (или просто K-*регулярным*). Заметим, что отображение Ψ будет K-в. метрически регулярным относительно непустого множества $W \subset Y$ тогда и только тогда, когда оно K-в. метрически регулярно относительно каждого одноэлементного множества $\{\widetilde{y}\} \subset W$.

Теперь приведем определения свойств липшицевости и замкнутости многозначного отображения, действующего в в. метрических пространствах.

Определение 4. Отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ будем называть *липшицевым относительно множества* $W \subset Y$ *с операторным коэффициентом* $B \in \mathcal{L}_+(M, E)$ (или B-*липшицевым относительно* W), если

$$\begin{gathered} \forall x \in X \ \ \forall y \in \Psi(x) \cap W \ \ \forall x' \in X \ \ \mathcal{P}_X(x, x') < +\infty \\ \exists y' \in \Psi(x') \ \ \mathcal{P}_Y(y, y') \leqslant B\mathcal{P}_X(x, x'). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Определение 5. Отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ будем называть *замкнутым относительно множества* $W \subset Y$, если

$$\begin{gathered} \forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X \ \ \forall \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y \ y_k \in \Psi(x_k) \ \ (k = 1, 2, \dots) \ \forall x \in X \ \ \forall y \in W \\ \text{из} \ \ x_k \to x \ \text{ и } \ y_k \to y \ \text{ следует } \ y \in \Psi(x). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Если $W = Y$, то при выполнении соотношений (2.4) или (2.5) отображение $\Psi : X \rightrightarrows Y$ будем называть просто B-*липшицевым* или *замкнутым* соответственно.

3. Возмущения векторно метрически регулярных многозначных отображений

Пусть заданы вектор $\widetilde{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \rightrightarrows Y$. Будем полагать, что по первому аргументу это отображение является в. метрически регулярным относительно множества $\{\widetilde{y}\}$, а по второму определяет некоторые возмущения. Наша задача состоит в выделении класса возмущений, при которых отображение $G : X \rightrightarrows Y$,

$$G(x) = F(x, x),$$

сохраняет свойство в. метрической регулярности отображения $F(\cdot, x)$ относительно $\{\widetilde{y}\}$. Для решения этой задачи рассмотрим включение

$$\widetilde{y} \in F(x, x) \tag{3.1}$$

и получим для него условия существования и оценки решения $x \in X$.

Теорема 1. *Пусть пространство $(M, \|\cdot\|_M)$ является банаховым, в. метрическое пространство $(X, \mathcal{P}_X)$ — полным, заданы операторы $K \in \mathcal{L}_+(E, M)$, $B \in \mathcal{L}_+(M, E)$ такие, что спектральный радиус ϱ их произведения $KB \in \mathcal{L}_+(M, M)$ удовлетворяет неравенству $\varrho(KB) < 1$, и выполнены следующие условия*:

1) *при любом $u \in X$ отображение $F(\cdot, u) : X \rightrightarrows Y$ является K- регулярным относительно множества $\{\widetilde{y}\}$;*
2) *при любом $v \in X$ отображение $F(v, \cdot) : X \rightrightarrows Y$ является B- липшицевым относительно множества $\{\widetilde{y}\}$;*
3) *отображение G замкнуто относительно множества $\{\widetilde{y}\}$.*

Тогда для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in F(x_0, x_0)$ таких, что $\mathcal{P}_Y(\widetilde{y}, y_0) < +\infty$, и любого $\varepsilon > 0$ существуют решение x включения (3.1) и элемент $\delta \in M_+$, $\|\delta\|_M < \varepsilon$, удовлетворяющие неравенству

$$\mathcal{P}_X(x, x_0) \leqslant (I_M - KB)^{-1} K \mathcal{P}_Y(\widetilde{y}, y_0) + \delta. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, из условия $\varrho(KB) < 1$ следует, что оператор $I_M - KB : M \to M$ обратим и обратный оператор является суммой ряда Неймана

$$(I_M - KB)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (KB)^i, \tag{3.3}$$

в котором все члены $(KB)^i$ — положительные операторы. Поскольку конус $\mathcal{L}_+(M, M)$ замкнут, оператор $(I_M - KB)^{-1}$ также является положительным и при любом натуральном k справедлива оценка

$$(I_M - KB)^{-1} \geqslant \sum_{i=0}^{k} (KB)^i. \tag{3.4}$$

Определим эквивалентную норму $\|\cdot\|_M^*$ в пространстве M следующим образом (этот способ определения эквивалентной нормы приведен в [17, с. 15, 16]).

Пусть $\varrho_0 \doteq \varrho(KB)$. Выберем любое $\lambda \in (\varrho_0, 1)$ и найдем такое натуральное n, что $\sqrt[n]{\|(KB)^n\|} \leqslant \lambda$ и, соответственно, $\|(KB)^n \mu\|_M \leqslant \lambda^n \|\mu\|_M$ при любом $\mu \in M$. Положим

$$\|\mu\|_M^* = \lambda^{n-1}\|\mu\|_M + \lambda^{n-2}\|KB\mu\|_M + \ldots + \lambda\|(KB)^{n-2}\mu\|_M + \|(KB)^{n-1}\mu\|_M, \quad \mu \in M. \tag{3.5}$$

Несложно проверить, что приведенная формула определяет норму в M и эта норма эквивалента исходной норме $\|\cdot\|_M$. Кроме того, ввиду положительности оператора KB из монотонности нормы $\|\cdot\|_M$ следует монотонность нормы $\|\cdot\|_M^*$. Далее, для любого $\mu \in M$ получаем

$$\|KB\mu\|_M^* = \lambda^{n-1}\|KB\mu\|_M + \lambda^{n-2}\|(KB)^2\mu\|_M + \ldots + \lambda\|(KB)^{n-1}\mu\|_M + \|(KB)^n\mu\|_M$$

$$\leqslant \lambda^{n-1}\|KB\mu\|_M + \lambda^{n-2}\|(KB)^2\mu\|_M + \ldots + \lambda\|(KB)^{n-1}\mu\|_M + \lambda^n\|\mu\|_M$$

$$= \lambda\big(\lambda^{n-2}\|KB\mu\|_M + \ldots + \lambda\|(KB)^{n-2}\mu\|_M + \|(KB)^{n-1}\mu\|_M + \lambda^{n-1}\|\mu\|_M\big) = \lambda\|\mu\|_M^*.$$

Итак, $\|KB\mu\|_M^* \leqslant \lambda\|\mu\|_M^*$ и отсюда, учитывая, что спектральный радиус не превосходит норму оператора и сохраняется при переходе к эквивалентной норме, получаем

$$\varrho_0 \leqslant \|KB\|^* \leqslant \lambda < 1. \tag{3.6}$$

Из этого неравенства в силу представления оператора $(I_M - KB)^{-1}$ рядом Неймана (3.3) следует оценка его нормы $\|(I_M - KB)^{-1}\|^* \leqslant \dfrac{1}{1-\lambda}$.

Заметим также, что из (3.5) прямо следует неравенство

$$\|\mu\|_M^* \geqslant \lambda^{n-1}\|\mu\|_M, \quad \mu \in M. \tag{3.7}$$

Пусть для некоторых $x_0 \in X$ и $y_0 \in F(x_0, x_0)$ выполнено $\mathcal{P}_Y(\widetilde{y}, y_0) < +\infty$. Покажем, что по этим начальным элементам можно построить последовательности $\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset X$ и $\{y_k\}_{k=0}^\infty \subset Y$, удовлетворяющие таким условиям:

- $\widetilde{y} \in F(x_k, x_{k-1})$, $y_k \in F(x_k, x_k)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$;
- последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ является фундаментальной в пространстве $(X, \mathcal{P}_X)$;
- последовательность $\{y_k\}_{k=0}^\infty$ сходится к $\widetilde{y}$ в пространстве $(Y, \mathcal{P}_Y)$.

Из перечисленных условий будет следовать, что предел последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$ является искомым решением включения (3.1).

Пусть $\varepsilon > 0$ и $p > \max\{\lambda^{-1}, 2\}$. Согласно предположению 1) для рассматриваемых элементов $x_0 \in X$, $y_0 \in F(x_0, x_0)$ и $\widetilde{\varepsilon} = 2^{-1}\varepsilon(1-\lambda)\lambda^{n-1}$ найдутся $x_1 \in X$ и $\delta_0 \in M_+$, $\|\delta_0\|_M^* < \widetilde{\varepsilon}$, такие, что $\widetilde{y} \in F(x_1, x_0)$ и

$$\mathcal{P}_X(x_1, x_0) \leqslant K\mathcal{P}_Y(\widetilde{y}, y_0) + \delta_0. \tag{3.8}$$

Из условия 2) следует, что существует элемент $y_1 \in F(x_1, x_1)$ такой, что

$$\mathcal{P}_Y(y_1, \widetilde{y}) \leqslant B\mathcal{P}_X(x_1, x_0).$$

Снова воспользуемся предположением 1) о K- регулярности отображения F по первому аргументу: для элементов x_1, y_1 найдем $x_2 \in X$ и $\delta_1 \in M_+$, $\|\delta_1\|_M^* < \widetilde{\varepsilon}p^{-1}$, такие, что $\widetilde{y} \in F(x_2, x_1)$ и

$$\mathcal{P}_X(x_2, x_1) \leqslant K\mathcal{P}_Y(\widetilde{y}, y_1) + \delta_1 \leqslant (KB)\mathcal{P}_X(x_1, x_0) + \delta_1.$$

Далее, из условия 2) следует, что существует элемент $y_2 \in F(x_2, x_2)$ такой, что

$$\mathcal{P}_Y(y_2, \widetilde{y}) \leqslant B\mathcal{P}_X(x_2, x_1) \leqslant B(KB)\mathcal{P}_X(x_1, x_0) + B\delta_1.$$

Аналогично для x_2, y_2 найдем $x_3 \in X$, $\delta_2 \in M_+$, $\|\delta_2\|_M^* < \widetilde{\varepsilon}p^{-2}$, и $y_3 \in F(x_3, x_3)$ такие, что

$$\mathcal{P}_X(x_3, x_2) \leqslant K\mathcal{P}_Y(\widetilde{y}, y_2) + \delta_2 \leqslant (KB)^2\mathcal{P}_X(x_1, x_0) + (KB)\delta_1 + \delta_2,$$

$$\mathcal{P}_Y(y_3, \widetilde{y}) \leqslant B\mathcal{P}_X(x_3, x_2) \leqslant B(KB)^2\mathcal{P}_X(x_1, x_0) + B(KB)\delta_1 + B\delta_2,$$

и т. д. Таким образом, определены последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$, $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset Y$ и $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty} \subset M_+$, удовлетворяющие условиям

$$\widetilde{y} \in F(x_{k+1}, x_k), \quad y_k \in F(x_k, x_k), \quad \|\delta_k\|_M^* < \widetilde{\varepsilon}p^{-k}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\mathcal{P}_X(x_{k+1}, x_k) \leqslant (KB)^k\mathcal{P}_X(x_1, x_0) + (KB)^{k-1}\delta_1 + \ldots + (KB)\delta_{k-1} + \delta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.9}$$

$$\mathcal{P}_Y(y_k, \widetilde{y}) \leqslant B\mathcal{P}_X(x_k, x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

В силу монотонности нормы $\|\cdot\|_M^*$, учитывая неравенства (3.6) и $(\lambda p)^{-1} < 1$, из (3.9) получаем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_X(x_{k+1}, x_k)\|_M^* &< \lambda^k\|\mathcal{P}_X(x_1, x_0)\|_M^* + \lambda^{k-1}\widetilde{\varepsilon}p^{-1} + \lambda^{k-2}\widetilde{\varepsilon}p^{-2} + \ldots + \lambda\widetilde{\varepsilon}p^{1-k} + \widetilde{\varepsilon}p^{-k} \\ &< \lambda^k\|\mathcal{P}_X(x_1, x_0)\|_M^* + \lambda^k\widetilde{\varepsilon}\Big((\lambda p)^{-1} + (\lambda p)^{-2} + \ldots + (\lambda p)^{1-k} + (\lambda p)^{-k}\Big) \\ &< \lambda^k\big(\|\mathcal{P}_X(x_1, x_0)\|_M^* + \widetilde{\varepsilon}(\lambda p - 1)^{-1}\big).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Таким образом, $\|\mathcal{P}_X(x_{k+1}, x_k)\|_M^* \to 0$ при $k \to \infty$, откуда ввиду неравенства (3.10) получаем, что последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к $\widetilde{y}$ в пространстве $(Y, \mathcal{P}_Y)$. Также, используя (3.11), для любых $k = 0, 1, \ldots$ и $l = 1, 2, \ldots$ выводим оценку

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_X(x_{k+l}, x_k)\|_M^* &\leqslant \|\mathcal{P}_X(x_{k+l}, x_{k+l-1})\|_M^* + \ldots + \|\mathcal{P}_X(x_{k+2}, x_{k+1})\|_M^* + \|\mathcal{P}_X(x_{k+1}, x_k)\|_M^* \\ &< \lambda^k(\lambda^{l-1} + \ldots + \lambda + 1)\big(\|\mathcal{P}_X(x_1, x_0)\|_M^* + \widetilde{\varepsilon}(\lambda p - 1)^{-1}\big) \\ &< \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\big(\|\mathcal{P}_X(x_1, x_0)\|_M^* + \widetilde{\varepsilon}(\lambda p - 1)^{-1}\big).\end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ является фундаментальной и поэтому в полном пространстве $(X, \mathcal{P}_X)$ сходится к некоторому $x \in X$. Согласно предположению 3) выполнено $\widetilde{y} \in F(x, x)$, т. е. x — искомое решение включения (3.1).

Покажем, что x удовлетворяет оценке (3.2).

Из неравенств (3.9), (3.4) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X(x_{k+1},x_0) &\leqslant \mathcal{P}_X(x_1,x_0)+\mathcal{P}_X(x_k,x_{k-1})+\ldots+\mathcal{P}_X(x_1,x_0)\\ &\leqslant \big[(KB)^k+(KB)^{k-1}+\ldots+I_M\big]\mathcal{P}_X(x_1,x_0)\\ &+\big[(KB)^{k-1}+(KB)^{k-2}+\ldots+I_M\big]\delta_1\\ &+\big[(KB)^{k-2}+\ldots+I_M\big]\delta_2+\ldots+\big[(KB)+I_M\big]\delta_{k-1}+I_M\delta_k\\ &\leqslant (I_M-KB)^{-1}\big[\mathcal{P}_X(x_1,x_0)+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k\big]\\ &\leqslant (I_M-KB)^{-1}\big[K\mathcal{P}_Y(\widetilde{y},y_0)+\delta_0+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k\big].\end{aligned}$$

Обозначим $\widetilde{\delta}_k \doteq (I_M-KB)^{-1}(\delta_0+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k)$. Очевидно, что $\widetilde{\delta}_k\in M_+$ при всех $k=0,1,\ldots$. Для любых $k=0,1,\ldots$ и $l=1,2,\ldots$ имеем

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\delta}_{k+l}-\widetilde{\delta}_k\|_M^* &\leqslant \|(I_M-KB)^{-1}\|^*\,\|\delta_{k+1}+\ldots+\delta_{k+l}\|_M^*\\ &< \widetilde{\varepsilon}\,\frac{p^{-k-1}+\ldots+p^{-k-l}}{1-\lambda}<\frac{2\widetilde{\varepsilon}p^{-k-1}}{1-\lambda}\leqslant\frac{\widetilde{\varepsilon}}{2^k(1-\lambda)}.\end{aligned}$$

Значит, последовательность $\{\widetilde{\delta}_k\}_{k=0}^{\infty}\subset M$ фундаментальная и сходится в банаховом пространстве M к некоторому δ. Очевидно, $\delta\in M_+$. Далее, из (3.3), для любого k получаем

$$\|\widetilde{\delta}_k\|_M^*<\|(I_M-KB)^{-1}\|^*\,\widetilde{\varepsilon}\big(1+p^{-1}+p^{-2}+\ldots\big)\leqslant 2(1-\lambda)^{-1}\widetilde{\varepsilon},$$

откуда следует, что $\|\delta\|_M^*<2(1-\lambda)^{-1}\widetilde{\varepsilon}$. Тогда (см. (3.7))

$$\|\delta\|_M\leqslant\lambda^{-n+1}\|\delta\|_M^*<\lambda^{-n+1}2(1-\lambda)^{-1}\varepsilon(1-\lambda)2^{-1}\lambda^{n-1}=\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}_X(x_{k+1},x_0)\leqslant(I_M-KB)^{-1}K\mathcal{P}_Y(\widetilde{y},y_0)+\widetilde{\delta}_k,$$

и, переходя в этом неравенстве к пределу при $k\to\infty$, получаем (3.2). □

4. Приложение к интегральным включениям

4.1. Многозначные отображения, действующие в $\overline{\mathbb{R}}$

В этом разделе мы будем рассматривать многозначные отображения, действующие в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (со "стандартной", определенной формулой (1.1) метрикой). Сначала поясним, как в этом случае определяются основные понятия теории многозначных отображений.

Для любого множества $A\subset\overline{\mathbb{R}}$ обозначим $\mathrm{Pr}(A)\doteq A\setminus\{\infty\}$. Из определения метрики $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}$ следует, что множество A открыто (замкнуто, компактно) в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда множество $\mathrm{Pr}(A)$ является открытым (соответственно замкнутым, компактным) в $\mathbb{R}$. В частности, множество $\{\infty\}$ открыто и замкнуто (и, конечно, компактно) в $\overline{\mathbb{R}}$. Обозначим совокупности всех непустых замкнутых (компактных) подмножеств пространств $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ соответственно через $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{R}})$ ($\mathrm{K}(\mathbb{R})$ и $\mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$).

Напомним, что расстояние по Хаусдорфу $H_{\mathbb{R}}(A,B)$ между непустыми множествами $A,B\subset\mathbb{R}$ определяется формулой

$$H_{\mathbb{R}}(A,B)\doteq\inf\big\{\varepsilon\geqslant0\,:B\subset\mathrm{B}_{\mathbb{R}}(A,\varepsilon),\ A\subset\mathrm{B}_{\mathbb{R}}(B,\varepsilon)\big\}.$$

В $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ расстояние $H_{\mathbb{R}}$ является метрикой со значениями в $\overline{\mathbb{R}_+}$. Такой же формулой определяется расстояние по Хаусдорфу в $\overline{\mathbb{R}}$. Так как для любого $x\in\overline{\mathbb{R}}$ отличного от ∞ выполнено

$\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(x,\infty)=+\infty$, расстояние по Хаусдорфу между множествами $A,B\subset\overline{\mathbb{R}}$ можно задать эквивалентной формулой:

$$H_{\overline{\mathbb{R}}}(A,B)=\begin{cases}+\infty, & \text{если ровно одно из двух: } A=\Pr(A) \text{ или } B=\Pr(B),\\ +\infty, & \text{если ровно одно из двух: } A=\{\infty\} \text{ или } B=\{\infty\},\\ \ 0, & \text{если } A=\{\infty\} \text{ и } B=\{\infty\},\\ H_{\mathbb{R}}(\Pr(A),\Pr(B)), & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Расстояние $H_{\overline{\mathbb{R}}}$ определяет метрику в $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{R}})$.

Пусть (V,ρ_V) — некоторое метрическое пространство, $v_0\in V$. Многозначное отображение $f\colon V\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$ с замкнутыми образами полагаем непрерывным в точке v_0, если непрерывно соответствующее однозначное отображение, действующее в $(\mathrm{C}(\overline{\mathbb{R}}),H_{\overline{\mathbb{R}}})$. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $H_{\overline{\mathbb{R}}}(f(v),f(v_0))<\varepsilon$ для любого $v\in V$, удовлетворяющего неравенству $\rho_V(v,v_0)<\delta$. Отображение f непрерывно на некотором множестве, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Многие свойства отображения $f:V\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$ связаны со свойствами отображения

$$\Pr f:V\rightrightarrows\mathbb{R},\quad V\ni v\mapsto \Pr f(v)\doteq\Pr(f(v))\subset\mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Через $\operatorname{dom}f\doteq\big\{v:\Pr(f(v))\neq\varnothing\big\}$ будем обозначать *эффективное множество* отображения f, через $f_-^{-1}(W)\doteq\big\{t:f(v)\cap W\neq\varnothing\big\}$ — *полный прообраз множества* $W\subset\overline{\mathbb{R}}$ при отображении f. Для $W=\{\infty\}$ имеем $f_-^{-1}(\infty)=\{v:f(v)\ni\infty\}$. Непрерывность отображения f в точке $v_0\in V$ равносильна выполнению следующих условий:

1) если $v_0\in f_-^{-1}(\infty)$, то найдется окрестность $\Delta(v_0)$ точки v_0 такая, что $\Delta(v_0)\subset f_-^{-1}(\infty)$;
2) если $v_0\notin f_-^{-1}(\infty)$, то найдется окрестность $\Delta(v_0)$ точки v_0 такая, что $\Delta(v_0)\cap f_-^{-1}(\infty)=\varnothing$;
3) если $v_0\in\operatorname{dom}f$, то найдется окрестность $\Delta(v_0)$ точки v_0 такая, что $\Delta(v_0)\subset\operatorname{dom}f$ и отображение $\Pr f$ непрерывно в точке v_0;
4) если $v_0\notin\operatorname{dom}f$, то найдется окрестность $\Delta(v_0)$ точки v_0 такая, что $\Delta(v_0)\cap\operatorname{dom}f=\varnothing$.

Отметим, что относительно множества $\{\infty\}\subset\overline{\mathbb{R}}$ любое отображение $f\colon V\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$ является $\mathtt{в.}$ метрически регулярным с любым коэффициентом K. Действительно, в соотношении (2.3) неравенство $\mathcal{P}_Y(y,y')<+\infty$ в данном случае принимает вид $|y-\infty|<+\infty$ и ему удовлетворяет только $y=\infty$, а поэтому это соотношение выполнено для $x'=x$. Из данного очевидного факта следует, что отображение $f\colon V\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$ является K-$\mathtt{в.}$ метрически регулярным относительно множества $W\subset\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда отображение $\Pr f$ K-$\mathtt{в.}$ метрически регулярно относительно множества $\Pr(W)\subset\mathbb{R}$.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что отображение $f\colon V\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$ является B-липшицевым относительно множества $W\subset\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда отображение $\Pr f$ B-липшицево относительно множества $\Pr(W)\subset\mathbb{R}$.

Далее, пусть $V=[a,b]$, рассмотрим отображение $f\colon[a,b]\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$ и соответствующее ему отображение $\Pr f\colon[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}$, определенное соотношением (4.1). Отображение f называется *измеримым*, если для любого открытого множества $W\subset\overline{\mathbb{R}}$ его полный прообраз измерим (по Лебегу). Для измеримости отображения f необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:

1) множества $\operatorname{dom}f$ и $f_-^{-1}(\infty)$ измеримы;
2) сужение $\Pr f|_{\operatorname{dom}f}$ отображения $\Pr f$ на $\operatorname{dom}f$ — эффективное множество f — является измеримым многозначным отображением.

Пусть теперь $f\colon[a,b]\times\overline{\mathbb{R}}\rightrightarrows\overline{\mathbb{R}}$. Следуя известной терминологии, будем говорить, что отображение f *удовлетворяет условиям Каратеодори*, если для любого $x\in\overline{\mathbb{R}}$ отображение

$f(\cdot,x)\colon [a,b] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ измеримо и при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $f(t,\cdot)\colon \overline{\mathbb{R}} \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ непрерывно. Покажем, что на такие отображения можно распространить известные (см., например, [18, с. 75, 77]) для функций с конечными значениями утверждения: теорему о суперпозиционной измеримости многозначного отображения и лемму Филиппова о неявной функции.

Утверждение 1. *Пусть отображение* $f\colon [a,b]\times\overline{\mathbb{R}} \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любой измеримой функции* $z\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *отображение* $f(\cdot,z(\cdot))\colon [a,b] \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ *измеримо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную измеримую функцию $z\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ и рассмотрим множество $E \doteq [a,b]\backslash \mathrm{dom}\, z$, т. е. $E = \big\{t \in [a,b]\colon z(t) = \infty\big\}$. Так как эффективное множество $\mathrm{dom}\, z$ измеримо, E также будет измеримым множеством. Далее, при $t \in E$ имеем $f(t,z(t)) = f(t,\infty)$, поэтому в силу условий Каратеодори сужение $f(\cdot,z(\cdot))|_E$ отображения $f(\cdot,z(\cdot))$ на множество E измеримо.

Покажем, что $f(\cdot,z(\cdot))|_{\mathrm{dom}\, z}$ также измеримо.

Обозначим через $\widetilde{f} \doteq f|_{\mathrm{dom}\, z\times\mathbb{R}}$ сужение отображения f на $\mathrm{dom}\, z\times\mathbb{R}$. Очевидно, что отображение $\widetilde{f}\colon \mathrm{dom}\, z\times\mathbb{R} \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ будет удовлетворять условиям Каратеодори. Пусть для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ множество

$$T_\infty(x_0) \doteq \big\{t \in \mathrm{dom}\, z : f(t,x_0) = \{\infty\}\big\}$$

не пусто. Множество $T_\infty(x_0)$ измеримо, так как $T_\infty(x_0) = \big(\widetilde{f}(\cdot,x_0)\big)^{-1}_{-}(\infty)\backslash \mathrm{dom}\,\widetilde{f}(\cdot,x_0)$. Поскольку отображение $\widetilde{f}$ непрерывно по второму аргументу, то $T_\infty(x) = T_\infty(x_0)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, поэтому в обозначении $T_\infty(x_0)$ будем опускать x_0 и писать T_∞. Для любых $(t,x) \in (\mathrm{dom}\, z\backslash T_\infty)\times\mathbb{R}$ имеем $\mathrm{Pr}\,\widetilde{f}(t,x) \neq \varnothing$, таким образом, отображение $\mathrm{Pr}\,\widetilde{f}|_{(\mathrm{dom}\, z\backslash T_\infty)\times\mathbb{R}}$ действует в $\mathrm{K}(\mathbb{R})$, а также удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда к нему применима "классическая" теорема о суперпозиционной измеримости многозначного отображения (см. [18, с. 77]) и отображение $\mathrm{Pr}\,\widetilde{f}(\cdot,z(\cdot))|_{\mathrm{dom}\, z\backslash T_\infty}$ измеримо, что означает измеримость отображения $f(\cdot,z(\cdot))|_{\mathrm{dom}\, z\backslash T_\infty} = \widetilde{f}(\cdot,z(\cdot))|_{\mathrm{dom}\, z\backslash T_\infty}$. Далее, очевидно, что при $t \in T_\infty$ имеем $f(t,z(t)) = \infty$, т. е. $f(\cdot,z(\cdot))|_{T_\infty}$ также измеримо. Таким образом, измеримость отображения $f(\cdot,z(\cdot))|_{\mathrm{dom}\, z}$ доказана. $\square$

Следующее утверждение — аналог леммы Филиппова — сформулируем сначала не в самом общем, но именно в таком виде, который потребуется нам для исследования интегральных включений, полагая, что отображение f определено на $[a,b]\times\mathbb{R}$. Затем будет показано, как из этого утверждения получить более общий результат для отображения f, определенного на $[a,b]\times\overline{\mathbb{R}}$.

Утверждение 2. *Пусть отображение* $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, отображение* $U : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R})$ *измеримо и измеримая функция* $\widetilde{y} : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *удовлетворяет при п.в.* $t \in [a,b]$ *включению*

$$\widetilde{y}(t) \in f(t,U(t)). \tag{4.2}$$

Тогда существует измеримое сечение $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *отображения* U (*т. е. измеримая функция* u, *удовлетворяющая при п.в.* $t \in [a,b]$ *включению* $u(t) \in U(t)$) *такое, что при п.в.* $t \in [a,b]$ *выполнено*

$$\widetilde{y}(t) \in f(t,u(t)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $f(t,\cdot)$ непрерывно, то существует измеримое множество $E \subset [a,b]$ такое, что при п.в. $t \in E$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\infty \in f(t,x)$, а при п.в. $t \in [a,b]\backslash E$ и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\infty \notin f(t,x)$. Пусть $\widetilde{y}(t) = \infty$ при $t \in \Gamma \subset [a,b]$. Тогда множество Γ измеримо (в силу измеримости функции $\widetilde{y}$), $\Gamma \subset E$ и для любого измеримого сечения u_Γ отображения $U|_\Gamma$ получаем $\infty \in f(t,u_\Gamma(t))$, $t \in \Gamma$.

Далее, при п.в. $t \in [a,b] \backslash \Gamma = \operatorname{dom} \widetilde{y}$ включение (4.2) равносильно включению

$$\widetilde{y}(t) \in \operatorname{Pr} F(t, U(t)),$$

к которому применима классическая лемма Филиппова (см. [18, с. 75]), а это означает, что найдется измеримое сечение $u_{\operatorname{dom} \widetilde{y}}$ отображения $U|_{\operatorname{dom} \widetilde{y}}$ такое, что $\widetilde{y}(t) \in f(t, u_{\operatorname{dom} \widetilde{y}}(t))$, $t \in \operatorname{dom} \widetilde{y}$. Таким образом, искомую функцию $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ можно определить равенством

$$u(t) = \begin{cases} u_\Gamma(t), & t \in \Gamma \\ u_{\operatorname{dom} \widetilde{y}}(t), & t \in [a,b] \backslash \Gamma. \end{cases}$$

$\square$

З а м е ч а н и е 1. Доказанное утверждение остается справедливым и в более общей ситуации, когда $f : [a,b] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ и $U : [a,b] \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$. Доказательство такого, несколько более общего, аналога леммы Филиппова можно получить из утверждения 2 следующим образом.

Определим очевидно измеримые множества

$$U_-^{-1}(\{\infty\}) \doteq \big\{t \in [a,b] : \infty \in U(t)\big\}, \quad T_\infty \doteq \big\{t \in U_-^{-1}(\{\infty\}) : \widetilde{y}(t) \in f(t, \infty)\big\}.$$

При $t \in T_\infty$ можем положить искомую функцию равной $u(t) = \infty$, и тогда при этих t выполнено $\widetilde{y}(t) \in f(t, u(t))$. Остается определить функцию $u(t)$ при $t \in [a,b] \setminus T_\infty$, а это возможно в силу утверждения 2, так как при этих t включение (4.2) принимает вид $\widetilde{y}(t) \in f|_{[a,b]\backslash T_\infty \times \mathbb{R}}(t, \operatorname{Pr} U(t))$.

4.2. Условия разрешимости интегрального включения

Теперь получим основной результат разд. 4 — достаточные условия разрешимости в классе измеримых функций интегрального включения.

Вначале поясним, как понимается интеграл от измеримой функции $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (подробнее см. [19, гл. V, VI]). Определим неотрицательные измеримые функции $\phi_+, \phi_- : [a,b] \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_+(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{если } \phi(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \phi(t) < 0, \end{cases} \qquad \phi_-(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \phi(t) \geqslant 0, \\ -\phi(t), & \text{если } \phi(t) < 0. \end{cases}$$

Для каждой из этих функций существует интеграл Лебега $\int_a^b \phi_+(t)\,dt$, $\int_a^b \phi_-(t)\,dt$, конечный (когда соответствующая функция суммируема) или бесконечный (в противном случае). Будем полагать $\int_a^b \phi(t)\,dt = \int_a^b \phi_+(t)\,dt - \int_a^b \phi_-(t)\,dt$, если обе функции ϕ_+, ϕ_- суммируемы, и $\int_a^b \phi(t)\,dt = \infty$, если хотя бы одна из них не является суммируемой (и тогда, соответственно, функция ϕ также не суммируема).

Для измеримой функции $\phi : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, принимающей значение ∞ на множестве положительной меры, полагаем $\int\limits_a^b \phi(t)\,dt = \infty$.

Пусть заданы функции $\widetilde{y}$: $[a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varkappa : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ и многозначное отображение $f : [a,b] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим интегральное включение

$$\widetilde{y}(t) \in f\Big(t, \int\limits_a^b \varkappa(t,s) x(s)\,ds, x(t)\Big), \quad t \in [a,b], \tag{4.3}$$

относительно неизвестной измеримой функции $x : [a,b] \to \mathbb{R}$. Отметим, что при некоторых t функция $\varkappa(t,\cdot)x(\cdot)$ может быть несуммируемой, поэтому f как функция второго аргумента определяется на расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Включение (4.3) будем рассматривать как операторное включение вида (3.1) с многозначным отображением F, действующим в пространствах измеримых функций, эти пространства снабдим в. метрикой (1.2).

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(a) функции $\widetilde{y}$ и $\varkappa$ измеримы;

(b) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $z \in \overline{\mathbb{R}}$ и $x \in \mathbb{R}$ множество $f(t,z,x)$ компактно в $\overline{\mathbb{R}}$;

(c) для любых $z \in \overline{\mathbb{R}}$ и $x \in \mathbb{R}$ отображение $f(\cdot,z,x)\colon [a,b] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ измеримо;

(d) при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $f(t,\cdot,\cdot)\colon \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ непрерывно;

(e) существует измеримая функция $k\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ такая, что при п.в. $t \in \operatorname{dom}\widetilde{y}$ и любом $z \in \overline{\mathbb{R}}$ отображение $\operatorname{Pr} f(t,z,\cdot)\colon \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ является $k(t)$-метрически регулярным относительно множества $\{\widetilde{y}(t)\}$ (это условие равносильно условию $k(t)$-метрической регулярности относительно $\{\widetilde{y}(t)\}$ отображения $f(t,z,\cdot)\colon \mathbb{R} \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $z \in \overline{\mathbb{R}}$);

(f) существует измеримая функция $\beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ такая, что при п.в. $t \in \operatorname{dom}\widetilde{y}$, любом $x \in \mathbb{R}$ отображение $\operatorname{Pr} f(t,\cdot,x)\colon \overline{\mathbb{R}} \rightrightarrows \mathbb{R}$ является $\beta(t)$-липшицевым относительно множества $\{\widetilde{y}(t)\}$ (что равносильно условию $\beta(t)$-липшицевости относительно $\{\widetilde{y}(t)\}$ отображения $f(t,\cdot,x)\colon \overline{\mathbb{R}} \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}$ при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $x \in \mathbb{R}$).

Определим (очевидно, измеримую) функцию $B : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$B(t,s) \doteq \beta(t)|\varkappa(t,s)|, \quad t,s \in [a,b].$$

Для произвольной измеримой функции $\mathcal{P}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ обозначим

$$(K\mathcal{P})(t) \doteq k(t)\mathcal{P}(t), \tag{4.4}$$

$$(B\mathcal{P})(t) \doteq \int\limits_a^b B(t,s)\mathcal{P}(s)\,ds. \tag{4.5}$$

Лемма 1. *Пусть $p \geqslant r \geqslant 1$. Предположим, что функции k и B удовлетворяют следующим условиям:*

(g) $k \in L_\eta([a,b],\mathbb{R}_+)$, *где* $\eta \doteq \dfrac{pr}{p-r}$ *($\eta = \infty$ в случае, если $p = r$, и $\eta = r$, если $p = \infty$);*

(h) $\varkappa(t,\cdot) \in L_{r'}([a,b],\mathbb{R}_+)$ *при п. в.* $t \in [a,b]$, *где* $r' \doteq \dfrac{r}{r-1}$ *($r' = \infty$ в случае, если $r = 1$, и $r' = 1$, если $r = \infty$), и для функции $t \mapsto \mathcal{B}(t) \doteq \|B(t,\cdot)\|_{L_{r'}}$ выполнено $\mathcal{B} \in L_p([a,b],\mathbb{R}_+)$.*

Тогда для любого $\mathcal{P}_p \in L_p([a,b],\mathbb{R})$ выполнено $K\mathcal{P}_p \in L_r([a,b],\mathbb{R})$, а для любого $\mathcal{P}_r \in L_r([a,b],\mathbb{R})$ выполнено $B\mathcal{P}_r \in L_p([a,b],\mathbb{R})$.

Доказательство. Рассмотрим оператор K. Вначале пусть $r < p < \infty$. Тогда $r < \eta < \infty$ и $\dfrac{1}{\eta/r} + \dfrac{1}{p/r} = 1$. Поэтому, используя интегральное неравенство Гёльдера, для любого $\mathcal{P}_p \in L_p([a,b],\mathbb{R})$ получаем

$$\|K\mathcal{P}_p\|_{L_r} = \Big[\int\limits_a^b \big(k(t)\big)^r |\mathcal{P}_p(t)|^r dt\Big]^{1/r} \leqslant \Big[\int\limits_a^b \big(k(t)\big)^{r(\eta/r)} dt\Big]^{(r/\eta)\cdot(1/r)} \Big[\int\limits_a^b |\mathcal{P}_p(t)|^{r(p/r)} dt\Big]^{(r/p)\cdot(1/r)}.$$

Отсюда следует, что $\|K\mathcal{P}_p\|_{L_r} \leqslant \|k\|_{L_\eta} \cdot \|\mathcal{P}_p\|_{L_p} < \infty$, $K\mathcal{P}_p \in L_r([a,b],\mathbb{R})$.

Пусть теперь $r = p$. Тогда $\eta = \infty$, $k \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}_+)$, значит,

$$\|K\mathcal{P}_p\|_{L_r} = \|K\mathcal{P}_p\|_{L_p} \leqslant \|k\|_{L_\infty}\|\mathcal{P}_p\|_{L_p}, \quad K\mathcal{P}_p \in L_r([a,b],\mathbb{R}).$$

В заключение рассмотрим ситуацию $p = \infty$. В этом случае $\eta = r$, и поэтому

$$\|K\mathcal{P}_p\|_{L_r} = \|K\mathcal{P}_p\|_{L_\eta} \leqslant \|k\|_{L_\eta} \cdot \|\mathcal{P}_p\|_{L_\infty} = \|k\|_{L_\eta} \cdot \|\mathcal{P}_p\|_{L_p} < \infty, \quad K\mathcal{P}_p \in L_r([a,b],\mathbb{R}).$$

Рассмотрим оператор B. Прежде всего, из включения $\varkappa(t,\cdot) \in L_{r'}([a,b],\mathbb{R}_+)$ при п. в. $t \in [a,b]$ следует, что $B(t,\cdot) \in L_{r'}([a,b],\mathbb{R}_+)$. В силу равенства $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$ для любого $\mathcal{P}_r \in L_r([a,b],\mathbb{R})$ получаем

$$\|B\mathcal{P}_r\|_{L_p} = \Big[\int\limits_a^b \Big|\int\limits_a^b B(t,s)\mathcal{P}_r(s)\,ds\Big|^p dt\Big]^{1/p} \leqslant \Big[\int\limits_a^b \Big(\|B(t,\cdot)\|_{L_{r'}} \cdot \|\mathcal{P}_r\|_{L_r}\Big)^p dt\Big]^{1/p} = \|\mathcal{B}\|_{L_p} \cdot \|\mathcal{P}_r\|_{L_r}.$$

Таким образом, $B\mathcal{P}_r \in L_p([a,b],\mathbb{R})$. □

Из приведенного доказательства прямо вытекает, что справедливо следующее утверждение (более общее, чем лемма 1).

Следствие 1. *При выполнении условий* **(g)**, **(h)** *соотношения* (4.4) *и* (4.5) *задают линейные ограниченные операторы* $K : L_p([a,b],\mathbb{R}) \to L_r([a,b],\mathbb{R})$ *и* $B : L_r([a,b],\mathbb{R}) \to L_p([a,b],\mathbb{R})$ *соответственно, причем*

$$\|K\|_{L_p \to L_r} \leq \|k\|_{L_\eta}, \quad \|B\|_{L_r \to L_p} \leq \|\mathcal{B}\|_{L_p}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **(a)**–**(h)**. *Предположим, что для спектрального радиуса* ϱ *композиции* $KB\colon L_r([a,b],\mathbb{R}) \to L_r([a,b],\mathbb{R})$ *операторов* K *и* B, *определенных соответственно соотношениями* (4.4) *и* (4.5), *выполнено неравенство* $\varrho(KB) < 1$. *Тогда для любых измеримых функций* $x_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *и* $y_0\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *таких, что*

$$y_0(t) \in f\Big(t, \int\limits_a^b \varkappa(t,s)x_0(s)\,ds, x_0(t)\Big) \text{ при п.в. } t \in [a,b], \quad \widetilde{y} - y_0 \in L_p([a,b],\mathbb{R}),$$

и любого $\varepsilon > 0$ *существуют решение* x *включения* (4.3) *и функция* $\delta \in L_r([a,b],\mathbb{R}_+)$, $\|\delta\|_{L_r} < \varepsilon$, *удовлетворяющие при п.в.* $t \in [a,b]$ *неравенству*

$$\mathcal{P}_{S_r}(x,x_0) \leqslant (I - KB)^{-1}K\mathcal{P}_{S_p}(\widetilde{y},y_0) + \delta,$$

где $\mathcal{P}_{S_r}$ *и* $\mathcal{P}_{S_p}$ — в. *метрики в пространстве измеримых функций, определяемые равенством* (1.2), *т. е.* $\mathcal{P}_{S_r}(x,x_0) = |x(\cdot) - x_0(\cdot)| \in L_r([a,b],\mathbb{R})$, $\mathcal{P}_{S_p}(\widetilde{y},y_0) = |\widetilde{y}(\cdot) - y_0(\cdot)| \in L_p([a,b],\mathbb{R})$.

Доказательство. Для применения теоремы 1 запишем рассматриваемое интегральное включение в виде операторного включения (3.1), т.е. определим отображение F, порождаемое включением (4.3).

Для каждой измеримой функции $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ функция $\mathcal{J}z : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, заданная формулой

$$(\mathcal{J}z)(t) \doteq \int\limits_a^b \varkappa(t,s)z(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

измерима (см. [19], замечание 2 к теореме Фубини, с. 383). А из условий **(c)** и **(d)** согласно утверждению 1 следует, что многозначная функция $f\big(\cdot,(\mathcal{J}z)(\cdot),x(\cdot)\big) : [a,b] \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ измерима для любых измеримых функций $x, z : [a,b] \to \mathbb{R}$. Это позволяет определить F как отображение, сопоставляющее каждой паре измеримых функций $x, z : [a,b] \to \mathbb{R}$ множество $F(x,z)$ всех измеримых сечений отображения $f\big(\cdot,(\mathcal{J}z)(\cdot),x(\cdot)\big)$. Рассматриваемое здесь включение (4.3) записывается в операторном виде (3.1) именно с таким отображением F. Наделим множество измеримых функций в. метриками $\mathcal{P}_{S_r}$ и $\mathcal{P}_{S_p}$ по формуле (1.2) (см. п. 1.2) и будем рассматривать отображение F, действующее следующим образом: $F : S_r([a,b],\mathbb{R}) \times S_r([a,b],\mathbb{R}) \rightrightarrows S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$. Покажем, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1.

Прежде всего напомним, что пространство $S_r([a,b],\mathbb{R})$ является полным относительно в. метрики $\mathcal{P}_{S_r}$.

Докажем, что отображение F K-регулярно по первому аргументу относительно множества $\{\widetilde{y}\}$, где оператор K определен соотношением (4.4). Пусть задана произвольная измеримая функция $z : [a,b] \to \mathbb{R}$. Определим многозначное отображение $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$,

$$g(t,x) \doteq f\big(t,(\mathcal{J}z)(t),x\big) \ \text{ при п.в. } t \in [a,b] \text{ и при всех } x \in \mathbb{R}.$$

Из условий **(c)** и **(d)** следует, что это отображение удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. измеримо по первому аргументу, непрерывно по второму и, следовательно, суперпозиционно измеримо (см. утверждение 1), а $F(\cdot,z) : S_r([a,b],\mathbb{R}) \rightrightarrows S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$ представляет собой оператор Немыцкого, порожденный отображением g.

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и обозначим $\widetilde{\varepsilon} \doteq \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^{1/r}}$. Возьмем произвольные функции $x \in S_r([a,b],\mathbb{R})$, $y \in S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$ такие, что $y(t) \in g(t,x(t))$ при п.в. $t \in [a,b]$ и $\mathcal{P}_{S_p}(\widetilde{y},y) < +\infty$ (т. е. $\|\widetilde{y}(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p} < +\infty$). Согласно условию **(e)** при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $g(t,\cdot)$ будет $k(t)$-метрически регулярным относительно множества $\{\widetilde{y}(t)\}$. Тогда для п.в. $t \in [a,b]$ найдется $\widetilde{x}(t) \in \mathbb{R}$ такой, что

$$\widetilde{y}(t) \in g(t,\widetilde{x}(t)) \ \text{ и } \ |\widetilde{x}(t) - x(t)| \leqslant k(t)|\widetilde{y}(t) - y(t)| + \widetilde{\varepsilon}. \tag{4.6}$$

Обозначим $r(t) \doteq k(t)|\widetilde{y}(t) - y(t)| + \widetilde{\varepsilon}$, функция $r(\cdot)$ измерима. Из (4.6) следует, что $\widetilde{x}(t) \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x(t),r(t)\big)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Отображение $t \mapsto \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x(t),r(t)\big)$ является измеримым и имеет компактные образы в $\mathbb{R}$, а из соотношений (4.6) следует, что

$$\widetilde{y}(t) \in g\Big(t,\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x(t),r(t)\big)\Big) \ \text{ при п.в. } \ t \in [a,b].$$

В силу утверждения 2 существует измеримое сечение $x'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ отображения $t \mapsto \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x(t),r(t)\big)$ такое, что $\widetilde{y}(t) \in g(t,x'(t))$ при п.в. $t \in [a,b]$. Для этой функции имеет место оценка

$$|x'(t) - x(t)| \leqslant r(t) = k(t)|\widetilde{y}(t) - y(t)| + \widetilde{\varepsilon}.$$

Ввиду леммы 1 из этой оценки следует, что $\mathcal{P}_{S_r}(x',x) = |x'(\cdot) - x(\cdot)| \in L_r([a,b],\mathbb{R})$ и

$$\mathcal{P}_{S_r}(x',x) \leqslant K\mathcal{P}_{S_p}(\widetilde{y},y) + \delta,$$

где линейный ограниченный оператор $K\colon L_p([a,b],\mathbb{R}) \to L_r([a,b],\mathbb{R})$ определен формулой (4.4), а функция δ является постоянной, тождественно равной $\widetilde{\varepsilon}$ и поэтому $\|\delta\|_{L_r} = \varepsilon$. Таким образом, отображение $F(\cdot,z)\colon S_r([a,b],\mathbb{R}) \rightrightarrows S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$ является K-регулярным относительно множества $\{\widetilde{y}\}$.

Покажем теперь, что отображение F по второму аргументу является B-липшицевым относительно множества $\{\widetilde{y}\}$. Зафиксируем произвольную измеримую функцию $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и определим отображение $h\colon [a,b] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathrm{K}(\overline{\mathbb{R}})$ равенством

$$h(t,u) \doteq f(t,u,x(t)) \text{ при п.в. } t \in [a,b] \text{ и всех } u \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Согласно условию **(f)** при п.в. $t \in [a,b]$ это отображение является $\beta(t)$-липшицевым по второму аргументу относительно множества $\{\widetilde{y}(t)\}$. При любом $x \in S_r([a,b],\mathbb{R})$ отображение $F(x,\cdot)\colon S_r([a,b],\mathbb{R}) \rightrightarrows S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$ каждой функции $z \in S_r([a,b],\mathbb{R})$ ставит в соответствие множество $F(x,z) \subset S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$ всех измеримых сечений отображения $h\big(\cdot,(\mathcal{J}z)(\cdot)\big)$. Итак, необходимо доказать, что это отображение является B-липшицевым относительно множества $\{\widetilde{y}\}$.

Покажем сначала, что для любых измеримых функций $\widetilde{u},u\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, что при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $\widetilde{y}(t) \in h\big(t,\widetilde{u}(t)\big)$ и $|\widetilde{u}(t)-u(t)| < +\infty$, найдется измеримая функция $y : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющая при п.в. $t \in [a,b]$ соотношениям

$$y(t) \in h\big(t,u(t)\big) \quad \text{и} \quad |\widetilde{y}(t)-y(t)| \leqslant \beta(t)|\widetilde{u}(t)-u(t)|. \tag{4.7}$$

Обозначим $r(t) \doteq \beta(t)|\widetilde{u}(t)-u(t)|$, функция $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима. Определим отображение $t \ni [a,b] \mapsto \mathrm{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\big(\widetilde{y}(t),r(t)\big)$. Это отображение имеет значениями компактные в $\overline{\mathbb{R}}$ множества и является измеримым. В силу $\beta(t)$-липшицевости при п.в. $t \in [a,b]$ отображения $h(t,\cdot)$ относительно множества $\{\widetilde{y}(t)\}$ отображение $t \ni [a,b] \mapsto \mathrm{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\big(\widetilde{y}(t),r(t)\big) \cap h(t,u(t))$ имеет непустые образы, измеримо и, следовательно, имеет измеримое сечение y. Таким образом, определена измеримая функция y, удовлетворяющая соотношениям (4.7).

Пусть теперь $\widetilde{z}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, $\widetilde{u}(t) \doteq \int_a^b \varkappa(t,s)\widetilde{z}(s)ds$ и

$$\widetilde{y}(t) \in h\big(t,\widetilde{u}(t)\big) = h\Big(t,\int\limits_a^b \varkappa(t,s)\widetilde{z}(s)ds\Big).$$

Согласно условию **(h)** для любой измеримой функции $z\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ такой, что $\mathcal{P}_{S_r}(\widetilde{z},z) < +\infty$, выполнено

$$\int\limits_a^b \varkappa(t,s)|\widetilde{z}(s)-z(s)|ds < +\infty.$$

Тогда функция $u(\cdot) \doteq \int_a^b \varkappa(\cdot,s)z(s)ds$ удовлетворяет при п.в. $t \in [a,b]$ соотношениям

$$|\widetilde{u}(t)-u(t)| = \Big|\int\limits_a^b \varkappa(t,s)\widetilde{z}(s)ds - \int\limits_a^b \varkappa(t,s)z(s)ds\Big| \leqslant \int\limits_a^b |\varkappa(t,s)||\widetilde{z}(s)-z(s)|ds < +\infty$$

и, следовательно, существует измеримая функция $y\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$, для которой ввиду (4.7) при п. в. $t \in [a,b]$ выполнены соотношения

$$y(t) \in h\big(t,u(t)\big) = h\Big(t,\int\limits_a^b \varkappa(t,s)\widetilde{z}(s)ds\Big),$$

$$(\mathcal{P}_{S_p}(\widetilde{y},y))(t) = |\widetilde{y}(t)-y(t)| \leqslant \beta(t)|\widetilde{u}(t)-u(t)| \leqslant \int\limits_a^b \beta(t)|\varkappa(t,s)||\widetilde{z}(s)-z(s)|ds = (B\mathcal{P}_{S_r}(\widetilde{z},z))(t).$$

Итак, отображение F является B-липшицевым по второму аргументу относительно множества $\{\widetilde{y}\}$.

Осталось доказать, что отображение $G\colon S_r([a,b],\mathbb{R}) \rightrightarrows S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$, определяемое равенством $G(x) \doteq F(x,x)$, замкнуто относительно множества $\{\widetilde{y}\}$. Рассмотрим произвольные последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_r([a,b],\mathbb{R})$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S_p([a,b],\overline{\mathbb{R}})$ и функцию $\widetilde{x} \in S_r([a,b],\mathbb{R})$ такие, что $y_k \in G(x_k)$, $k = 1,2,\ldots$, и имеют место сходимости $x_k \to x$, $y_k \to \widetilde{y}$ при $k \to \infty$ в соответствующих в. метрических пространствах (следовательно, $x_k(t) \to x(t)$ и $y_k(t) \to \widetilde{y}(t)$ п.в. на $[a,b]$). Покажем, что $\widetilde{y} \in G(\widetilde{x})$. Пусть

$$z_k(t) \doteq \int\limits_a^b \varkappa(t,s)x_k(s)ds \;\text{ и }\; \widetilde{z}(t) \doteq \int\limits_a^b \varkappa(t,s)\widetilde{x}(s)ds \;\text{ при п.в. } t \in [a,b].$$

Тогда в силу условия **(h)** при п.в. $t \in [a,b]$ имеет место сходимость $z_k(t) \to \widetilde{z}(t)$ при $k \to \infty$. Далее, согласно свойству **(d)** при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно, поэтому при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $H_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(t,z_k(t),x_k(t)), f(t,\widetilde{z}(t),\widetilde{x}(t))\big) \to 0$, $k \to \infty$. Отсюда следует, что при п.в. $t \in [a,b]$ для любого натурального k найдется такое $\widetilde{v}_k(t) \in f(t,\widetilde{z}(t),\widetilde{x}(t))$, что $|y_k(t) - \widetilde{v}_k(t)| < 1/k$. А так как $y_k(t) \to \widetilde{y}(t)$, $k \to \infty$, то и $\widetilde{v}_k(t) \to \widetilde{y}(t)$, $k \to \infty$. Так как множество $f(t,\widetilde{z}(t),\widetilde{x}(t))$ замкнуто, получаем, что $\widetilde{y}(t) \in f(t,\widetilde{z}(t),\widetilde{x}(t))$ при п.в. $t \in [a,b]$, т. е. $\widetilde{y} \in G(\widetilde{x})$. □

З а м е ч а н и е 2. Если в теореме 2 условия **(e)**, **(f)** выполнены для любого $\widetilde{y} \in \overline{\mathbb{R}}$, т. е. $f(t,z,\cdot)$ является $k(t)$-метрически регулярным, а $f(t,\cdot,x)$ — $\beta(t)$-липшицевым (относительно всего пространства $\overline{\mathbb{R}}$), то утверждение теоремы 2 будет верно для любой функции $\widetilde{y}(\cdot)$, для которой $\widetilde{y} - y_0 \in L_p([a,b],\mathbb{R})$.

Теорема 2, конечно, применима и к исследованию интегральных уравнений (если порождающее уравнение отображение рассматривать как многозначное со значениями — одноточечными множествами). Рассмотрим пример такого интегрального уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 2, но не удовлетворяющего условиям теорем (в частности, полученных в работах [4; 5; 20–22]) о регулярных отображениях в пространствах с “обычной метрикой”, значениями которой являются числа (из $\mathbb{R}_+$ или $\overline{\mathbb{R}_+}$).

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$t^{\varsigma}x(t) + \frac{x^3(t)}{t} + \sqrt[3]{\Big(t + \Big|\int\limits_0^1 \varkappa(t,s)x(s)\,ds\Big|\Big)^2} = \widetilde{y}(t), \quad t \in [0,1], \tag{4.8}$$

относительно неизвестной измеримой функции $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Будем предполагать, что в этом уравнении $\varsigma \in (0,1/10)$, функция $\varkappa\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ измерима и

$$\overline{\varkappa} \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |\varkappa(t,s)| < \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-6\varsigma}, \tag{4.9}$$

функция $\widetilde{y}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима. Покажем, что для любой правой части $\widetilde{y}$ такой, что

$$\int\limits_0^1 \Big(\widetilde{y}(t) - \frac{1}{\sqrt{t^5}}\Big)^2 dt < +\infty, \tag{4.10}$$

существует решение x, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_0^1 \Big(x(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big)^2 dt < +\infty. \tag{4.11}$$

Заметим, что правая часть $\widetilde{y}$ рассматриваемого уравнения является несуммируемой функцией. В работах [4;5;21;22] и др. функциональные (включая интегральные) уравнения и включения сводились к операторным в “традиционных” (с конечной скалярной метрикой) метрических пространствах суммируемых функций, поэтому к уравнениям с несуммируемыми функциями результаты цитируемых работ не применимы.

Определим порождающую уравнение (4.8) функцию $f\colon [0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ при п.в. $t\in[0,1]$, $z\in\overline{\mathbb{R}}$, $x\in\mathbb{R}$ соотношением

$$f(t,z,x)=\begin{cases} t^{\varsigma}x+\dfrac{x^3}{t}+\sqrt[3]{\big(t+|z|\big)^2}, & \text{если } z\neq\infty,\\ \infty, & \text{если } z=\infty,\end{cases}$$

проверим справедливость предположений теоремы 2.

Условия **(a)**–**(d)** очевидно выполнены. Проверим справедливость условий **(e)**, **(f)**.

При фиксированных t,z, $z\neq\infty$, функция $f(t,z,\cdot)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ есть биекция. Возьмем произвольный $x\in\mathbb{R}$ и определим $y=f(t,z,x)$. Для любого $\widetilde{y}\in\mathbb{R}$ существует $\widetilde{x}\in\mathbb{R}$ такой, что $\widetilde{y}=f(t,z,\widetilde{x})$. В силу теоремы Лагранжа о среднем существует $\zeta\in\mathbb{R}$ такой, что $|\widetilde{y}-y|=\Big(t^{\varsigma}+3\zeta^2/t\Big)|\widetilde{x}-x|$, следовательно,

$$|\widetilde{x}-x|=\frac{1}{t^{\varsigma}+3\zeta^2/t}|\widetilde{y}-y|\le\frac{1}{t^{\varsigma}}|\widetilde{y}-y|.$$

Таким образом, функция $f(t,z,\cdot)$ $k(t)$-метрически регулярна относительно $\mathbb{R}$ (а поэтому и относительно всего $\overline{\mathbb{R}}$) с коэффициентом $k(t)=t^{-\varsigma}$.

Отметим, что в исследованиях [4; 5; 20–22] функциональных (в частности, интегральных) уравнений и включений требовалось, чтобы соответствующие функции удовлетворяли условию метрической регулярности (или равносильному условию накрывания) с коэффициентом, не зависящим от переменной t. Рассматриваемая здесь функция $f(t,z,\cdot)$ таким свойством не обладает, что не позволяет применять к уравнению (4.8) результаты цитируемых работ, и по этой же причине неэффективно применять известные теоремы о точках совпадения [1–3].

При фиксированных t,x, для любых $z,\widetilde{z}$, отличных от ∞, существует $\zeta\in\mathbb{R}$ такой, что

$$|f(t,\widetilde{z},x)-f(t,z,x)|=\frac{2}{3\sqrt[3]{t+|\zeta|}}|\widetilde{z}-z|\le\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}|\widetilde{z}-z|.$$

Таким образом, функция $f(t,\cdot,x)$ является липшицевой относительно $\mathbb{R}$ (а поэтому и относительно всего $\overline{\mathbb{R}}$) с коэффициентом $\beta(t)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{t}}$ (функция $f(t,\cdot,x)$ не является липшицевой с константой, не зависящей от t, а именно такое более ограничительное, чем используемое в теореме 2, условие предполагалось в работах [4; 5; 20–22]).

Положим $p=5/2$, $r=2$ (т. е. выполнено условие $p\ge r\ge 1$) и определим $\eta\doteq\dfrac{pr}{p-r}=10$ и $r'\doteq\dfrac{r}{r-1}=2$.

Поскольку $\varsigma\in(0,1/10)$, функция $k(t)=t^{-\varsigma}$ суммируема на $[0,1]$ со степенью $\eta=10$. Таким образом, выполнено условие **(g)**.

Функция B определяется формулой $B(t,s)\doteq\dfrac{2}{3\sqrt[3]{t}}|\varkappa(t,s)|$, $t,s\in[0,1]$. Функция $\varkappa$ существенно ограничена на $[0,1]\times[0,1]$, при п.в. $t\in[0,1]$ как функция второго аргумента $\varkappa(t,\cdot)$ она также существенно ограничена (не превосходит по модулю число $\overline{\varkappa}=\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]}|\varkappa(t,s)|$). Следовательно, при п.в. $t\in[0,1]$ функция $B(t,\cdot)$ существенно ограничена и тем более $B(t,\cdot)\in L_{r'}([0,1],\mathbb{R}_+)$. Для функции $\mathcal{B}(t)\doteq\|B(t,\cdot)\|_{L_{r'}}$ из оценки

$$\mathcal{B}(t)=\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}\Big(\int\limits_0^1|\varkappa(t,s)|^2\,ds\Big)^{1/2}\le\frac{2\overline{\varkappa}}{3\sqrt[3]{t}}$$

получаем, что $\mathcal{B}\in L_p([0,1],\mathbb{R}_+)$, $p=5/2$. Итак, условие **(h)** выполнено.

Оператор $KB\colon L_r([0,1],\mathbb{R}) \to L_r([0,1],\mathbb{R})$, $r=2$, согласно (4.4), (4.5) определяется формулой

$$(KB\,\mathcal{P})(t) = \frac{2}{3t^{\varsigma+1/3}}\int\limits_0^1 \varkappa(t,s)\mathcal{P}(s)\,ds, \quad \mathcal{P}\in L_2([0,1],\mathbb{R}).$$

Оценим его норму. Имеем

$$\Bigg(\int\limits_0^1\Big[\frac{2}{3t^{\varsigma+1/3}}\int\limits_0^1 \varkappa(t,s)\mathcal{P}(s)\,ds\Big]^2 dt\Bigg)^{1/2} \le \frac{2}{3}\Bigg(\int\limits_0^1\Big[\int\limits_0^1\Big(\frac{\varkappa(t,s)}{t^{\varsigma+1/3}}\Big)^2 ds\Big]^{2\cdot 1/2}\|\mathcal{P}\|_{L_2}^2\,dt\Bigg)^{1/2}$$

$$\le \frac{2}{3}\frac{\overline{\varkappa}}{\sqrt{\frac{1}{3}-2\varsigma}}\|\mathcal{P}\|_{L_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\overline{\varkappa}}{\sqrt{1-6\varsigma}}\|\mathcal{P}\|_{L_2}.$$

Из этого неравенства в силу условия (4.9) получаем $\|KB\|_{L_2\to L_2}<1$, поэтому $\varrho(KB)<1$.

Остается выбрать функцию x_0 равную $x_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, тогда

$$y_0(t) = \frac{1}{t^{1/2-\varsigma}} + \frac{1}{t^{5/2}} + \sqrt[3]{\big(t+|H|\big)^2}, \text{ где } H = \int\limits_0^1 \frac{\varkappa(t,s)}{\sqrt{s}}\,ds.$$

А для этой функции и функции $\widetilde{y}_0(t)=\dfrac{1}{t^{5/2}}$ имеем $\widetilde{y}_0-y_0\in L_2([0,1],\mathbb{R})$. Поэтому в силу соотношения (4.10) получаем $\widetilde{y}-y_0\in L_2([0,1],\mathbb{R})$.

Итак, условия теоремы 2 выполнены, согласно этой теореме уравнение (4.8) имеет решение, удовлетворяющее требованию (4.11).

Отметим, что, если для существенно ограниченной функции $\varkappa$ выполнено $\varkappa(t,s)=0$ при $s>t$ (т.е. в случае вольтерровости уравнения (4.8)), спектральный радиус оператора $KB\colon L_2([0,1],\mathbb{R})\to L_2([0,1],\mathbb{R})$ равен нулю без дополнительного ограничения (4.9) на величину $\overline{\varkappa}$. Таким образом, такое вольтеррово уравнение (4.8) с любой существенно ограниченной функцией $\varkappa$ имеет решение, удовлетворяющее соотношению (4.11).

В заключение рассмотрим уравнение (4.8) при конкретной функции

$$\varkappa(t,s) = \begin{cases} s, & \text{если } t\in[0,1/2],\\ 1/2, & \text{если } t\in(1/2,1].\end{cases}$$

Эта функция измерима на $[0,1]\times[0,1]$ и удовлетворяет неравенству (4.9). Поэтому для уравнения (4.8) с такой функцией $\varkappa$ выполнены условия теоремы 2. В теореме 2 положим функции $x_0, y_0\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ равными

$$x_0(t)=\frac{1}{t},\quad y_0(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{1-\varsigma}} + \dfrac{1}{t^4} + \sqrt[3]{\big(t+1\big)^2}, & \text{если } t\in[0,1/2],\\ \infty, & \text{если } t\in(1/2,1].\end{cases}$$

Тогда согласно этой теореме у уравнения (4.8) с рассматриваемой функцией $\varkappa$ для любой правой части $\widetilde{y}$ такой, что

$$\int\limits_0^{1/2}\Big(\widetilde{y}(t)-\frac{1}{t^{1-\varsigma}}-\frac{1}{t^4}\Big)^2 dt < +\infty \text{ при } t\in(1/2,1]$$

и $\widetilde{y}(t)=\infty$ при $t\in(1/2,1]$, существует решение x, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_0^1\Big(x(t)-\frac{1}{t}\Big)^2 dt < +\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнов А.В.** Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
2. **Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.** Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Point Theory Appl. 2009. Vol. 5. P. 105–127. doi: 10.1007/s11784-008-0096-z
3. **Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.** Точки совпадения и обобщенные точки совпадения двух многозначных отображений // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 42–49. doi: 10.4213/tm4075
4. **Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.** Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
5. **Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.** О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1523–1537.
6. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения векторных отображений // Изв. вузов. Математика. 2016. № 10. С. 14–28.
7. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 3. С. 344–362. doi: 10.4213/mzm10675
8. **Жуковский Е.С.** О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 297–311. doi: 10.17377/smzh.2016.57.206
9. **Перов А.И.** Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского // Функц. анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 1. С. 83–87. doi: 10.4213/faa2953
10. **Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.** О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 93–105. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105 .
11. **Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E., Zhukovskaya Z.T.** Kantorovich's fixed point theorem and coincidence point theorems for mappings in vector metric spaces // Set-Valued Var. Anal. 2022. Vol. 30. P. 397–423. doi: 10.1007/s11228-021-00588-y
12. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
13. **Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.** Курс метрической геометрии. М; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2004. 512 с.
14. **Иоффе А.Д.** Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, вып. 3 (333). С. 103–162. doi: 10.4213/rm292
15. **Жуковская Т.В., Мерчела В., Шиндяпин А.И.** О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах // Вестн. российских ун-тов. Математика. 2020. Т. 25. Вып. 129. С. 18–24. doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24
16. **Мерчела В.** Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием // Вестн. российских ун-тов. Математика. 2022. Т. 27. Вып. 137. С. 27–36. doi: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36
17. **Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.** Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
18. **Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.** Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 224 с.
19. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 1999. 560 с.
20. **Жуковский Е.С., Мерчела В.** Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций // Дифференцю уравнения. 2022. Т. 58, № 1. С. 93–104. doi: 10.31857/S0374064122010101
21. **Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.** Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 4. С. 439–455.

22. **Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S.** On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. Vol. 94, no. 1. P. 129–143. doi: 10.1080/00036811.2014.891732

Поступила 14.06.2023
После доработки 18.08.2023
Принята к публикации 21.08.2023

Панасенко Елена Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой функционального анализа
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
г. Тамбов
e-mail: panlena_t@mail.ru

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Covering mappings in metric spaces and fixed points. *Dokl. Math.*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S1064562407050079
2. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2009, vol. 5, no. 1, pp. 105–127. doi: 10.1007/s11784-008-0096-z
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points and generalized coincidence points of two set-valued mappings. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, no. 1, pp. 35–41. doi: 10.1134/S0081543820010034
4. Avakov E. R., Arutyunov A. V., Zhukovskii E. S. Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative. *Diff. Equ.*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 627–649. doi: 10.1134/S0012266109050024
5. Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskii S.E. On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative. *Diff. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1541–1555. doi: 10.1134/S0012266111110012
6. Zhukovskiy E.S. On coincidence points for vector mappings. *Russian Math.*, 2016, vol. 60, no. 10, pp. 10–22. doi: 10.3103/S1066369X16100030
7. Zhukovskiy E.S. On coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 3, pp. 363–379. doi: 10.1134/S0001434616090030
8. Zhukovskii E.S. Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 230–241. doi: 10.1134/S0037446616020063
9. Perov A.I. Multidimensional version of M. A. Krasnosel'skii's generalized contraction principle. *Func. Anal. Its Appl.*, 2010, vol. 44, no. 1, pp. 69–72. doi: 10.1007/s10688-010-0008-z
10. Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. S191–S203. doi: 10.1134/S0081543819040199
11. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E., Zhukovskaya Z.T. Kantorovich's fixed point theorem and coincidence point theorems for mappings in vector metric spaces. *Set-Valued Var. Anal.*, 2022, vol. 30, no. 2, pp. 397–423. doi: 10.1007/s11228-021-00588-y
12. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, NY, Cairo, Hindawi Publ. Corporation, 2007, 324 p. ISBN: 9789775945495. Original Russian text was published in Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F., *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya*, Moscow, Izhevsk, Inst. Komput. Issled. Publ., 2002, 384 p. ISBN: 5-93972-112-5.
13. Dmitri Burago, Yuri Burago, Sergei Ivanov. *A course in metric geometry* (Graduate studies in mathematics, ISSN 1065-7339; vol. 33.), Providence, Rhode Island, Amer. Math. Soc., 2001, 415 p. ISBN: 0-8218-2129-6. Translated to Russian under the title *Kurs metricheskoi geometrii*, Moscow, Izhevsk, Inst. Komput. Issled., 2004, 512 p. ISBN: 978-5-93972-300-7.
14. Ioffe A.D. Metric regularity and subdifferential calculus. *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 501–558. doi: 10.1070/RM2000v055n03ABEH000292

15. Zhukovskaya T.V., Merchela W., Shindyapin A.I. On coincidence points of mappings in generalized metric spaces. *Vestnik Rossiiskikh Univ. Math.*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 18–24 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24
16. Merchela W. Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance. *Vestnik Rossiiskikh Univ. Math.*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 27–36 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36
17. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Approximate solution of operator equations*, Dordrecht, Springer, 1972, 504 p. doi: 10.1007/978-94-010-2715-1 Original Russian text was published in Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya., *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 456 p.
18. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions]. Moscow, Librokom, 2011, 224 p. ISBN: 978-5-397-01526-4
19. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable*, Dover Publ., 2016, 544 p. ISBN: 978-0486806433. Original Russian text was published in Natanson I.P., *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi*, Saint Petersburg, Lan', 1999, 560 p. ISBN: 5-8114-0136-1.
20. Zhukovskiy E.S., Merchela W. A method for studying integral equations by using a covering set of the Nemytskii operator in spaces of measurable functions. *Diff. Equ.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 92–103. doi: 10.1134/S0012266122010104
21. Zhukovskii E.S., Pluzhnikova E.A. Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative, *Diff. Equ.*, 2013, vol. 49, no. 4, pp. 420–436. doi: 10.1134/S0012266113040034
22. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Zhukovskiy E., Zhukovskiy S. On the solvability of implicit differential inclusions. *Applicable Analysis*, 2015, vol. 94, no. 1, pp. 129–143. doi: 10.1080/00036811.2014.891732

Received June 14, 2023
Revised August 18, 2023
Accepted August 21, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/).

Elena Aleksandrovna Panasenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, 392000 Russia, e-mail: panlena_t@mail.ru .

Cite this article as: E. A. Panasenko. On operator inclusions in spaces with vector-valued metrics. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 106–127.