ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПРОСТЫМ ЦОКОЛЕМ ИЗ “АТЛАСА КОНЕЧНЫХ ГРУПП”[1]

В. И. Зенков

Ранее автором были описаны с точностью до сопряжения все пары (A, B) нильпотентных подгрупп в конечной группе G с цоколем $L_2(q)$, для которых $A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Аналогичное описание было позднее получено автором для примарных подгрупп A и B в конечной группе G с цоколем $L_n(2^m)$. В данной работе дается описание с точностью до сопряжения всех пар (A, B) нильпотентных подгрупп A и B из конечной группы G с простым цоколем из “Атласа конечных групп”, для которых $A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Полученные результаты в рассмотренных случаях подтверждают гипотезу (задача 15.40 из “Коуровской тетради”) о том, что в конечной простой неабелевой группе G для любой ее нильпотентной подгруппы N найдется такой элемент g, что $N \cap N^g = 1$.

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп, подгруппа Фиттинга.

V. I. Zenkov. On intersections of nilpotent subgroups in finite groups with simple socle from the “Atlas of Finite Groups”.

Earlier, the author described up to conjugation all pairs (A, B) of nilpotent subgroups of a finite group G with socle $L_2(q)$ for which $A \cap B^g \neq 1$ for any element of G. A similar description was obtained by the author later for primary subgroups A and B of a finite group G with socle $L_n(2^m)$. In this paper, we describe up to conjugation all pairs (A, B) of nilpotent subgroups of a finite group G with simple socle from the “Atlas of Finite Groups” for which $A \cap B^g \neq 1$ for any element g of G. The results obtained in the considered cases confirm the hypothesis (Problem 15.40 from the “Kourovka Notebook”) that a finite simple non-Abelian group G for any nilpotent subgroups N contains an element g such that $N \cap N^g = 1$. Keywords: finite group, nilpotent subgroup, intersection of subgroups, Fitting subgroup.

MSC: 20D06, 20D30, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-54-66

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — ее подгруппы. Определим $M_G(A, B)$ как множество всех минимальных по включению пересечений вида $A \cap B^g$, где $g \in G$, а $m_G(A, B)$ — как подмножество всех минимальных по порядку элементов из $M_G(A, B)$. Определим также подгруппы $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M_G(A, B)\rangle$ и $\mathrm{min}_G(A, B) = \langle m_G(A, B)\rangle$.

В одной из ранних работ автора (1994) были изучены пересечения абелевых подгрупп в произвольных конечных группах и было доказано, что $\mathrm{Min}_G(A, B) \leq F(G)$ для любых абелевых подгрупп A и B из G (см. работу автора и [1, теорема 2.18]). Этот результат обобщал теорему Дж. С. Бродки [2, 1963], исследования Т. Дж. Лаффи [3, 1976] и результаты У. Демпвольфа и С. К. Вонга [4, 1982].

Однако пример группы $G = E_9 \leftthreetimes D_8$, в которой D_8 действует точно на E_9 и $A = B = D_8$, показывает, что $\mathrm{Min}_G(A, B) = \mathrm{min}_G(A, B) = D_8 \not\leq F(G) = E_9$, хотя A и B — минимальные неабелевы группы. Более того, в работе автора в этом журнале (2015. Т. 21, № 3) приведен пример группы $G = C_2 \times \Sigma_4$, в которой существуют четверная подгруппа A и подгруппа $B \simeq D_8$ такие, что $A \cap B^{g_1} \leq F(G)$, а $A \cap B^{g_2} \not\leq F(G)$ для некоторых элементов g_1 и g_2 из G.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-01-00456.

Эти примеры относятся к разрешимым группам, изучать пересечения силовских подгрупп в которых начал еще У. Бёрнсайд [5; 6] в начале прошлого века, а продолжил Ито [7]. Первый опубликованный пример почти простой группы G с нильпотентными подгруппами A и B, для которых $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$, появился в совместной работе автора с В. Д. Мазуровым [8, теорема 1]. Это была группа $G = \Sigma_8$, в которой $A = B \in \mathrm{Syl}_2(G)$. В этой же работе было доказано, что в простой неабелевой группе G для любых примарных подгрупп A и B из G выполняется равенство $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$, а для симметрической группы $G = \Sigma_n$ — также $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$ при $n \geq 5$ за исключением указанной группы $G = \Sigma_8$. Позднее автор в [9] доказал, что $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$ для любой почти простой группы G и любой пары (A,B) ее p-подгрупп, где $p \geq 5$ — простое число. Для случаев $p = 2,3$ имеются исключения. Теорема 2 из [8] подтверждает гипотезу Брауэра о том, что для простой неабелевой группы G и любой ее силовской p-подгруппы имеем $|G| > |P|^2$. Теорема 2 из [8] доказана с помощью классификации конечных простых групп. Без классификации эта гипотеза справедлива при условии, что $P \cap P^g \trianglelefteq P$ или $P \cap P^g \triangleleft P^g$ для любого $g \in G$. Доказательство для $p = 2$ представлено в [10] и с использованием идеи из этой работы для $p > 2$ — в [11].

Более общий случай пересечений нильпотентных холловых подгрупп в конечных группах нечетного порядка рассматривал Н. Белостоцкий в [12], который доказал, что в такой группе G с нильпотентной π-холловой подгруппой N и $O_\pi(G) = 1$ найдется такой элемент g, что $N \cap N^g = 1$.

Исходя из этого, для случая простой неабелевой группы G и нильпотентной подгруппы N из G в “Коуровской тетради” [13] поставлен вопрос 15.40: “Верно ли, что $N \cap N^g = 1$ для некоторого элемента g из G?” По основной теореме о классификации конечных простых неабелевых групп (см. [14]) такая группа принадлежит одному из следующих трех типов.

• *Знакопеременные группы.* Положительный ответ на вопрос 15.40 для знакопеременной группы G получен Р. К. Курмазовым в [15]. Более общий результат для групп A_n опубликован автором в этом журнале (2013. Т. 19, № 3).

• *Спорадические группы.* Автор получил результат “О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных группах со спорадическим цоколем”, опубликованный в 2020 г. (Алгебра и логика. Т. 59, № 4), который закрывает вопрос 15.40 для спорадической группы.

• *Группы лиева типа* (см., например, [16]).

Согласно [17] ответ на данный вопрос также положителен, т. е. $\mathrm{min}_G(A,B) = 1$ в случае, когда A — абелева и B — нильпотентная подгруппы в G. Кроме того, автор в [18, теорема 2] для группы G с цоколем $L_2(q)$ и нильпотентных подгрупп A и B из G дал описание подгруппы $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$, из которого следовал ответ на вопрос 15.40 из “Коуровской тетради” в этом случае.

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает множество конечных простых групп, которые либо принадлежат списку ‘The groups” из “Атласа конечных групп” [19, c. V], либо изоморфны одной из групп $L_6(2)$, $L_7(2)$, $U_5(4)$, $U_n(2)$ ($7 \leq n \leq 9$). В данной статье, продолжая исследования, начатые в [16; 18; 20–23; 25] и др. работах автора, мы рассматриваем случай группы G с простым цоколем из множества $\mathcal{L}$ и нильпотентными подгруппами A и B из G, для которых $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$.

Настоящая работа завершает эти мсследования, т. е. мы доказываем, что любая конечная группа с простым цоколем из “Атласа конечных групп” [19, c. V], в которой $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$ для некоторых нильпотентных подгрупп A и B, обязательно имеет эти подгруппы примарными, и в пп. (4а)–(4ж) доказываемой ниже теоремы приводим описание этих подгрупп A и B.

Теорема. *Пусть G — конечная группа с простым цоколем из множества $\mathcal{L}$, A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) $A \cap B^g \neq 1$ *для некоторого элемента g из G*;

(2) $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$;

(3) $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$;

(4) *либо* A *и* B — 2-*подгруппы из* G *и для* $A \leq S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ *выполняется одно из следующих утверждений* (а)–(ж) :

а) $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $n \leq 7$, *и с точностью до сопряжения подгруппы* A *и* B *являются надгруппами подгруппы* $\min_G(S,S)$;

б) $\mathrm{Soc}\,(G) \simeq L_3(4)$, $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau\rangle$ *или* $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau, f\rangle$, *где инволюция* τ *индуцирует графовый автоморфизм на* $\mathrm{Soc}\,(G)$, *а инволюция* f *индуцирует полевой автоморфизм на* $\mathrm{Soc}\,(G)$, $A \cap B \cap \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau\rangle > \min_G(S,S)$, *причем* $A \geq \mathrm{Min}_G(S,S)$ *или* $B \geq \mathrm{Min}_G(S,S)$;

в) $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(9))$, *и с точностью до сопряжения* $(A,B) \in \{(\min_G(S,S),S), (S,\min_G(S,S)),(S,S)\}$;

г) $G \simeq \mathrm{Aut}\,(\Omega^+_{2n}(2))$, $n = 4,5$, *и с точностью до сопряжения подгруппы* A *и* B *являются надгруппами подгруппы* $\min_G(S,S)$;

д) $G \simeq \mathrm{Aut}\,(E_6(2))$, *и с точностью до сопряжения подгруппы* A *и* B *являются надгруппами подгруппы* $\min_G(S,S)$;

е) $G \simeq \mathrm{Aut}\,(F_4(2))$, *и с точностью до сопряжения подгруппы* A *и* B *являются надгруппами подгруппы* $\min_G(S,S)$, *и хотя бы одна из них строго содержит* $\min_G(S,S)$;

либо A *и* B — 3-*подгруппы из* G, *и для* $A \leq T \in \mathrm{Syl}_3(G)$ *выполняется следующее утверждение*:

ж) $G \simeq \Omega^+_8(3)\langle f\rangle$ *или* $G \simeq \Omega^+_8\langle f, e\rangle$, *где элемент* f *порядка* 3 *и инволюция* e *индуцируют на* $\Omega^+_8(3)$ *графовые автоморфизмы, и с точностью до сопряжения подгруппы* A *и* B *являются надгруппами подгруппы* $\min_G(T,T)$.

З а м е ч а н и е 1. Подгруппы $\min_G(S,S)$ и в некоторых случаях $\mathrm{Min}_G(S,S)$ из п. (4) теоремы описаны в следующих утверждениях:

– в лемме 1.5 — для $L_n(2^m)$, что относится к п. (4а) теоремы при $n = 3,4$ и $m = 1$ и к п. (4б) при $n = 3$ и $m = 2$;
– в лемме 1.6 — для $L_2(q)$, что относится к п. (4в) теоремы;
– в теореме 1 из [20] — для $\Omega^+_{2n}(2)$, что относится к п. (4г) теоремы;
– в теореме 4 из [21] — для $E_6(2)$, что относится к п. (4д) теоремы;
– в теореме 1 из [22] — для $F_4(2)$, что относится к п. (4е) теоремы;
– в теореме 1 из работы автора (Фунд. и прикл. математика, 2014, Т. 19, № 6) — для $\Omega^+_8(3)$, что относится к п. (4ж) теоремы.

1. Обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения в основном стандартны (см., например, [14; 19]).

Симметрическая группа степени n обозначается через Σ_n, а знакопеременная группа степени n — через A_n. Через $E(G)$ обозначается слой конечной группы G, а через $A \star B$ — центральное произведение групп A и B.

Приведем некоторые результаты, которые часто используются в доказательстве теоремы.

Лемма 1.1 [8, теорема 2]. *Пусть* G — *конечная простая неабелева группа,* A *и* B — *примарные подгруппы из* G. *Тогда* $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.

Лемма 1.2 [1, теорема 2.18]. *Пусть* G — *конечная группа,* A *и* B — *абелевы подгруппы из* G. *Тогда* $\mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$.

Лемма 1.3 [17, теорема 1]. *Пусть* G — *конечная группа,* A — *абелева подгруппа и* B — *нильпотентная подгруппа из* G. *Тогда* $A \cap B^g \leq F(G)$ *для некоторого элемента* g *из* G.

Лемма 1.4 [18, лемма 1.6]. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что $A \leq G_1$. Если $G_2 \trianglelefteq G_1$ и $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в фактор-группе $\overline{G_1} = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \cap \overline{G_1 \cap B^g}^{\overline{g_1}} = \bar{1}$ для некоторого элемента g_1 из G_1, то $A \cap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

Лемма 1.5 [23, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_n(2^m)$, S — силовская 2-подгруппа из G. Если $\min_G(S,S) \neq 1$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$m = 1$, $n \geq 3$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_n(2))$, $\min_G(S,S) = S$ при $n = 2k+1$ и $\min_G(S,S) = O_2(N_G(P))$ при $n = 2k$, где P — параболическая подгруппа, соответствующая центральной вершине в схеме Дынкина для $L_n(2)$;*

(2) *$m = 2$, $n = 3$, $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau\rangle$ или $G = \mathrm{Soc}\,(G)\langle\tau, f\rangle$, где инволюция τ индуцирует графовый автоморфизм на $\mathrm{Soc}\,(G)$, а инволюция f индуцирует полевой автоморфизм на $\mathrm{Soc}\,(G)$, и $\min_G(S,S) = \langle\tau^S\rangle$, $\langle\tau^S\rangle > Z(S_0)$, где $S_0 = A \cap \mathrm{Soc}\,(G)$, причем $\mathrm{Min}_G(S,S) = S_0\langle\tau\rangle$.*

Лемма 1.6 [18, теоремы 1 и 2]. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, где q нечетно, S — силовская 2-подгруппа из G, A и B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$;

(2) $\min_G(A,B) \neq 1$;

(3) *либо $q = 2^m - 1$ — простое число Мерсенна, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(q))$, пара (A,B) с точностью до сопряженности совпадает с парой (S,S), $M_G(A,B) = m_G(A,B)$ и $\mathrm{Min}_G(A,B) = \min_G(A,B) = S$, либо $q = 9$, $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(9))$, пара (A,B) с точностью до сопряженности принадлежит множеству $\{(S,S), (\min_G(S,S),S), (S,\min_G(S,S))\}$, $M_G(A,B) = m_G(A,B)$ и $\mathrm{Min}_G(A,B) = \min_G(A,B) = \langle i,j\rangle \simeq D_{16}$, инволюции i и j лежат в $G \backslash G'$ и $|C_S(i)| = |C_S(j)| = 8$.*

2. Доказательство теоремы

Пусть выполняются условия теоремы и $L := \mathrm{Soc}\,(G)$. Равносильность утверждений (1)–(3) теоремы следует непосредственно из определений подгрупп $\mathrm{Min}_G(A,B)$ и $\min_G(A,B)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Но (4) $\Rightarrow$ (3) в случаях (4а) и (4б) теоремы согласно [23, теорема 2]; в случае (4в) — согласно [18, теорема 2]; в случае (4г) — согласно [20, теорема 2]; в случае (4д) — согласно [21, теорема 5]; в случае (4е) — согласно [22, теорема 2]; в случае (4ж) — согласно теореме 1 (Фунд. и прикл. математика, 2014, Т. 19, № 6).

Поэтому достаточно доказать, что (3) $\Rightarrow$ (4) для любой простой группы из списка групп $\mathcal{L}$.

Прежде всего заметим, что любая простая группа из списка групп $\mathcal{L}$ по основной теореме о классификации конечных простых неабелевых групп (см. [14]) изоморфна одной из следующих групп:

(A) знакопеременной группе A_n, где $13 > n > 4$;
(B) спорадической группе;
(C) группе лиева типа над конечным полем порядка, не превосходящего 32.

В случае (A) согласно основной теореме из статьи автора в этом журнале (2013. Т. 19, № 3) имеем $n = 8$, причем A и B являются 2-группами, поэтому (3) $\Rightarrow$ (4) по [23, теорема 1].

В случае (B) (3) $\Leftrightarrow$ (4) по теореме 2 из статьи автора (Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4).

Рассмотрим случай (C). Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 2.1. *Если $L \simeq Sp_4(4)$, то $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.*

Доказательство. Пусть $L \simeq Sp_4(4)$. Тогда согласно [19, с. 44] имеем $|L| = 2^8{\cdot}3^2{\cdot}5^2{\cdot}17$ и $\mathrm{Out}\,(L) \simeq C_4$. По лемме 1.3 можно считать, что подгруппа A имеет неабелеву силовскую подгруппу. Следовательно, подгруппа $O_2(A)$ неабелева. Значит, $D := O_2(A) \cap L \neq 1$. Согласно [24, предложение 3.1.4] для подгруппы $N := N_G(D)$ имеем $F^*(N) = O_2(N)$. Поэтому согласно [9, теорема В(2б)] в 2-замкнутой подгруппе $R := O_2(N)A$ имеем $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого g из G. При этом в силу разрешимости подгруппы R без ограничения общности можно считать, что $B_1 \leqslant O(A)$, где $B_1 := R \cap B^g$. Так как $O(A)$ — абелева подгруппа, то по лемме 1.2 имеем $O(A) \cap O(A)^x = 1$ для некоторого x из R. Следовательно, $A \cap B_1^x \leqslant O(A) \cap O(A)^x = 1$. Поэтому $A \cap B_1^x = A \cap (R \cap B^g)^x = A \cap B^{gx} = 1$. Значит, $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Это противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.2. *Если* $L \simeq {}^3D_4(2)$, *то* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Доказательство. Пусть $L \simeq {}^3D_4(2)$. Тогда согласно [19, с. 89] имеем $|L| = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $\mathrm{Out}\,(L) \simeq C_3$. По лемме 1.3 можно считать, что подгруппа A имеет неабелеву силовскую подгруппу. Из таблицы характеров группы G (см. [19, с. 90]) следует, что централизаторы непримарных элементов нечетного порядка в группе G абелевы. Следовательно, порядок $|A|$ четен. Поэтому, дословно повторяя соответствующее рассуждение леммы 2.1, получим, что либо $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$, либо $O(A) \cap O(A)^x > 1$ для любого элемента x из R. Во втором случае согласно [27, теорема 1.1] R содержит подгруппу, изоморфную $C_3 \wr C_3$, и, в частности, $|O_3(A)| \geq 3^4$. Но в группе G нет инволюций, централизующих подгруппу порядка 3^4 в G; противоречие.

Это противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.3. *Если* $L \simeq G_2(5)$, *то* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Доказательство. Пусть $L \simeq G_2(5)$. Так как $\mathrm{Out}\,(L) = 1$, группа G проста. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа из G. Тогда согласно [19, с. 114] подгруппа $F(M)$ является примарной. Положим $\overline{M} = M/F(M)$. По лемме 1.1 имеем $F(M) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Положим $B_1 = M \cap B^g$.

Если M — непараболическая подгруппа в G, то согласно [19, с. 114; 25, теорема 1] имеем $\mathrm{Min}_{\overline{M}}(\overline{A}, \overline{B_1}) = \overline{1}$, и, следовательно, по лемме 1.4 имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Пусть M — параболическая подгруппа в G. Тогда порядок $|A|$ четен, иначе $C_3 \simeq O_{5'}(A) \geq B_1$, и получаем противоречие, как в предыдущем абзаце. Поскольку порядок $|A|$ четен, ввиду [19, с. 114] имеем $A \leq M \simeq 2^{\cdot}(A_5 \times A_5).2$, и в силу непримарности подгруппы A по теореме 1 из работы автора (Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4) имеем $\mathrm{Min}_{\overline{M}}(\overline{A}, \overline{B_1}) = \overline{1}$. Отсюда по лемме 1.4 имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Это противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.4. *Если* $L \simeq S_6(3)$, *то* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Доказательство. Пусть $L \simeq S_6(3)$. Тогда согласно [19, с. 110] имеем $|\mathrm{Soc}\,(G)| = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ и $\mathrm{Out}\,(L) \simeq C_2$. По лемме 1.3 подгруппа A имеет неабелеву силовскую подгруппу.

Предположим, что подгруппа $O_2(A)$ абелева. Тогда неабелевость подгруппы A и разложение порядка $|G|$ влекут, что 3 делит $|A|$. Рассуждая, как в лемме 2.1, получаем, что $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Таким образом, можно считать, что подгруппа $O_2(A)$ неабелева. Тогда $D := O_2(A) \cap \mathrm{Soc}\,(G) \neq 1$, и, следовательно, $A \leqslant C_G(a)$ для некоторой инволюции a из L, лежащей в A' и такой, что $O_2(C_G(a)) = F^*(C_G(a))$. Значит, по лемме 1.3 имеем $F(C_G(a)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G.

Пусть a — нецентральная инволюция в G и $\overline{C} = C_G(a)/F(C_G(a))$. Тогда ввиду [19, с. 113] имеем $\overline{C} \simeq \mathrm{Aut}\,(U_3(3))$, и для подгруппы $B_1 = C_G(a) \cap B^g$ согласно [25, теоремы 1 и 2] получаем, что $\mathrm{Min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B_1}) = \overline{1}$, и, следовательно, ввиду леммы 1.4 $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Пусть a — центральная инволюция в G и $\overline{C} = C/S(C_G(a)$, где $S(C_G(a))$ — разрешимый радикал подгруппы $C_G(a)$. Тогда ввиду [19, с. 113] имеем $S(C_G(a)) \simeq SL_2(3)$, и группа $\overline{C}$ изоморфна $U_4(2))$ или $\mathrm{Aut}\,(U_4(2))$. Как и в предыдущем абзаце, согласно [25, теоремы 1 и 2] имеем $\mathrm{Min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B_1}) = \overline{1}$, где $F(C_G(a)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G и $B_1 = C_G(a) \cap B^g$. По лемме 1.4 имеем $A \cap B_1^{gs} \leqslant S(C_G(a))$ для любого s из $S(C_G(a)) \simeq SL_2(3)$. Значит, $A \cap S(C_G(a))$ лежит в силовской подгруппе $T \simeq C_3$ из $S(C_G(a))$, и $S(C_G(a)) \cap B^g \leqslant T^{gs_1}$ для некоторого элемента s_1 из $S(C_G(a))$. Понятно, что в $S(C_G(a))$ найдется такой элемент s_2, что $T \cap T^{gs_1s_2} = 1$. Следовательно, $A \cap B^{gs_2} = A \cap B^{gs_2} \cap S(C_G(a)) = (A \cap S(C_G(a)) \cap (B^{gs_2} \cap S(C_G(a)) = (A \cap S(C_G(a)) \cap (B^g \cap S(C_G(a))^{s_2} \leqslant T \cap T^{gs_1s_2} = 1$.

Это противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.5. *Если $L \simeq U_n(2)$, где $n \leq 9$, то* $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $n \leq 6$, справедливость утверждения леммы следует из [25, теоремы 1 и 2]. Докажем лемму подробно только в случае $L \simeq U_9(2)$, при $n = 7, 8$ доказательство аналогично.

Итак, пусть $L \simeq U_9(2)$. Тогда согласно [19, с. 242] имеем

$$|L| = 2^{36} \cdot 3^{11} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 43 \ \text{ и } \ \mathrm{Out}\,(L) \simeq \Sigma_3.$$

Ввиду лемм 1.1, 1.3 и пп. (2а), (2б) теоремы B из [9] можно считать, что подгруппа A непримарна и неабелева. Неабелевость подгруппы A и разложение порядка $|G|$ влекут, что по крайней мере одна из подгрупп $O_2(A)$ или $O_3(A)$ неабелева.

Заметим, что достаточно доказать лемму для случая $G = LA$. Действительно, если для группы $G_1 = LA$ заключение леммы справедливо и $G_1 = LA < G$, то для подгруппы $B_1 = G_1 \cap B$ имеем $A \cap B_1^{g_1} = 1$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, и, следовательно, $A \cap B^{g_1} = (A \cap G_1) \cap B^{g_1} = A \cap (G_1 \cap B^{g_1}) = A \cap B^{g_1} = 1$. Пусть далее $G = LA$. Тогда фактор-группа $G/L \simeq LA/L \simeq A/A \cap L$ изоморфна подгруппе из Σ_3. Отсюда следует, что либо $G \simeq \mathrm{Inndiag}(L) \simeq PGU_9(2) \simeq L : C_3$, либо $|G : L| \leq 2$.

Допустим, что $O_2(A) \neq 1$. Предположим сначала, что $D := O_2(A) \cap L \neq 1$. Тогда $A \leqslant N_G(D)$, и согласно [24, предложение 3.14] $O_2(N_G(D)) = F^*(N_G(D))$. Значит, по лемме 1.1 имеем $F^*(N_G(D)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Рассуждая, как в лемме 2.1, получаем, что $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Пусть теперь $O_2(A) \cap L = 1$. Тогда $O_2(A)$ порождается некоторой инволюцией a из $G \setminus L$. Отсюда $G = L\langle a \rangle$ и $A = \langle a \rangle \times C_A(a)$. Ввиду [26, теоремы (19.8), (19.9)] централизатор $C_L(a)$ изоморфен $O_9(2)$. Поскольку $|O_2(A)| = 2$, подгруппа $O_3(A)$ неабелева. Согласно [19, с. 123–124] в группе $O_9(2)$ элемент простого порядка, большего 3, не может централизовать неабелеву 3-подгруппу. Поэтому $C_A(a) = O_3(A)$. Положим $C = C_G(a)$ и $\overline{C} = C/O_2(C)$. По теореме Бэра — Судзуки (см. [28–30]) $B^g \cap O_2(C) = 1$ для некоторого элемента g из G. Положим $B_1 = B^g \cap C$. Так как $\overline{A}$ является 3-группой, ввиду лемм 1.1 и 1.4 имеем $\mathrm{Min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B_1}) = \overline{1}$, и, следовательно, $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Таким образом, можно считать, что $O_2(A) = 1$. Поэтому $G = AL \leq \mathrm{Inndiag}(L)$ и подгруппа $O_3(A)$ неабелева. Поскольку подгруппа A непримарна, некоторое простое число $p \geq 5$ делит $|A|$. Пусть a — элемент порядка p из A, $C = C_G(a)$ и $\overline{C} = C/S(C)$. Тогда $A \leq C$, и, следовательно, подгруппа C неабелева. Согласно [24, теорема 4.8.2] имеем $C_{\mathrm{Inndiag}(L)}(a) = Z \times E$, где Z — абелева группа нечетного порядка и подгруппа E изоморфна $L_2(16)$ или $U_5(2)$ при $p = 5$, $PGU_3(2) \simeq 3^2 : SL_2(3)$ — при $p = 7$, $U_4(2)$ — при $p = 11$ и $PGU_2(2) \simeq \Sigma_3$ — при $p = 17$. Поскольку подгруппа $O_3(A)$ неабелева, случаи $(E, p) = (L_2(16), 5), (\Sigma_3, 17)$ не возникают.

Подгруппа $F(C)$ является абелевой группой нечетного порядка. По лемме 1.3 имеем $F(C) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Положим $B_1 = C \cap B^g$. Ввиду [25, теоремы 1 и 2] и леммы 1.4 имеем $\mathrm{Min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B_1} = \overline{1})$, и, следовательно, $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$.

Это противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.6. *Если* $L \simeq U_5(4)$, *то* $\mathrm{Min}_G(A,B)=1$.

Доказательство. Пусть $L \simeq U_5(4)$. Тогда согласно [19, с. 241] имеем $|L| = 2^{20}\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 13\cdot 17\cdot 41$. Кроме того, ввиду [24, теорема 2.5.12] $\mathrm{Out}\,(L) \simeq C_5 : C_4$ — группа Фробениуса. Ввиду лемм 1.1 и 1.3, а также [9, теорема B, пп. (2б1), (2б2)] можно считать, что подгруппа A непримарна и неабелева.

Предположим, что $O_2(A) \neq 1$.

Пусть $O_2(A)\cap L = 1$. Тогда в силу строения группы $\mathrm{Out}\,(L)$ подгруппа $O_2(A)$ циклическая и $O_5(A) < L$. Неабелевость подгруппы A и разложение порядка $|G|$ влекут, что подгруппа $O_5(A)$ неабелева. Согласно [26] централизатор $C_L(b)$ инволюции b из $O_2(A)$ изоморфен подгруппе из $S_4(4)$ в противоречие с тем, что силовская 5-подгруппа в $S_4(4)$ абелева. Поэтому $O_2(A)\cap L \neq 1$.

Положим $N = N_G(O_2(A)\cap L)$. Тогда $A \leq N$. По [14, следствие 3.1.4] имеем $F^*(N) = O_2(N)$. Следовательно, в 2-замкнутой подгруппе $R := O_2(N)A$ ее холлова подгруппа $O(A)$ действует точно на $O_2(N)$. Согласно [9, теорема B(2)] имеем $O_2(R)\cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Поэтому из нильпотентности группы B следует, что подгруппа $B_1 := R\cap B^g$ имеет нечетный порядок. Без ограничения общности можно считать, что $B_1 \leq O(A)$.

Если $O(A)\cap(O(A))^x \neq 1$ для любого элемента x из G, то по [27, теорема 2] $O(A)$ содержит подгруппу, изоморфную $C_p \wr C_p$, где p — простое число Мерсенна, что противоречит разложению порядка $|G|$. Поэтому $O(A)\cap O(A)^y = 1$ для некоторого элемента y из G, и, следовательно, $A\cap B^g = 1$ для некоторого g из G, т. е. $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.

Итак, можно считать, что $O_2(A) = 1$. Следовательно, $A = O(A)$ и $|A|$ делится на два различных нечетных простых числа, причем подгруппа $O_5(A)$ неабелева. Пусть M — максимальная подгруппа в G, содержащая A. Ввиду [31, табл. 8.20] либо силовская 5-подгруппа в M абелева, либо подгруппа $M\cap L$ изоморфна $5^3 : S_5$ или $5^2 : SL_2(5)$, причем $F^*(M\cap L) = O_5(M\cap L)$. Поэтому выполняется вторая возможность, и, следовательно, $A = O_3(A)\times O_5(A)$ и $|O_3(A)| = 3$. Поскольку группы S_5 и $SL_2(5)$ не содержат элементов порядка 15, имеем $O_5(A)\cap M\cap L = A\cap O_5(M\cap L)$. Так как подгруппа $O_5(A)$ неабелева, а подгруппа $O_5(M\cap L)$ абелева, имеем $LO_5(A) \simeq \mathrm{Inndiag}(L) \simeq L : C_5$, и, следовательно, $|O_5(A)| = 5|A\cap O_5(M\cap L)| \geq 5^3$. Отсюда $|A\cap O_5(M\cap L)| \geq 5^2$. Но тогда элемент x порядка 3 из A централизует подгруппу $A\cap O_5(M\cap L)$ порядка, не меньшего 5^2. Отсюда легко следует, что x централизует всю подгруппу $O_5(M\cap L)$; противоречие с п. (2) теоремы. □

Лемма 2.7. *Если* $L \simeq \Omega^+_{10}(2)$ *и* $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$, *то* A *и* B — *2-группы.*

Доказательство. Пусть $L \simeq \Omega^+_{10}(2)$ и $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$. Тогда согласно [19, с. 142] имеем $|\mathrm{Soc}\,(G)| = 2^{20}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17\cdot 31$ и $\mathrm{Out}\,(\Omega^+_{10}(2)) \simeq C_2$. Ввиду леммы 1.3 можно считать, что подгруппа A неабелева, а по [9, теорема B, пп. (2б1), (2б2)] A непримарна. Тогда в силу неабелевости A и разложения $|\mathrm{Soc}\,(G)|$ имеем $3^3 \,\big|\, |A|$. Из таблицы характеров в [19, с. 142] следует, что A — $\{3,5\}$-группа. Следовательно, по [19, с. 146] подгруппа $A \simeq A_5 \times U_4(2)$, и по [25] имеем, что $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$; противоречие.

Поэтому A имеет четный порядок. Из условия леммы и предыдущего абзаца следует, что и B имеет четный порядок.

Предположим, что $O_2(A)\cap L = 1$. Тогда $O_2(A)$ порождается некоторой инволюцией a. Ввиду [26] $C_G(a) \simeq C_2\times S_8(2)$. По теореме Бэра—Судзуки (см. [28–30]) имеем $\langle a\rangle\cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, а по доказательству леммы 2.8 из [25] имеем $\mathrm{Min}_{S_8(2)}(E,F) = 1$ для любых нильпотентных подгрупп E и F из $S_8(2)$. Из леммы 1.4 следует, что $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$; противоречие.

Итак, $O_2(A)\cap L \neq 1$. Положим $N = N_G(O_2(A)\cap L)$. Тогда $A \leq N$, и согласно [24, предложение 3.14] $F^*(N) = O_2(N)$.

Докажем, что $O(A) = 1$. Предположим, что $O(A) \neq 1$. Тогда в 2-замкнутой подгруппе $R := O_2(N)A$ подгруппа $O(A)$ действует точно на $O_2(N)$.

Если $O_2(R) \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G, то $B \geq \min_G(S,S)$, где S — силовская 2-подгруппа в G. Но по теореме 1 из [20] $\min_G(S,S) = O_2(P)$, где P — некоторая параболическая подгруппа в L, что противоречит 2-скованности подгруппы P.

Следовательно, $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Значит, подгруппа $B_1 = O_2(R) \cap B^g$ имеет нечетный порядок. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $B_1 \leq O(A)$.

Пусть $O(A) \cap (O(A))^x \neq 1$ для любого элемента x из R. Тогда по теореме 2 из [27] $O(A)$ содержит подгруппу, изоморфную $C_q \wr C_q$, где q — простое число Мерсенна. Из разложения порядка $|G|$ следует, что $q = 3$. Поэтому подгруппа N содержится в максимальной подгруппе M группы G с неабелевой силовской 3-подгруппой в M порядка не менее 3^4. Из списка максимальных подгрупп в G выше в лемме уже рассмотрен случай прямого произведения простых неабелевых групп, и в $M/O_2(M)$ отмечено выполнение условия леммы 1.4. Так как $O_2(M) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, то по лемме 1.4 имеем $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$; противоречие с условием леммы.

Таким образом, $O(A) \cap (O(A))^x = 1$ для некоторого элемента x из R. Отсюда $A \cap {B_1}^x \leq O(A) \cap (O(A))^x = 1$. Но $A \cap {B_1}^x = A \cap R \cap B^{gx} = A \cap B^{gx}$; противоречие.

Итак, $O(A) = 1$. Аналогично, $O(B) = 1$. Поэтому A и B — 2-группы. Следовательно, из [20, теоремы 1 и 2] группа G является группой из п. (2) теоремы. □

Лемма 2.8. *Если $L \simeq \Omega^-_{10}(2)$, то $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L \simeq \Omega^-_{10}(2)$. Предположим, что $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 2.7, получаем, что A и B — 2-группы. Следовательно, согласно [9, теорема B, пп. (2б1), (2б2)] имеем $A \cap B^h = 1$ для некоторого элемента h из G. Значит, по определению $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.

Это противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.9. *Если $L \simeq E_8(2)$, то $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L := \mathrm{Soc}\,(G) \simeq E_8(2)$. Тогда согласно [19, с. 235] имеем $|L| = 2^{120} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 31^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 73 \cdot 127 \cdot 151 \cdot 241 \cdot 331$, $\mathrm{Out}\,(E_8(2)) = 1$ и силовские p-подгруппы группы L при $p \geq 7$ абелевы.

Предположим, что $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$. По лемме 1.3 группа A имеет неабелеву силовскую подгруппу, а по лемме 1.1 подгруппа A непримарна. Следовательно, в $Z(A) \cap A'$ найдется элемент a простого порядка p, где $p \leq 5$.

Допустим, что подгруппа $O(A)$ абелева. Тогда $p = 2$ и согласно [24, следствие 3.1.4] при $N := C_G(a)$ имеем $F^*(N) = O_2(N)$. Поэтому в 2-замкнутой подгруппе $R = O_2(N)A$ подгруппа $O(A)$ действует точно на $O_2(N)$. По лемме 1.1 имеем $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Значит, подгруппа $B_1 := R \cap B^g$ имеет нечетный порядок. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $B_1 \leq O(A)$. Так как $O(A)$ — абелева подгруппа, то по лемме 1.2 имеем $O(A) \cap (O(A))^x = 1$ для некоторого элемента x из R, поэтому $A \cap {B_1}^x \leq O(A) \cap (O(A))^x = 1$. Но $A \cap {B_1}^x = A \cap R \cap B^{gx} = A \cap B^{gx}$. Значит, $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$; противоречие.

Таким образом, некоторая силовская p-подгруппа из $O(A)$ неабелева для $p \in \{3,5\}$. Положим $C := C_G(a)$ и $\overline{C} = C/S(C)$.

Предположим, что $p = 3$. Согласно [24, табл. 4.7.3A] слой $E(C)$ подгруппы C изоморфен $3 \cdot {}^2E_6(2) * SU_3(2)$ или $SU_9(2)$, а группа $\overline{C}$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}\,({}^2E_6(2))$ или $\mathrm{Aut}\,(U_9(2))$ соответственно. Отсюда согласно [25, лемма 2.9] и лемме 2.5 соответственно имеем $\mathrm{Min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B_1} = \overline{1})$, где $F(C_G(a)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G и $B_1 := C \cap B^g$. По лемме 1.4 имеем $A \cap B_1^{gs} \leqslant S(C)$ для любого элемента s из C. Если $E(C) \simeq SU_9(2)$, то $S(C) = F(C)$, следовательно, ввиду леммы 1.4 получаем $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$; противоречие. Поэтому $E(C) \simeq 3 \cdot {}^2E_6(2) * SU_3(2)$. В силу нильпотентности подгруппы A и структуры подгруппы C из [24, табл. 4.7.3A] можно считать, что подгруппа $A_1 := A \cap S(C)$ в факторгруппе $S(C)/F(C)$

накрывает подгруппу, изоморфную C_6 или Q_8, а подгруппа $B_2 := B_1 \cap S(C)$ содержит подгруппу, изоморфную C_6 или Q_8 соответственно. По лемме 1.3 имеем $A_1 \cap B_2^f = 1$ для некоторого элемента f из $F(C)$. Следовательно, $A \cap B^{gf} = A \cap B^{gf} \cap C = (A \cap S(C) \cap (B_1^f \cap S(C) = (A_1 \cap (B_1 \cap F(C)^f \leqslant A_1 \cap B_2^f = 1$. Поэтому $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$, что противоречит предположению.

Предположим, что $p = 5$. Согласно [24, табл. 4.7.3B] слой $E(C)$ подгруппы C изоморфен $SU_5(4)$, $S(C) = F(C) \simeq C_5$ и $\overline{C} \leq \mathrm{Aut}\,(U_5(4))$. Отсюда по теореме Бэра — Судзуки (см. [28–30]) $F(C) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. По лемме 2.6 для $B_1 := C \cap B^g$ имеем $\mathrm{Min}_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B_1}) = \overline{1}$. Следвательно, $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$ ввиду леммы 1.4, что противоречит п. (2) теоремы. □

Лемма 2.10. *Пусть G — конечная группа с цоколем L, изоморфным $L_n(2)$ для $n \in \{5, 6, 7\}$, A и B — нильпотентные подгруппы из G, S — силовская 2-подгруппа в G и $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$. Тогда A и B — 2-группы, и с точностью до сопряжения*

$$(A, B) \in \{(\min_G(S, S), \min_G(S, S)), (S, \min_G(S, S)), (\min_G(S, S), S), (S, S)\}.$$

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. Тогда $|\mathrm{Out}\,(L)| = 2$ (см. [19]).

Если $n = 5$, то согласно [19, с. 70] имеем $|L| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 57 \cdot 31$, и силовские p-подгруппы группы G при $p \geq 3$ абелевы.

Если $n = 6$, то согласно [19, с. 240] имеем $|L| = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$, и силовские p-подгруппы группы G при $p \geq 5$ абелевы.

Если $n = 7$, то согласно [19, с. 240] имеем $|L| = 2^{21} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31 \cdot 127$, и силовские p-подгруппы группы G при $p \geq 5$ абелевы.

По лемме 1.3 подгруппа A имеет неабелеву силовскую подгруппу.

Если подгруппа A примарна нечетного порядка, то по лемме 1.1 имеем $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$; противоречие.

Пусть подгруппа A является 2-группой. Тогда подгруппа B также является 2-группой. Действительно, по теореме 1 из [23] имеем $1 \neq \mathrm{Min}_G(A, B) \geqslant \min_G(S, S) \geqslant O_2(P)$ для некоторой параболической подгруппы P из L. Значит, $O_2(P) \leq O_2(B^h)$ для некоторого элемента h, что невозможно в силу 2-скованности группы P. Поэтому A и B — 2-подгруппы, и утверждение леммы следует из леммы 1.5; при этом G из п. (2) теоремы.

Итак, в дальнейшем считаем, что A и B не являются примарными группами.

Предположим, что $O(A)$ — абелева подгруппа (при $n = 5$ это так). Тогда по лемме 1.2 имеем $O(A) \neq A$. Следовательно, порядок $|A|$ четен и подгруппа $O_2(A)$ неабелева, поскольку подгруппа A неабелева.

Так как $|\mathrm{Out}\,(L)| = 2$, то $D := O_2(A) \cap L \neq 1$, и согласно [24, предложение 3.1.4] при $N := N_G(D)$ имеем $F^*(N) = O_2(N)$. Поэтому в 2-замкнутой подгруппе $R := O_2(N)A$ подгруппа $O(A) \neq 1$ действует точно на $O_2(N)$.

Пусть $O_2(R) \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Тогда $O_2(R) \cap O_2(B^g) \neq 1$, и, следовательно, по теореме 1 из [22] имеем $O_2(R) \gneq \min_G(S, S)$ и $O_2(B^h) \gneq \min_G(S, S)$ для некоторого элемента h из G. Но согласно [22, лемма 4.2; 23, теорема 1] $\min_G(S, S) \geqslant O_2(P)$ для некоторой параболической подгруппы P из $\mathrm{Soc}\,(G)$, поэтому $[O_2(P), O(B^h)] \neq 1$, а с другой стороны $[O_2(P), O(B^h)] \leqslant [O_2(B^h), O(B^h)] = 1$ в силу нильпотентности B. Получили противоречие.

Значит, $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, и поэтому подгруппа $B_1 := R \cap B^g$ имеет нечетный порядок. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $B_1 \leq O(A)$. Так как $O(A)$ — абелева подгруппа, то по лемме 1.2 $O(A) \cap (O(A))^x = 1$ для некоторого элемента x из R, поэтому $A \cap {B_1}^x \leq O(A) \cap (O(A))^x = 1$. Но $A \cap {B_1}^x = A \cap R \cap B^{gx} = A \cap B^{gx}$. Значит, $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$; противоречие.

Таким образом, $O_3(A)$ — неабелева подгруппа и $n \in \{6, 7\}$. Ввиду [19, с. 115] имеем $L_7(2) > L_6(2) > S_6(2) > U_4(2) \simeq S_4(3)$, причем $|L_7(2)|_3 = |S_4(3)|_3 = 3^4$. Подгруппа $O_3(A)$ содержится в некоторой силовской 3-подгруппе R из L. Поскольку $|R : O_3(A)| \leq 3$, подгруппа $O_3(A)$

нормальна в R. Отсюда следует, что $Z(R) \cap O_3(A)' \neq 1$. Поскольку подгруппа R изоморфна унипотентной подгруппе из $S_4(3)$, имеем $|Z(R)| = 3$. Положим $Z(R) = \langle a \rangle$ и $K = N_G(\langle a \rangle)$. Тогда $A \leq C_K(a)$.

Если $n = 7$, то ввиду [32] подгруппа K содержится в максимальной подгруппе из G, изоморфной $2^6 : L_6(2)$ или $\mathrm{Aut}\,(L_6(2))$.

Поэтому далее можно считать, что $n = 6$. Тогда ввиду [33] имеем $C_{K\cap L}(a) \simeq GL_3(4)$ и $|K \cap L : C_{K\cap L}(a)| = 2$. Поскольку подгруппа $O_3(A)$ изоморфна подгруппе из $GL_3(4)$, ввиду [19, с. 23] имеем $C_{K\cap L}(O_3(A)) \leq O_3(A)$. Если $G = L$, то $A = O_3(A)$, что не так. Поэтому $G > L$ и $A = O_3(A) \times \langle t \rangle$, где t — некоторая инволюция из $K \setminus L$. Ввиду [26, утверждения (9.7), (9.8)] группа $C_L(t)$ изоморфна $S_6(2)$ или $2^5 : S_6$. Поэтому $C_G(E(K)) = \langle a \rangle$, и, следовательно, ввиду [19, с. 23] имеем $K/\langle a \rangle \simeq \mathrm{Aut}\,(L_3(4))$. По лемме 1.3 имеем $C_G(E(K)) \cap B^g = \langle a \rangle \cap B^g = 1$ для некоторого элемента $g \in G$. Положим $B_0 = K \cap B^g$ и $\overline{K} = K/\langle a \rangle$. Поскольку $\overline{K} \simeq \mathrm{Aut}\,(L_3(4))$ и $\overline{A}$ не является 2-группой, по лемме 1.5 имеем $\min_{\overline{K}}(\overline{A}, \overline{B}_0) = \overline{1}$. Отсюда по лемме 1.4 заключаем, что $\min_G(A, B) = 1$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Завершение доказательства теоремы. Отметим, что исследуемый список $\mathcal{L}$ (см. с. 55) состоит из более чем 70 групп. Из них 26 спорадических, как отмечено выше, были изучены автором полностью. 28 групп из $\mathcal{L}$ были исследованы автором в [25], по 3 группы из $\mathcal{L}$ — в работах [21; 23], и одна группа рассмотрена в [22]. Таким образом, в количественном плане большая часть групп из списка $\mathcal{L}$ к моменту появления данного исследования была изучена. Те из них, которые удовлетворяют условию теоремы, записаны в ее заключении.

При изучении оставшихся групп из списка $\mathcal{L}$, представленных в леммах 2.1–2.10, мы столкнулись с определенными техническими трудностями, связанными в частности с тем, что группа из этого списка может содержать подгруппу, не лежащую в $\mathcal{L}$. Например, группы $U_7(2), U_8(2)$ и $U_9(2)$ не лежат в списке $\mathcal{L}$, но появляются как подгруппы группы $E_8(2)$ из $\mathcal{L}$. То же самое относится и к группе $U_5(4)$.

Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что каждая группа G с $\mathrm{Soc}\,(G)$ из списка $\mathcal{L}$, удовлетворяющая условию $\mathrm{Min}_G(A, B) \neq 1$ для некоторых нильпотентных подгрупп A и B из G, обязательно попадает в список групп из заключения теоремы, т. е. будет удовлетворять хотя бы одному из условий, записанных в пп. а)–ж) теоремы. Ниже приводится разбиение доказательства заключения теоремы на подпункты согласно работам, в которых они появились.

В случае (4а) для $L \simeq L_n(2),\ n \leq 7$, по п. (A) (см. с. 57) имеем $n \neq 4$, а случай $n = 3$ рассмотрен в недавней работе автора [16]. Случаи $n = 5, 6, 7$ рассмотрены в лемме 2.10. Поэтому (3) $\Leftrightarrow$ (4) по лемме 1.5 .

В случае (4б) для $L \simeq L_3(4),\ L_3(q),\ U_3(q)$ имеем (3) $\Leftrightarrow$ (4) по лемме 1.5 и теореме из [16].

В случае (4в) для $L \simeq L_2(q)$ имеем (3) $\Leftrightarrow$ (4) по лемме 1.6.

В случае (4г) для $L \simeq \Omega_{2n}^{+}(2),\ n \leq 5$, имеем (3) $\Leftrightarrow$ (4) по теоремам 1 и 2 из [20] и лемме 1.4.

В случае (4д) для $L \simeq E_6(2)$ имеем (3) $\Leftrightarrow$ (4) по теоремам 1, 2 и 5 из [21].

В случае (4е) для $L \simeq F_4(2)$ имеем (3) $\Leftrightarrow$ (4) по теоремам 1 и 2 из [22] и теореме из [25].

В случае (4ж) для $L \simeq \Omega_8^{+}(3)$ имеем (3) $\Leftrightarrow$ (4) по теоремам 1 и 2 из [23] и теореме из [21].

Теорема доказана.

Заключение

Хорошо известно, что в конечной группе G подгруппа $O_p(G) = \bigcap_{g\in G} P^g$, где $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p простое. И, по-видимому, Бёрнсайд был первым, кто заметил, что в бипримарной группе $O_p(G) = P \cap P^g$ для некоторого $g \in G$ почти всегда, за исключением некоторых случаев (см. [5; 6]). Наша задача в случае почти простой группы выглядит аналогично — нужно доказать, что $O_p(G) = P \cap P^g$ для некоторого $g \in G$, и дать описание всех возможных нарушений этого равенства. На самом деле мы рассматриваем более общую задачу, когда подгруппы P и P^g

могут быть не силовскими, а произвольными нильпотентными. В этом случае для решения задачи по индукции нужна база индукции, которую и составляют в основном группы из “Атласа конечных групп” [19, с. V] и группы небольшого лиева ранга, такие как $L_2(q), U_3(q), L_3(q)$, а также $L_4(q), U_4(q), Sp_4(q)$. Последние и являются предметом ближайшего изучения, после которого уже можно будет переходить к рассмотрению общего случая, т. е. для любой конечной почти простой группы G и ее нильпотентных подгрупп A и B доказать, что либо $A \cap B^g = 1$ для некоторого $g \in G$, либо A и B — p-группы для некоторого простого p, и вопрос сводится к уже изученному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs I.M.** Finite group theory. Providence, RI: AMS, 2008. 350 p.
2. **Brodkey J.S.** A note on finite groups with on abelian Sylow groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14. P. 132–133. doi: 10.1090/S0002-9939-1963-0142631-X
3. **Laffey T.J.** Disjoint conjugates of cyclic subgroups of finite groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1976-77. Vol. 20. P. 229–232. doi: 10.1017/S0013091500026328
4. **Dempwolff U., Wong S.K.** On cyclic subgroups of finite groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1982. Vol. 25, no. 1. P. 19–20. doi: 10.1017/S0013091500004065
5. **Burnside W.** On groups of order $p^a q^\beta$ // Proc. London Math. Soc. 1904. Vol. 2, no. 1. P. 388–392.
6. **Burnside W.** On groups of order $p^a q^\beta$ (Second paper) // Proc. London Math. Soc. 1905. Vol. 2, no. 2. P. 432–437.
7. **Ito N.** Über den kleinsten p-Durchschnitt auflösbarer Gruppen // Arch. Math. 1958. Vol. 9, no. 1-2. P. 27–32.
8. **Мазуров В.Д., Зенков В.И.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
9. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 1. С. 1–92.
10. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Старостин А.И.** Конечные группы с нормальными пересечениями силовских 2-подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Vol. 15, № 6. P. 655–659.
11. **Herzog M.** On 2-Sylow intersections // Isr. J. Math. 1972. Vol. 11, no. 3. P. 325–327.
12. **Bialostocki N.** On products of two nilpotent subgroups of a finite groups // Isr. J Math. 1975. Vol. 20, no. 2. P. 178–188.
13. Коуровская тетрадь. Нерешенные задачи теории групп. Изд. 17-е. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН. 2010. 201 с.
14. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
15. **Курмазов Р.К.** О пересечении сопряженных нильпотентных подгрупп в группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1913. Т. 54, № 1. С. 98–104.
16. **Зенков В.И.** О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_3(q)$ или $U_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 70–78. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-70-78
17. **Зенков В.И.** О пересечении абелевой и нильпотентной подгрупп в конечной группе. II // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 3. С. 383–394. doi: 10.4213/mzm11742
18. **Зенков В.И.** О пересечениях двух нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(q)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1280–1290. doi 10.17377/smzh.2016.57.607
19. Atlas of finite group / Conway J. H. [et. al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
20. **Зенков В.И.** О пересечениях пар примарных подгрупп в конечной группе с цоколем $\Omega_{2n}^+(2^m)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 728–732. doi: 10.17377/semi.2018.15.058
21. **Зенков В.И.** О пересечении двух нильпотентных подгрупп в конечной группе с цоколем $\Omega_8^+(2), E_6(2), E_7(2)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1424–1433. doi: 10.17377/semi.2017.14.121
22. **Zenkov V.I., Nuzhin Y.N.** Intersection of primary subgroups in the group Aut $(F_4(2))$ // J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. 2018. Vol. 11, no. 2. P. 605–617. doi: 10.17516/1997-1397-2018-11-2-171-177
23. **Зенков В.И.** О пересечениях примарных подгрупп в неразрешимых конечных группах с цоколем, изоморфным $L_n(2^m)$ // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 337–344. doi: 10.17377/smzh.2018.59.208
24. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: AMS, 1998. 420 p.

25. **Зенков В.И.** О пересечении двух нильпотентных подгрупп в небольших конечных группах // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1099–1115. doi: 10.17377/semi.2016.13.087
26. **Aschbacher M., Seitz G.** Involutions in Chevalley groups over fields of even order // Nagoya Math. J. 1976. Vol. 63. P. 1–91. doi: 10.1017/S0027763000017438
27. **Yong Yang.** Regular orbits of nilpotent subgroups of solvable linear groups // J. Algebra. 2011. Vol. 325, no. 1. P. 56–69. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.09.024
28. **Baer R.** Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen // Math. Ann. 1957. Vol. 133. P. 256–270.
29. **Suzuki M.** Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed // Ann. Math. 1968. Vol. 82, no. 2. P. 191–212.
30. **Alperin J., Lyons R.** On conjugacy classes of p-elements // J. Algebra. 1971. Vol. 19, no. 2. P. 536–537.
31. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576
32. **Кондратьев А.С.** Неприводимые подгруппы группы $GL(7,2)$ // Мат. заметки. 1985. Т. 3, № 3. С. 317–321.
33. **Harada K., Yamaki H.** The irreducible subgroups of $GL(n,2)$ with $n \leq 6$ // Roy. Soc. Can. Math. Repts, 1979. Vol. 1, no. 2. P. 75–78.

Поступила 22.04.2022
После доработки 21.04.2023
Принята к публикации 15.05.2023

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: v1i9z52@mail.ru

REFERENCES

1. Isaacs I.M. Finite group theory. Providence, RI: AMS, 2008. 350 p.
2. Brodkey J.S. A note on finite groups with on abelian Sylow groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1963, vol. 14, pp. 132–133. doi: 10.1090/S0002-9939-1963-0142631-X
3. Laffey T.J. Disjoint conjugates of cyclic subgroups of finite groups. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1976-77, vol. 20, pp. 229–232. doi: 10.1017/S0013091500026328
4. Dempwolff U., Wong S.K. On cyclic subgroups of finite groups. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1982, vol. 25, no. 1, pp. 19–20. doi: 10.1017/S0013091500004065
5. Burnside W. On groups of order $p^a q^\beta$. *Proc. London Math. Soc.*, 1904, vol. 2, no. 1, pp. 388–392.
6. Burnside W. On groups of order $p^a q^\beta$ (Second paper). *Proc. London Math. Soc.*, 1905, vol. 2, no. 2, pp. 432–437.
7. Ito N. Über den kleinsten p-Durchschnitt auflösbarer Gruppen. *Arch. Math. 1958*, vol. 9, no. 1-2, pp. 27–32.
8. Zenkov V.I., Mazurov V.D. The intersection of Sylow subgroups in finite groups. *Algebra and Logic*, 1996, vol. 35, no. 4, pp. 236–240. doi: 10.1007/BF02367025
9. Zenkov V.I. Intersections of nilpotent subgroups in finite groups. *Fund. i Prikl. Matematika*, 1996, vol. 2, no. 1, pp. 1–92 (in Russian).
10. Kabanov V.V., Makhnev A.A., Starostin A.I. Finite groups with normal intersections of Sylow 2-subgroups *Algebra i Logika*, 1976, vol. 15, no. 6, pp. 655–659 (Russian).
11. Herzog M. On 2-Sylow intersections. *Isr. J. Math.*, 1972, Vol. 11, no. 3, pp. 325–327.
12. Bialostocki N. On products of two nilpotent subgroups of a finite groups. *Isr. J Math.*, 1975, vol. 20, no. 2, pp. 178–188.
13. *Kourovskaya tetrad'. Nereshennye zadachi teorii grupp* [The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory], 17th ed., eds. V. D. Mazurov and E. I. Khukhro, Inst. Math. SO RAN, Novosibirsk, 2010, 136 p. ISBN: 9785943568916.
14. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification*, NY, Springer, 1982, 333 p. doi: 10.1007/978-1-4684-8497-7 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow, Mir Publ., 1985, 352 p.

15. Kurmazov R.K. On the intersection of conjugate nilpotent subgroups in permutation groups. *Siberian Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 73–77. doi: 10.1134/S0037446613010102
16. Zenkov V.I. On intersections of nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_3(q)$ or $U_3(q)$. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 70–78 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-70-78
17. Zenkov V.I. On intersections of abelian and nilpotent subgroups in finite groups II. *Math. Notes*, 2019, vol. 105, no. 3, pp. 366–375. doi: 10.1134/S0001434619030076
18. Zenkov V.I. Intersections of two nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_2(q)$. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 1002–1010. doi: 10.1134/S0037446616060070
19. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. *Atlas of finite groups*, Oxford, Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 978-0-19-853199-9 .
20. Zenkov V.I. On intersections of primary subgroups pairs in finite group with socle $\Omega_{2n}^{+}(2^m)$. *Sib. Elektron. Math. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 728–732 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.058
21. Zenkov V.I. On intersection of two nilpotent subgroups in finite group with socle $\Omega_8^+(2), E_6(2)$ or $E_7(2)$. *Sib. Elektron. Math. Izv.*, 2017, vol. 14, pp. 1424–1433 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2017.14.121
22. Zenkov V.I., Nuzhin Y.N. On the intersection of primary subgroups in the group $\mathrm{Aut}\,(F_4(2))$. *J. Sib. Federal Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 171–177. doi: 10.17516/1997-1397-2018-11-2-171-177
23. Zenkov V.I. Intersections of primary subgroups in nonsoluble finite groups isomorphic to $L_n(2^m)$. *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 264–269. doi: 10.1134/S0037446618020088
24. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups, Number* 3. Providence, AMS, 1998, 420 p. ISBN: 0-8218-0391-3 .
25. Zenkov V.I. On intersection of two nilpotent subgroups in small finite groups. *Sib. Elektron. Math. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 1099–1115 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.087
26. Aschbacher M., Seitz G. Involutions in Chevalley groups over fields of even order. *Nagoya Math. J.*, 1976, vol. 63, pp. 1–91. doi: 10.1017/S0027763000017438
27. Yong Yang. Regular orbits of nilpotent subgroups of solvable linear groups. *J. Algebra*, 2011, vol. 325, no. 1, pp. 56–69. doi: 10.1016/j.jalgebra.2010.09.024
28. Baer R. Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen. *Math. Ann.*, 1957, vol. 133, pp. 256–270.
29. Suzuki M. Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed. *Ann. Math.*, 1968, vol. 82, no. 2, pp. 191–212.
30. Alperin J., Lyons R. On conjugacy classes of p-elements. *J. Algebra*, 1971, vol. 19, no. 2, pp. 536–537.
31. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013. 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576
32. Kondrat'ev A.S. Irreducible subgroups of the group $GL(7,2)$. *Math. Notes*, 1985, vol. 37, no 3, pp. 178–181. doi: 10.1007/BF01158735
33. Harada K., Yamaki H. Irreducible subgroups of $GL(n,2)$ with $n \leq 6$. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 1979, vol. 1, no. 2, pp. 75–78.

Received April 22, 2022
Revised April 21, 2023
Accepted May 15, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00456).

Victor Ivanovich Zenkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, 620000 Russia, e-mail: v1i9z52@mail.ru .

Cite this article as: V. I. Zenkov. On intersections of nilpotent subgroups in finite groups with simple socle from the “Atlas of Finite Groups”. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 54–66 .