ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И ВОЗМУЩЕНИЕМ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Рассматривается задача оптимального управления на фиксированном промежутке времени линейной системой с постоянными коэффициентами с малым параметром в начальных условиях и терминальным критерием качества в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Обоснованы предельные соотношения для оптимального значения функционала качества и вектора, определяющего оптимальное управление, при стремлении малого параметра к нулю. Показано, что асимптотика решения может иметь сложный характер. В частности, может не раскладываться в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра и логарифмов от него.

Ключевые слова: оптимальное управление, терминальный выпуклый критерий качества, асимптотическое разложение, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to an optimal control problem with a terminal convex performance index and a perturbation of the initial data.

In this paper, we investigate a problem of optimal control over a finite time interval for a linear system with constant coefficients and a small parameter in the initial data in the class of piecewise continuous controls with smooth geometric constraints. We consider a terminal convex performance index. We substantiate the limit relations as the small parameter tends to zero for the optimal value of the performance index and for the vector determining the optimal control in the problem. We show that the asymptotics of the solution can be of complicated nature. In particular, it may have no expansion in the Poincare sense in any asymptotic sequence of rational functions of the small parameter or its logarithms.

Keywords: optimal control, terminal convex performance index, asymptotic expansion, small parameter.

MSC: 49N05, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-41-53

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию задачи оптимального управления [1–3] на фиксированном промежутке времени линейной системой с постоянными коэффициентами в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями [4–6] и выпуклым терминальным критерием качества [7]. Начальные данные имеют малое возмущение.

Отметим, что не исключается случай, когда в предельной задаче оптимальное управление имеет разрывы, в то время как в исходной задаче оптимальное управление непрерывно во всех точках. В задачах быстродействия при таких условиях решение разлагается в асимптотический ряд, члены которого сложным образом зависят от малого параметра (см., например, [4]). Аналогичная ситуация возникала и в задачах управления для линейных систем с быстрыми и медленными переменными, ограничивающим множеством в виде шара в евклидовом пространстве и терминальным показателем качества, зависящим только от медленных переменных. При этом, если оптимальное управление в предельной задаче непрерывно, то асимптотика решения получалась регулярной в виде ряда Пуанкаре (см., например, [8]). Если же оптимальное управление в предельной задаче разрывно [9] или оптимальное управление в исходной задаче имеет особенность во внутреннем разложении [10], в то время как оптимальное управление в предельной задаче непрерывно, то асимптотика решения имела сложный характер.

Отметим также работы [11; 12], посвященные нахождению асимптотических разложений решений задач с быстрыми и медленными переменными, с ограничением на управление и интегральным выпуклым критерием качества. Другие постановки задач оптимального управления с малыми параметрами рассматривались в [13–15].

Оказывается, и в задаче, рассматриваемой в настоящей работе, возможно появление сложной асимптотики вектора, определяющего оптимальное управление. В разд. 1 даются общая постановка задачи, основные определения, предположения и устанавливаются предельные соотношения для оптимального значения функционала качества и определяющего вектора при стремлении малого параметра к нулю. В разд. 2 исследована конкретная задача управления, полная асимптотика решения которой имеет вид ряда Эрдейи по степенной асимптотической последовательности. При этом члены полученного асимптотического разложения представляют собой известные рациональные функции от малого параметра ε, решения $W(\varepsilon)$ некоторого скалярного трансцендентного уравнения и $\ln\dfrac{1}{W(\varepsilon)}$ и не раскладываются в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра и логарифмов от него.

1. Постановка задачи и определяющие соотношения

Рассмотрим следующую задачу оптимального терминального управления в классе кусочно- непрерывных управлений с малым возмущением начальных условий:

$$\begin{aligned}
&\dot z_\varepsilon = Az_\varepsilon + Bu_\varepsilon, \quad t\in[0,T], \quad z_\varepsilon\in\mathbb{R}^n, \quad u_\varepsilon\in\mathbb{R}^m, \quad \|u_\varepsilon\|\leqslant 1,\\
&z_\varepsilon(0) = z^0+\varepsilon f, \quad z^0\neq 0, \quad f\neq 0, \quad 0\leqslant\varepsilon\ll 1,\\
&J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varphi(z_\varepsilon(T;u_\varepsilon))\to\min,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

где A, B — постоянные матрицы соответствующей размерности, z^0 и f — известные векторы, φ — строго выпуклая и бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция, $z_\varepsilon(\cdot;u)$ — решение системы (1.1) при заданном управлении $u(\cdot)$.

Через $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидовы нормы в соответствующих конечномерных векторных пространствах, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярные произведения, знак “ $*$ ” будем использовать, как и в [1, с. 132], в качестве символа транспонирования матриц.

Предположение 1. *Система из* (1.1) *вполне управляема, что эквивалентно вследствие критерия Калмана* (*см. теорему* 5 *в* [3]) *условию* $\operatorname{rank}(B, AB,\dots,A^{n-1}B)=n$.

Выпишем также задачу, полученную из (1.1) при $\varepsilon=0$:

$$\dot z_0 = Az_0+Bu_0, \quad t\in[0,T], \quad \|u_0\|\leqslant 1, \quad z_0(0)=z^0, \quad J_0(u_0):=\varphi(z_0(T;u_0))\to\min \tag{1.2}$$

с теми же A, B, T, φ и z^0, что и в задаче (1.1).

Рассматриваемая задача (1.1) при выполнении предположения 1 разрешима (см. следствие после теоремы 12 из подразд. 3.5 [3]). Согласно принципу максимума Понтрягина (см., например, теорему из п. 6.1.3 [7] и теорему 14 из подразд. 3.5 [3]), оптимальное управление $u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}$ в задаче (1.1) определяется из соотношения

$$\langle B^*\eta_\varepsilon(t), u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(t)\rangle = \max_{\|u\|\leqslant 1}\langle B^*\eta_\varepsilon(t), u\rangle = \big\|B^*\eta_\varepsilon(t)\big\|, \tag{1.3}$$

где $(z_\varepsilon(\cdot;u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}),\eta_\varepsilon(t))$ — решение системы уравнений

$$\dot z_\varepsilon = Az_\varepsilon + Bu_\varepsilon^{\mathrm{opt}}, \quad \dot\eta_\varepsilon = -A^*\eta_\varepsilon, \tag{1.4}$$

с граничными условиями

$$z_\varepsilon(0) = z^0 + \varepsilon f, \quad \eta_\varepsilon(T) = -\nabla\varphi(z_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})). \tag{1.5}$$

Отметим, что в теореме 14 из подразд. 3.5 [3] в части необходимого условия оптимальности не исключен случай $f^0(t,x) \equiv 0$ и $h^0(t,u) \equiv 0$.

Обозначим $l_\varepsilon := \eta_\varepsilon(T)$, тогда решением задачи (1.4), (1.5) является функция

$$\eta_\varepsilon(t) = e^{(T-t)A^*} l_\varepsilon, \tag{1.6}$$

и в силу граничного условия (1.5) справедливо равенство

$$l_\varepsilon = -\nabla\varphi(z_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})). \tag{1.7}$$

Пусть

$$l_\varepsilon \neq 0, \tag{1.8}$$

тогда $B^* e^{(T-t)A^*} l_\varepsilon$ имеет на отрезке $[0; T]$ лишь конечное число нулей, и оптимальное управление из (1.3) с учетом (1.6) выражается через l_ε следующим образом:

$$u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}(t) = \frac{C^*(T-t) l_\varepsilon}{\|C^*(T-t) l_\varepsilon\|}, \quad C^*(\tau) := B^* e^{\tau A^*}. \tag{1.9}$$

Отметим, что условие (1.8) в силу (1.7) эквивалентно тому, что $\nabla\varphi(z_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})) \neq 0$, т. е. $z_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$ не совпадает с точкой глобального минимума функции φ на $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, в задаче (1.1) ограничения на управление по существу. Кроме того, при выполнении условия (1.8) в силу равенства (1.7) вектор l_ε и оптимальное управление $u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}$ единственны; при этом вектор l_ε определяет единственную оптимальную управляющую функцию по формуле (1.9).

О п р е д е л е н и е 1. Ненулевой вектор l_ε — решение уравнения (1.7) — назовем *определяющим вектором в задаче* (1.1).

Пусть Ξ_ε — множество достижимости системы (1.1) при $\varepsilon \geqslant 0$ из $z^0 + \varepsilon f$ к моменту времени T. Поскольку Ξ_ε — выпуклый компакт (см., например, теорему 1 из подразд. 2.2 [3]), а φ непрерывна и строго выпукла, то существует единственная точка $\widetilde{z}_\varepsilon \in \Xi_\varepsilon$ такая, что

$$\widetilde{z}_\varepsilon = arg\min_{z \in \Xi_\varepsilon} \varphi(z) \quad \text{и} \quad -l_\varepsilon = \nabla\varphi(\widetilde{z}_\varepsilon) \quad \text{при} \quad l_\varepsilon \neq 0. \tag{1.10}$$

Теорема 1. *Пусть $l_0 \neq 0$. Тогда $J_\varepsilon = \varphi(\widetilde{z}_\varepsilon) \to J_0 = \varphi(\widetilde{z}_0)$ и $l_\varepsilon \to l_0$ при $\varepsilon \to +0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливы соотношения

$$\Xi_\varepsilon = \Xi_0 + \{\varepsilon e^{AT} f\} = \Xi_0 + \{\varepsilon \widetilde{f}\} \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,$$

где $\widetilde{f} := e^{AT} f$. Возьмем $\widetilde{z}_\varepsilon \in \Xi_\varepsilon$ (1.10), тогда при всех $\varepsilon \geqslant 0$ выполняется $\widetilde{z}_\varepsilon \in \Xi_0 + \{\varepsilon \widetilde{f}\}$. Пусть $\widehat{z}$ — произвольная предельная точка $\{\widetilde{z}_\varepsilon\}$, т. е. $\widetilde{z}_{\varepsilon_k} \to \widehat{z}$ для некоторой последовательности $\varepsilon_k \to +0$ при $k \to +\infty$. Тогда существует такая последовательность $\{z_k\} \subset \Xi_0$, что $\widetilde{z}_{\varepsilon_k} = z_k + \varepsilon_k \widetilde{f}$ или $z_k = \widetilde{z}_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k \widetilde{f} \to \widehat{z}$. Поэтому $\widehat{z} \in \Xi_0$ в силу компактности Ξ_0. Тогда в силу непрерывности функции φ выполняется $\varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k}) = \varphi(z_k + \varepsilon_k \widetilde{f}) \longrightarrow \varphi(\widehat{z}) \geqslant \varphi(\widetilde{z}_0)$. С другой стороны,

$$\varphi(\widetilde{z}_0) \leqslant \varphi(z_k) = \varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k \widetilde{f}) = \varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k}) + \big(\varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k \widetilde{f}) - \varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k})\big) \leqslant \varphi(\widetilde{z}_0 + \varepsilon_k \widetilde{f}) + \nu_k, \tag{1.11}$$

где $\nu_k := \varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k \widetilde{f}) - \varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k})$. Вследствие непрерывности функции φ на $\mathbb{R}^n$ справедливо $\nu_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Поэтому, переходя к пределу при $k \to +\infty$ в (1.11), получим, что

$$\varphi(\widetilde{z}_{\varepsilon_k}) \longrightarrow \varphi(\widetilde{z}_0) = \varphi(\widehat{z}) \quad \text{при} \quad \varepsilon_k \to 0.$$

Таким образом, $\widehat{z}$ — также точка минимума функции φ на Ξ_0, тогда в силу выпуклости Ξ_0 и строгой выпуклости функции φ получаем, что $\widehat{z} = \widetilde{z}_0$ и $\widetilde{z}_\varepsilon \to \widetilde{z}_0$ (поскольку все предельные точки $\{\widetilde{z}_\varepsilon\}$ совпали с $\widetilde{z}_0$).

Тогда и $J_\varepsilon = \varphi(\widetilde{z}_\varepsilon) \longrightarrow \varphi(\widetilde{z}_0) = J_0$, а в силу непрерывности $\nabla\varphi$ получим, что

$$l_\varepsilon = -\nabla\varphi(\widetilde{z}_\varepsilon) \longrightarrow -\nabla\varphi(\widetilde{z}_0) = l_0.$$

Теорема доказана.

В силу теоремы 1 задача (1.2) является предельной для возмущенной задачи (1.1).

Как уже отмечалось, в общем случае не исключается ситуация, когда при некотором $t_0 \in (0, T)$ выполняется $\|C^*(t_0)l_0\| = 0$, т. е. оптимальное управление в предельной задаче (1.2) терпит разрыв в точке t_0, а у исходной задачи (1.1) управление непрерывно при всех $t \in [0, T]$ $(\forall\, t \in [0; T]\ \|C^*(t)l_\varepsilon\| \neq 0)$.

В работе [4] доказано, что такая ситуация для задачи быстродействия при возмущении начальных данных приводит к сложной асимптотике определяющего вектора. В следующем разделе покажем, что и для рассматриваемого класса задач (1.1) аналогичная ситуация возможна и в приведенном в нем примере определяющий вектор l_ε при $\varepsilon \to +0$ не раскладывается в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра ε и логарифмов от него.

2. Пример задачи (1.1) со сложной асимптотикой определяющего вектора

Рассмотрим следующую задачу вида (1.1):

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \mathbb{R}^2,\\
&\dot{y}_\varepsilon = u_\varepsilon, \quad u_\varepsilon \in \mathbb{R}^2, \quad \|u_\varepsilon\| \leqslant 1,\\
&x_\varepsilon(0) = x^0 + \varepsilon f_1, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \quad f_1 \neq 0, \quad 0 \leqslant \varepsilon \ll 1,\\
&J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\|x_\varepsilon(T; u_\varepsilon)\|^2 + \frac{1}{2}\|y_\varepsilon(T; u_\varepsilon)\|^2 \to \min.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь в обозначениях предыдущего раздела

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon = \begin{pmatrix} x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$
$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а I — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Тогда

$$e^{At} = \begin{pmatrix} I & tI \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad C(t) := e^{At}B = \begin{pmatrix} tI \\ I \end{pmatrix}, \quad C^*(t)l = (tI,\, I)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = tl_1 + l_2. \tag{2.2}$$

Предельная задача (1.2) примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0 = y_0, \quad \dot{y}_0 = u_0, \quad t \in [0, T], \quad \|u_0\| \leqslant 1, \quad x_0(0) = x^0, \quad y_0(0) = y^0,\\
&J_0(u_0) = \frac{1}{2}\|x_0(T; u_0)\|^2 + \frac{1}{2}\|y_0(T; u_0)\|^2 \to \min.
\end{aligned}$$

Поскольку в (2.1) $\varphi(z) = \|z\|^2/2$, то

$$\nabla\varphi(z) = z. \tag{2.3}$$

В силу (1.7), (2.2) определяющие векторы в возмущенной и предельной задачах в рассматриваемом случае удовлетворяют уравнениям

$$-\begin{pmatrix} l_{1,\varepsilon} \\ l_{2,\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + Ty^0 + \varepsilon f_1 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^T \begin{pmatrix} tI \\ I \end{pmatrix} \frac{tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon}}{\|tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon}\|}\, dt, \tag{2.4}$$

$$-\begin{pmatrix} l_{1,0} \\ l_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + Ty^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^T \begin{pmatrix} tI \\ I \end{pmatrix} \frac{tl_{1,0} + l_{2,0}}{\|tl_{1,0} + l_{2,0}\|}\, dt. \tag{2.5}$$

Пусть при $t_0 = 1 \in (0, T)$ знаменатель подынтегральной функции в уравнении (2.5) обращается в нуль:

$$t_0 l_{1,0} + l_{2,0} = l_{1,0} + l_{2,0} = 0, \tag{2.6}$$

(т. е. оптимальное управление в предельной задаче терпит разрыв), и тем самым $l_{2,0} = -t_0 l_{1,0} = -l_{1,0}$, а интегралы в правых частях уравнений (2.5) преобразуются к виду

$$\int\limits_0^T \frac{t(t-t_0)l_{1,0}}{|t-t_0|\cdot\|l_{1,0}\|}\, dt = \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}\left(-\int\limits_0^{t_0} t\, dt + \int\limits_{t_0}^T t\, dt\right) = \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}\Big(\frac{T^2}{2} - t_0^2\Big), \tag{2.7}$$

$$\int\limits_0^T \frac{(t-t_0)l_{1,0}}{|t-t_0|\cdot\|l_{1,0}\|}\, dt = \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}\left(-\int\limits_0^{t_0} dt + \int\limits_{t_0}^T dt\right) = \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}(T - 2t_0). \tag{2.8}$$

Принимая во внимание эти соотношения, запишем уравнения (2.5) в виде

$$-l_{1,0} = x^0 + Ty^0 + \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}\left(\frac{T^2}{2} - t_0^2\right), \quad t_0 l_{1,0} = y^0 + \frac{l_{1,0}}{\|l_{1,0}\|}(T - 2t_0). \tag{2.9}$$

Для упрощения вычислений положим $l_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и покажем, что по этому вектору однозначно восстанавливаются начальные векторы x^0 и y^0. В силу (2.6) получим $l_{2,0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Далее, из второго уравнения системы (2.9) следует коллинеарность векторов y^0 и $l_{1,0}$, а затем из первого уравнения — коллинеарность векторов $l_{1,0}$ и x^0, поэтому $y^0_2 = x^0_2 = 0$.

Положим также $T = 4$, тогда из (2.9) выводим, что

$$-1 = x^0_1 + 4y^0_1 + 7, \quad 1 = y^0_1 + 2,$$

отсюда $y^0_1 = -1$, $x^0_1 = -4$. Итак,

$$x^0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_{2,0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = 4. \tag{2.10}$$

Отметим, что в рассматриваемом примере (2.1) начальные векторы x^0 и y^0 коллинеарны. При этом у предельной задачи в силу (2.10) происходит вырождение размерности.

Возьмем

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Утверждение 1. *У возмущенной задачи* (2.1) *для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $C^*(t)l_\varepsilon \neq 0$ *при всех* $t \in [0, T]$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $C^*(t_{\overline{\varepsilon}})l_{\overline{\varepsilon}} = 0$ при некоторых $\overline{\varepsilon} > 0$ и $t_{\overline{\varepsilon}} \in [0, T]$, тогда в силу (2.2) имеем $t_{\overline{\varepsilon}} l_{1,\overline{\varepsilon}} + l_{2,\overline{\varepsilon}} = 0$, что означает коллинеарность векторов $l_{1,\overline{\varepsilon}}$ и $l_{2,\overline{\varepsilon}}$. Далее, из равенств (2.7) и (2.8) с заменой t_0 на $t_{\overline{\varepsilon}}$ получим соотношения, аналогичные (2.9),

$$-l_{1,\overline{\varepsilon}} = x^0 + Ty^0 + \overline{\varepsilon} f_1 + \frac{l_{1,\overline{\varepsilon}}}{\|l_{1,\overline{\varepsilon}}\|}\Big(\frac{T^2}{2} - t_{\overline{\varepsilon}}^2\Big), \quad t_{\overline{\varepsilon}} l_{1,\overline{\varepsilon}} = y^0 + \frac{l_{1,\overline{\varepsilon}}}{\|l_{1,\overline{\varepsilon}}\|}(T - 2t_{\overline{\varepsilon}}). \tag{2.12}$$

Из второго уравнения системы (2.12) следует коллинеарность векторов y^0 и $l_{1,\overline{\varepsilon}}$, а затем из первого уравнения этой системы — коллинеарность векторов $l_{1,\overline{\varepsilon}}$ и $x^0 + Ty^0 + \overline{\varepsilon} f_1$, что дает коллинеарность векторов y^0 и $x^0 + Ty^0 + \overline{\varepsilon} f_1$. Но в силу (2.10) из этого получается коллинеарность векторов y^0 и f_1, что противоречит (2.11). □

Следствие 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $l_{1,\varepsilon} \nparallel l_{2,\varepsilon}$.* □

Таким образом, в отличие от предельной задачи, вырождения размерности в возмущенной задаче не происходит. Как будет далее показано, такое несовпадение размерностей исходной и предельной задач приводит, как и в [4], к сложной асимптотике решения.

Пусть
$$l_{2,\varepsilon} = \beta_\varepsilon l_{1,\varepsilon} + \widetilde{\rho}_\varepsilon, \ \text{ где } \ l_{1,\varepsilon} \perp \widetilde{\rho}_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon = \beta_\varepsilon + 1, \quad l_{1,\varepsilon} = l_{1,0} + \lambda_\varepsilon, \tag{2.13}$$

тогда в силу теоремы 1 и равенства (2.6) справедливы соотношения

$$\gamma_\varepsilon \to 0, \quad \widetilde{\rho}_\varepsilon \to 0, \quad \lambda_\varepsilon \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0. \tag{2.14}$$

Следовательно,

$$tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon} = l_{1,\varepsilon}(t + \beta_\varepsilon) + \widetilde{\rho}_\varepsilon, \quad \|tl_{1,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon}\| = \sqrt{\|l_{1,\varepsilon}\|^2(t + \beta_\varepsilon)^2 + \|\widetilde{\rho}_\varepsilon\|^2}.$$

Сделав замену переменной интегрирования в уравнениях (2.4) по формуле $\tau = t + \beta_\varepsilon$, получим

$$\begin{cases} -l_{1,\varepsilon} = x^0 + Ty^0 + \varepsilon f_1 + \displaystyle\int\limits_{\beta_\varepsilon}^{4+\beta_\varepsilon} \frac{(\tau - \beta_\varepsilon)(\tau l_{1,\varepsilon} + \widetilde{\rho}_\varepsilon)}{\sqrt{\tau^2\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \|\widetilde{\rho}_\varepsilon\|^2}}\, d\tau, \\ -\beta_\varepsilon l_{1,\varepsilon} - \widetilde{\rho}_\varepsilon = y^0 + \displaystyle\int\limits_{\beta_\varepsilon}^{4+\beta_\varepsilon} \frac{\tau l_{1,\varepsilon} + \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\sqrt{\tau^2\|l_{1,\varepsilon}\|^2 + \|\widetilde{\rho}_\varepsilon\|^2}}\, d\tau. \end{cases} \tag{2.15}$$

Отметим, что в силу следствия 1 $\widetilde{\rho}_\varepsilon \neq 0$ при всех $\varepsilon > 0$.

Обозначим
$$\rho_\varepsilon := \frac{\widetilde{\rho}_\varepsilon}{\|l_{1,\varepsilon}\|}, \quad I_k(a, b) := \int\limits_a^b \frac{\tau^k}{\sqrt{\tau^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}}\, d\tau$$

и с учетом ортогональности векторов $l_{1,\varepsilon}$ и ρ_ε (2.13) запишем систему (2.15) в виде

$$\begin{cases} -l_{1,\varepsilon} = x^0 + Ty^0 + \varepsilon f_1 + \dfrac{l_{1,\varepsilon}}{\|l_{1,\varepsilon}\|} I_2(\beta_\varepsilon, 4 + \beta_\varepsilon) + \Big(\rho_\varepsilon - \beta_\varepsilon \dfrac{l_{1,\varepsilon}}{\|l_{1,\varepsilon}\|}\Big) I_1(\beta_\varepsilon, 4 + \beta_\varepsilon) \\ \qquad - \beta_\varepsilon \rho_\varepsilon I_0(\beta_\varepsilon, 4 + \beta_\varepsilon), \\ -\beta_\varepsilon l_{1,\varepsilon} - \rho_\varepsilon \|l_{1,\varepsilon}\| = y^0 + \dfrac{l_{1,\varepsilon}}{\|l_{1,\varepsilon}\|} I_1(\beta_\varepsilon, 4 + \beta_\varepsilon) + \rho_\varepsilon I_0(\beta_\varepsilon, 4 + \beta_\varepsilon), \\ \langle l_{1,\varepsilon}, \rho_\varepsilon \rangle = 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Интегралы $I_k(a,b)$ табличные, а именно,

$$I_0(a,b) = \ln\Big|\tau + \sqrt{\tau^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}\Big|\,\Big|_a^b, \quad I_1(a,b) = \sqrt{\tau^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}\Big|_a^b,$$
$$I_2(a,b) = \frac{\tau}{2}\sqrt{\tau^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}\Big|_a^b - \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2} I_0(a,b).$$

Далее, с учетом неравенств $\beta_\varepsilon < 0$ и $4 + \beta_\varepsilon > 0$, справедливых при достаточно малых $\varepsilon > 0$, соотношений (2.14), а также формул Тейлора для $(1+\xi)^{1/2}$ и $\ln(1+\xi)$ при малых ξ получаем

$$I_0(\beta_\varepsilon, 4+\beta_\varepsilon) = \ln\Big|\frac{4+\beta_\varepsilon + \sqrt{(4+\beta_\varepsilon)^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}}{\beta_\varepsilon + \sqrt{\beta_\varepsilon^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}}\Big|$$
$$= \ln\Big|4+\beta_\varepsilon + (4+\beta_\varepsilon)\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2(4+\beta_\varepsilon)^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)\Big)\Big|$$
$$- \ln\Big|\beta_\varepsilon - \beta_\varepsilon\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon^2} - \frac{\|\rho_\varepsilon\|^4}{8\beta_\varepsilon^4} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^6\right)\Big)\Big|$$
$$= \ln\Big|2(4+\beta_\varepsilon)\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4(4+\beta_\varepsilon)^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)\Big)\Big| - \ln\Big|\frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2|\beta_\varepsilon|} - \frac{\|\rho_\varepsilon\|^4}{8|\beta_\varepsilon|\beta_\varepsilon^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^6\right)\Big|$$
$$= \ln(2(4+\beta_\varepsilon)) + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4(4+\beta_\varepsilon)^2} - \ln\frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2|\beta_\varepsilon|} + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4\beta_\varepsilon^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)$$
$$= \ln(4|\beta_\varepsilon|(4+\beta_\varepsilon)) - \ln\|\rho_\varepsilon\|^2 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4(4+\beta_\varepsilon)^2} + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4\beta_\varepsilon^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right);$$

$$I_1(\beta_\varepsilon, 4+\beta_\varepsilon) = \sqrt{(4+\beta_\varepsilon)^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2} - \sqrt{\beta_\varepsilon^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2}$$
$$= (4+\beta_\varepsilon)\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2(4+\beta_\varepsilon)^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)\Big) - |\beta_\varepsilon|\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)\Big)$$
$$= 4 + 2\beta_\varepsilon + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2(4+\beta_\varepsilon)} + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right);$$

$$I_2(\beta_\varepsilon, 4+\beta_\varepsilon) = \frac{4+\beta_\varepsilon}{2}\sqrt{(4+\beta_\varepsilon)^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2} - \frac{\beta_\varepsilon}{2}\sqrt{\beta_\varepsilon^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2} - \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2} I_0(\beta_\varepsilon, 4+\beta_\varepsilon)$$
$$= \frac{(4+\beta_\varepsilon)^2}{2}\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2(4+\beta_\varepsilon)^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)\Big) - \frac{\beta_\varepsilon|\beta_\varepsilon|}{2}\Big(1 + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon^2} + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)\Big)$$
$$- \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2}\ln(4|\beta_\varepsilon|(4+\beta_\varepsilon)) + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2}\ln\|\rho_\varepsilon\|^2 + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right)$$
$$= \frac{(4+\beta_\varepsilon)^2}{2} + \frac{\beta_\varepsilon^2}{2} + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2} - \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2}\ln(4|\beta_\varepsilon|(4+\beta_\varepsilon)) + \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2}\ln\|\rho_\varepsilon\|^2 + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right).$$

Таким образом, система (2.16) преобразуется к виду

$$\begin{cases} -l_{1,\varepsilon} = x^0 + Ty^0 + \varepsilon f_1 + \dfrac{l_{1,\varepsilon}}{\|l_{1,\varepsilon}\|}\Big(\dfrac{(4+\beta_\varepsilon)^2}{2} + \dfrac{\beta_\varepsilon^2}{2} + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2} - \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2}\ln(4|\beta_\varepsilon|(4+\beta_\varepsilon)) \\ \quad + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2}\ln\|\rho_\varepsilon\|^2\Big) + \Big(\rho_\varepsilon - \beta_\varepsilon\dfrac{l_{1,\varepsilon}}{\|l_{1,\varepsilon}\|}\Big)\Big(4 + 2\beta_\varepsilon + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2(4+\beta_\varepsilon)} + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon}\Big) \\ \quad - \beta_\varepsilon\rho_\varepsilon\Big(\ln(4|\beta_\varepsilon|(4+\beta_\varepsilon)) - \ln\|\rho_\varepsilon\|^2 + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4(4+\beta_\varepsilon)^2} + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4\beta_\varepsilon^2}\Big) + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right), \\ -\beta_\varepsilon l_{1,\varepsilon} - \rho_\varepsilon\|l_{1,\varepsilon}\| = y^0 + \dfrac{l_{1,\varepsilon}}{\|l_{1,\varepsilon}\|}\Big(4 + 2\beta_\varepsilon + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2(4+\beta_\varepsilon)} + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{2\beta_\varepsilon}\Big) \\ \quad + \rho_\varepsilon\Big(\ln(4|\beta_\varepsilon|(4+\beta_\varepsilon)) - \ln\|\rho_\varepsilon\|^2 + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4(4+\beta_\varepsilon)^2} + \dfrac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{4\beta_\varepsilon^2}\Big) + O\left(\|\rho_\varepsilon\|^4\right), \\ \langle l_{1,\varepsilon}, \rho_\varepsilon\rangle = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Принимая во внимание соотношения (2.13), (2.14), отметим, что все величины, явно выписанные в уравнениях системы (2.16), а также $I_k(\beta_\varepsilon, 4+\beta_\varepsilon) = I_k(-1+\gamma_\varepsilon, 3+\gamma_\varepsilon)$, $k=0,1,2$, при малых ε, γ_ε, ρ_ε и λ_ε раскладываются в степенные ряды по ε, γ_ε и компонентам векторов ρ_ε и λ_ε. В частности, из первых двух уравнений системы (2.17) в главном получаем равенства (2.9).

Будем искать асимптотическое разложение γ_ε, ρ_ε и λ_ε в виде

$$\gamma_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\varepsilon), \quad \rho_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(\varepsilon), \quad \lambda_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\varepsilon). \tag{2.18}$$

Здесь $\gamma_k(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon^k\right)$; $\rho_k(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon^k\right)$; $\lambda_k(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon^k\right)$ при $\varepsilon \to +0$; в свою очередь $\psi(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon^\sigma\right)$, $\varepsilon \to +0$, означает, что $\forall\, \nu < \sigma\ \ \psi(\varepsilon) = o(\varepsilon^\nu)$ (см., например, разд. 2 в [9]). В частности, $\varepsilon \ln^q(\varepsilon)$, $q > 0$, есть $O^*(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$, но не $O(\varepsilon)$. Отметим, что при $\nu > 0$ выполняется $O^*\left(\varepsilon^{1+\nu}\right) = O^*\left(\varepsilon\right) O\left(\varepsilon^\nu\right)$.

Выпишем систему первого приближения для (2.17) относительно неизвестных векторов $\rho_1 = \rho_1(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon\right)$, $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) = O^*\left(\varepsilon\right)$ и скаляра $\gamma_1 = O^*\left(\varepsilon\right)$ при $\varepsilon \to +0$

$$\begin{cases} -\lambda_1 = \varepsilon f_1 + \left[\dfrac{l_{1,0}+\lambda_\varepsilon}{\|l_{1,0}+\lambda_\varepsilon\|}\, \dfrac{(3+\gamma_\varepsilon)^2 + (-1+\gamma_\varepsilon)^2}{2}\right]_1 + 2\rho_1 \\ \qquad - 2\left[(-1+\gamma_\varepsilon)\dfrac{l_{1,0}+\lambda_\varepsilon}{\|l_{1,0}+\lambda_\varepsilon\|}(1+\gamma_\varepsilon)\right]_1 + \rho_1 \ln 12 - \rho_1 \ln \|\rho_1\|^2, \\ \lambda_1 - \gamma_1 l_{1,0} - \rho_1 = 2\left[\dfrac{l_{1,0}+\lambda_\varepsilon}{\|l_{1,0}+\lambda_\varepsilon\|}(1+\gamma_\varepsilon)\right]_1 + \rho_1 \ln 12 - \rho_1 \ln \|\rho_1\|^2, \\ \langle l_{1,0}, \rho_1 \rangle = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Здесь посредством $[]_1$ отмечены слагаемые порядка $O^*\left(\varepsilon\right)$ в указанном выражении.

Отметим, что

$$\frac{l_{1,0}+\lambda_\varepsilon}{\|l_{1,0}+\lambda_\varepsilon\|} = l_{1,0} + \lambda_\varepsilon - l_{1,0}\langle l_{1,0}, \lambda_\varepsilon\rangle + O\left(\|\lambda_\varepsilon\|^2\right), \quad \frac{(3+\gamma_\varepsilon)^2 + (-1+\gamma_\varepsilon)^2}{2} = 5 + 2\gamma_\varepsilon + \gamma_\varepsilon^2.$$

В итоге, система первого приближения (2.19) примет вид

$$\begin{cases} -\lambda_1 = \varepsilon f_1 + 2\gamma_1 l_{1,0} + 5\lambda_1 - 5 l_{1,0}\langle l_{1,0}, \lambda_1\rangle + 2\rho_1 \\ \qquad + 2\lambda_1 - 2 l_{1,0}\langle l_{1,0}, \lambda_1\rangle + \rho_1 \ln 12 - \rho_1 \ln \|\rho_1\|^2, \\ \lambda_1 - \gamma_1 l_{1,0} - \rho_1 = 2\gamma_1 l_{1,0} + 2\lambda_1 - 2 l_{1,0}\langle l_{1,0}, \lambda_1\rangle + \rho_1 \ln 12 - \rho_1 \ln \|\rho_1\|^2, \\ \langle l_{1,0}, \rho_1\rangle = 0, \end{cases}$$

или после приведения подобных

$$\begin{cases} -8\lambda_1 + 7\, l_{1,0}\langle l_{1,0}, \lambda_1\rangle - 2\gamma_1 l_{1,0} - \rho_1 \ln(12e^2) + \rho_1 \ln\|\rho_1\|^2 = \varepsilon f_1, \\ -\lambda_1 + 2 l_{1,0}\langle l_{1,0}, \lambda_1\rangle - 3\gamma_1 l_{1,0} - \rho_1 \ln(12e) + \rho_1 \ln\|\rho_1\|^2 = 0, \\ \langle l_{1,0}, \rho_1\rangle = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Учитывая вид вектора $l_{1,0}$ (2.10), из последнего уравнения (2.20) выводим $\rho_{1,1} = 0$. Теперь запишем систему (2.20) в “координатной форме”

$$\begin{cases} -8\lambda_{1,1} + 7\lambda_{1,1} - 2\gamma_1 = 0; \\ -8\lambda_{2,1} - \rho_{2,1}\ln(12e^2) + \rho_{2,1}\ln\rho_{2,1}^2 = \varepsilon; \\ -\lambda_{1,1} + 2\lambda_{1,1} - 3\gamma_1 = 0; \\ -\lambda_{2,1} - \rho_{2,1}\ln(12e) + \rho_{2,1}\ln\rho_{2,1}^2 = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Из первого и третьего уравнений системы (2.21) следует, что $\lambda_{1,1} = \gamma_1 = 0$. Затем из четвертого уравнения находим

$$\lambda_{2,1} = -\rho_{2,1} \ln(12e) + \rho_{2,1} \ln \rho_{2,1}^2 \tag{2.22}$$

и, подставив это выражение для $\lambda_{2,1}$ во второе уравнение, приходим к соотношению

$$\rho_{2,1}(A - 7 \ln \rho_{2,1}^2) = \varepsilon, \tag{2.23}$$

где $A := 7 \ln 12 + 6 > 0$. Поскольку $\rho_1 = O^*(\varepsilon)$, то $-7 \ln \rho_{2,1}^2 \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$; поэтому вследствие уравнения (2.23) выполняется $\rho_{2,1} > 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Выполним эквивалентные преобразования уравнения (2.23)

$$\frac{\rho_{2,1}}{e^{\frac{A}{14}}} \ln \frac{e^{\frac{A}{14}}}{\rho_{2,1}} = \frac{\varepsilon}{14e^{\frac{A}{14}}}. \tag{2.24}$$

и введем обозначения

$$\delta := \frac{\rho_{2,1}}{e^{\frac{A}{14}}} > 0, \quad \varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{14e^{\frac{A}{14}}} > 0. \tag{2.25}$$

Тогда уравнение (2.24) примет вид

$$G(\delta, \varepsilon_1) := \delta \ln \frac{1}{\delta} - \varepsilon_1 = 0. \tag{2.26}$$

Отметим, что уравнение (2.26) рассматривалось в [4] при получении асимптотики решения возмущенной задачи быстродействия с ограничением на управление. Приведем здесь подробное исследование уравнения (2.26). Для любого $\varepsilon_1 > 0$ функция $G(\delta, \varepsilon_1)$ непрерывна по δ на $(0, e^{-2}]$. Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $G(e^{-2}, \varepsilon_1) = 2e^{-2} - \varepsilon_1 > 0$ при всех $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$; при этом

$$\lim_{\delta \to +0} G(\delta, \varepsilon_1) = -\varepsilon_1 < 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \delta} = \ln \frac{1}{\delta} - 1 > 0 \ \text{ при } \ \delta \in (0, e^{-2}].$$

Поэтому при каждом $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (2.26) имеет единственное решение $\delta = \overline{W}(\varepsilon_1) \in (0, e^{-2})$, т. е. $\overline{W}(\varepsilon_1) \ln \dfrac{1}{\overline{W}(\varepsilon_1)} = \varepsilon_1$. Тем самым,

$$W(\varepsilon) := \overline{W}(\varepsilon_1) = o(\varepsilon) \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0. \tag{2.27}$$

Итак, с учетом формул (2.25), (2.22) выпишем решение системы первого приближения

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \lambda_{1,1} = \rho_{1,1} = 0, \quad \rho_{2,1} = A_1 W(\varepsilon) =: \widetilde{W}(\varepsilon) > 0, \\ \lambda_{2,1} = -A_1 \ln(12e) W(\varepsilon) + 2A_1 W(\varepsilon) \ln(A_1 W(\varepsilon)) =: V(\varepsilon), \quad \text{где} \quad A_1 = e^{\frac{A}{14}}; \end{gathered} \tag{2.28}$$

при этом $\|\rho_1\| = \rho_{2,1}$.

Утверждение 2. $\overline{W}(\varepsilon_1)$ *не является рациональной функцией от* ε_1 *и* $\ln \dfrac{1}{\varepsilon_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $v(\varepsilon_1) := \overline{W}(\varepsilon_1)/\varepsilon_1$. Тогда $\overline{W}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 v(\varepsilon_1)$, и уравнение (2.26) преобразуется к виду

$$1 = v(\varepsilon_1) \ln \frac{1}{\varepsilon_1 v(\varepsilon_1)} = v(\varepsilon_1) \Big(\ln \frac{1}{v(\varepsilon_1)} + \ln \frac{1}{\varepsilon_1} \Big). \tag{2.29}$$

Из соотношений (2.27), (2.29) следует, что

$$v(\varepsilon_1) \ln \frac{1}{\varepsilon_1} \to 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon_1 \to +0. \tag{2.30}$$

Далее, предположим противное, пусть $v(\varepsilon_1) = \dfrac{a_0 + \ldots + a_p \ln^p \dfrac{1}{\varepsilon_1} + O^*(\varepsilon_1)}{b_0 + \ldots + b_q \ln^q \dfrac{1}{\varepsilon_1} + O^*(\varepsilon_1)}$; тогда в силу (2.30) имеем $q = p+1$ и без ограничения общности будем считать, что $a_p = b_q = 1$, т. е. при $\varepsilon_1 \to +0$ выполняется

$$v(\varepsilon_1) = \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}} \frac{1 + O\Big(\ln^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\Big)}{1 + O\Big(\ln^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\Big)} = \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}}\Big(1 + O\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big)\Big) = \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}} + O\Big(\ln^{-2}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{v(\varepsilon_1)} = \ln\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{1}{1 + O\Big(\ln^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon_1}\Big)} = \ln\frac{1}{\varepsilon_1}\Big(1 + O\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big)\Big),$$

и из уравнения (2.29) выводим соотношения

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}} + O\Big(\ln^{-2}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big)\right)\Big(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_1} + O\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big) + \ln\frac{1}{\varepsilon_1}\Big) \\ &= \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}}\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_1} + O\Big(\ln^{-2}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big)\ln\ln\frac{1}{\varepsilon_1} + O\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\varepsilon_1}\Big) + 1. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \dfrac{\ln\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1}} = 0$, то из (2.31) вытекает равенство $0 = \ln\ln\dfrac{1}{\varepsilon_1} + O(1) \to +\infty$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения. □

Выпишем теперь систему второго приближения для (2.17) в “координатной форме”:

$$\begin{cases} -\lambda_{1,2} - 2\gamma_2 + \rho_{1,2}(2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln(12e^2)) = -\dfrac{7}{2}V^2(\varepsilon) + \dfrac{1}{6}\widetilde{W}^2(\varepsilon) \\ \qquad + \dfrac{\widetilde{W}^2(\varepsilon)}{2}(2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln 12); \\ -8\lambda_{2,2} + \rho_{2,2}(2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln 12) = 0; \\ \lambda_{1,2} - 3\gamma_2 + \rho_{1,2}(2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln(12e)) = -V^2(\varepsilon) - \dfrac{\widetilde{W}^2(\varepsilon)}{3}; \\ -\lambda_{2,2} + \rho_{2,2}\left(2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln\dfrac{12}{e}\right) = 0; \\ \rho_{1,2} = -V(\varepsilon)\widetilde{W}(\varepsilon). \end{cases} \tag{2.32}$$

Система (2.32), как и системы следующих приближений, линейна относительно своих неизвестных с одним и тем же линейным оператором. Выполним преобразования, подставив выражение для $\rho_{1,2}$ из 5-го уравнения в 1-е и 3-е уравнения. При этом определитель матрицы полученной системы относительно неизвестных $(\lambda_{1,2}, \lambda_{2,2}, \gamma_2, \rho_{2,2})$ равен

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln 12 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2\ln\widetilde{W}(\varepsilon) - \ln\frac{12}{e} \end{vmatrix} = 5(-14\ln\widetilde{W}(\varepsilon) + 7\ln 12 - 8) \longrightarrow +\infty \ \text{ при } \ \varepsilon \to +0.$$

Тем самым, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ линейный оператор системы (2.32) обратим. Следовательно, однозначно определятся и все остальные приближения. Компоненты найденных векторов λ_2, ρ_2 и скаляр γ_2 представляют собой рациональные функции от $W(\varepsilon)$ и $\ln\dfrac{1}{W(\varepsilon)}$ (или вследствие уравнения (2.26) — от ε и $W(\varepsilon)$), но в силу утверждения 2 не являются рациональными функциями от ε и $\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Нахождение и обоснование полных асимптотик величин λ_ε, ρ_ε и γ_ε производится стандартным образом (см., например, разд. 5 [16]).

Теорема 2. *Определяющий вектор l_ε в задаче* (2.1) *не раскладывается в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре по степеням ε при $\varepsilon \to 0$. Его асимптотическое разложение представляет собой разложение в смысле Эрдейи относительно асимптотической последовательности $\{\varepsilon^k\}$, порождаемое рядами* (2.18) *с членами первого приближения* (2.28). *Так,*

$$\begin{aligned} l_{1,\varepsilon} &= l_{1,0} + \lambda_1 + O^*\left(\varepsilon^2\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -A_1\ln(12e)W(\varepsilon) + 2A_1W(\varepsilon)\ln(A_1W(\varepsilon)) \end{pmatrix} + O^*\left(\varepsilon^2\right), \\ l_{2,\varepsilon} &= -l_{1,0} + \gamma_1 l_{1,0} - \lambda_1 + \rho_1\|l_{1,0}\| + O^*\left(\varepsilon^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ A_1\ln(12e^2)W(\varepsilon) - 2A_1W(\varepsilon)\ln(A_1W(\varepsilon)) \end{pmatrix} + O^*\left(\varepsilon^2\right), \end{aligned} \tag{2.33}$$

где $A_1 = e^{\frac{A}{14}}$. □

Далее, принимая во внимание соотношения (1.7), (2.3), приходим к равенству $-l_\varepsilon = z_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$. Тогда оптимальное значение функционала качества в задаче (2.1) выражается через вектор l_ε следующим образом:

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}}) = \frac{\|l_\varepsilon\|^2}{2}.$$

При этом, используя формулы для решения системы (2.32), а также (2.33), можно показать, что в асимптотическом разложении $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\mathrm{opt}})$ слагаемые второго порядка малости существенно зависят от функции $W(\varepsilon)$.

Заключение

В приведенном в разд. 2 примере начальные векторы выбраны коллинеарными, вследствие чего оптимальное управление в предельной задаче имеет разрыв, в то время как в исходной задаче оптимальное управление непрерывно во всех точках. При этом определяющий вектор l_ε при $\varepsilon \to +0$ не раскладывается в асимптотический ряд в смысле Пуанкаре ни по какой асимптотической последовательности рациональных функций от малого параметра ε и логарифмов от него.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
5. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 1. С. 3–51.

6. **Курина Г.А., Калашникова М.А.** Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. Т. 11. С. 3–61. doi:10.31857/S0005231022110010
7. **Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1989. 204 с.
8. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в регулярном случае // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1473–1480.
9. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
10. **Парышева Ю.В.** Асимптотика решения линейной задачи оптимального управления в сингулярном случае // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 266–270.
11. **Шабуров А.А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление // Изв. ИМИ УдГУ. 2017. Т. 50. С. 110–120. doi: 10.20537/2226-3594-2017-50-09
12. **Шабуров А.А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Вестн. российских ун-тов. Математика. 2019. Т. 24, № 125. С. 119–136. doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136
13. **Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.** Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Int. J. of Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, no. 1. P. 1–36.
14. **Hoai N.T.** Asymptotic solution of a singularly perturbed linear–quadratic problem in critical case with cheap control // J. Optim Theory Appl. 2017. Vol. 175, no. 2. P. 324–340. doi: 10.1007/s10957-017-1156-6
15. **Nguyen T.H.** Asymptotic solution of a singularly perturbed optimal problem with integral constraint // J. Optim. Theory Appl. 2021. No. 190. P. 931–950. doi: 10.1007/s10957-021-01916-w
16. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи быстродействия с двумя малыми параметрами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т 25, № 2. С. 88–101. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-88-101

Поступила 9.03.2023
После доработки 13.04.2023
Принята к публикации 17.04.2023

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, NY, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. doi:10.1002/zamm.19630431023 . ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.

2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [The Theory of the Control of Motion: Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* NY, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
4. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998. vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
5. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012
6. Kurina G.A., Kalashnikova M.A. Singularly perturbed problems with multi-tempo fast variables, *Autom. Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1679–1723. doi: 10.1134/S00051179220110017
7. Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Kratkii kurs teorii ekstremal'nykh zadach* [A short course in the theory of extremal problems], Moscow: Izdatel'stvo Moskov. Univ., 1989, 204 p.
8. Danilin A.R. Asymptotics of the optimal value of the performance functional for a rapidly stabilizing indirect control in the regular case, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 11, pp. 1545–1552. doi: 10.1134/S0012266106110048
9. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062
10. Parysheva Yu.V. Asymptotics of a solution to a linear optimal control problem in the singular case. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 266–270 (in Russian).
11. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution for the singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index and smooth control constraints, *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 50, pp. 110–120 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-50-09 .
12. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index depends on slow variables and smooth control constraints, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 119–136 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136
13. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012, *Int. J. of Information and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
14. Hoai N.T. Asymptotic solution of a singularly perturbed linear–quadratic problem in critical case with cheap control, *J. Optim Theory Appl.*, 2017, vol. 175, no. 2, pp. 324–340. doi: 10.1007/s10957-017-1156-6
15. Nguyen T.H. Asymptotic solution of a singularly perturbed optimal problem with integral constraint, *J. Optim. Theory Appl.*, 2021, no. 190, pp. 931–950. doi: 10.1007/s10957-021-01916-w
16. A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the solution to a singularly perturbed time-optimal control problem with two small parameters, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 88–101 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-88-101

Received March 9, 2023
Revised April 13, 2023
Accepted April 17, 2023

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to an optimal control problem with a terminal convex performance index and a perturbation of the initial data. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 41–53.