ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.977

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ, СВЯЗАННЫЕ С ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ В КАЧЕСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Г. Ченцов

Рассматриваются ультрафильтры (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств и их применение в качестве обобщенных элементов в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Исследуются конструкции погружения обычных решений — точек фиксированного множества — в пространство у/ф и представления “предельных” у/ф, реализующихся при использовании топологий волмэновского и стоуновского типов. Устанавливается структура множества притяжения при использовании ОАХ в виде непустого семейства множеств в пространстве обычных решений. Исследуются вопросы реализации с точностью до любой наперед выбранной окрестности упомянутых множеств притяжения в топологиях волмэновского и стоуновского типов. Рассматриваются некоторые аналоги упомянутых свойств для пространства максимальных сцепленных систем.

Ключевые слова: множество притяжения, ограничения асимптотического характера, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Some properties of ultrafilters related to their use as generalized elements.

Ultrafilters of widely understood measurable spaces and their application as generalized elements in abstract reachability problems with constraints of asymptotic nature are considered. Constructions for the embedding of conventional solutions, which are points of a fixed set, into the space of ultrafilters and representations of “limit” ultrafilters realized with topologies of the Wallman and Stone types are studied. The structure of the attraction set is established using constraints of asymptotic nature in the form of a nonempty family of sets in the space of ordinary solutions. The questions of implementation up to any preselected neighborhood of the attraction sets in the topologies of the Wallman and Stone types are studied. Some analogs of the mentioned properties are considered for the space of maximal linked systems.

Keywords: attraction set, constraints of asymptotic nature, ultrafilter.

MSC: 54A09, 54A10, 54B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-271-286

Введение

Рассматривается проблема соблюдения ограничений, задаваемых посредством семейства множеств в пространстве обычных решений; данные семейства могут, в частности, возникать при ослаблении стандартных ограничений в задачах теории управления и математического программирования (см. [1, гл. III; 2; 3]). В результате могут возникать скачкообразные изменения достигаемого качества. Примером этой ситуации является разрыв двойственности в задачах выпуклого программирования. Итак, “малому” ослаблению ограничений может отвечать скачкообразное улучшение достигаемого результата; в этих случаях результат, достигаемый в невозмущенной задаче, обычно не представляет интереса. В [1–3] рассматривались экстремальные задачи, но аналогичные явления возникают и в задачах о достижимости (см. [4; 5]), где возможны “скачки” области достижимости, являющейся важным объектом в теории управления. Система возмущенных условий образует при этом ограничения асимптотического характера (ОАХ); важно отметить, что ОАХ могут возникать и изначально, вне какой-либо связи со стандартными ограничениями (см. [6; 7]). В абстрактной задаче о достижимости предполагается заданным некоторый оператор “системы”, значения которого как раз и образуют тот или иной аналог области достижимости (ОД). Предел ОД, отвечающий либо ослабленным ограничениям, либо условиям, формирующим ОАХ, образует множество притяжения (МП), которое и может рассматриваться как асимптотический аналог ОД.

Для построения МП представляется целесообразным использовать конструкции расширения пространства обычных решений или управлений. Данные конструкции доставляют своеобразную компактификацию упомянутого пространства; возникает пространство обобщенных элементов (ОЭ), в которое, конечно, погружаются обычные решения. Соответствующие “скачки”, наблюдаемые обычно для ОД и их аналогов, имеют место и в пространстве ОЭ, которое представляется поэтому удобным объектом исследования в силу компактности, достигаемой при построении расширений (см., в частности, [8; 9]). В настоящей работе мы предпринимаем исследование в упомянутом направлении при условии, что ОЭ определяются в виде ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП). Такая постановка вопроса требует и определенных усилий в части изучения свойств самих у/ф. Предпринимая эти усилия, конечно, не достигаем решения какой-либо конкретной задачи; скорее здесь речь идет об изучении явления, связанного с построением МП в задачах о достижимости с ОАХ. В то же время конструкции, используемые для изучения данного явления, представляют интерес и при отказе от некоторых естественных для задач с ОАХ условий. В таких случаях используем более общее толкование, оговаривая это специально. Так, в частности, многие свойства, относящиеся к пространству у/ф, обладают аналогами в случае рассмотрения более общих объектов — максимальных сцепленных систем. Эти положения не связываются с вопросами достижимости при ОАХ и рассматриваются в заключительной части для иллюстрации вышеупомянутых аналогий.

1. Общие определения и обозначения

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу “по определению”. Принимаем аксиому выбора; *семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def их неупорядоченная пара: 1) $x \in \{x;y\}$; 2) $y \in \{x;y\}$; 3) $(x = z) \vee (y = z)$ при $z \in \{x;y\}$. Тогда объекту a сопоставляется синглетон $\{a\} \triangleq \{a;a\}$.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств (п/м) множества X. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из A в B; при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем, как обычно, значение f в точке a. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \triangleq \{f(x) \colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f.

В дальнейшем $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ есть вещественная прямая; $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ при $n \in \mathbb{N}$. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами. Если $\mathfrak{X}$ есть непустое семейство, то

$$\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Big\{ \bigcap_{i=1}^{m} X_i \colon (X_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathfrak{X}^m \Big\}; \tag{1.1}$$

здесь и ниже при $k \in \mathbb{N}$ используем $\mathfrak{X}^k$ вместо $\mathfrak{X}^{\overline{1,k}}$ для обозначения множества всех кортежей $(\tilde{X}_i)_{i \in \overline{1,k}}$ таких, что $\tilde{X}_j \in \mathfrak{X}$ при $j \in \overline{1,k}$ (используем индексную форму записи функций; см. [1, с. 11]). В (1.1) имеем семейство всех пересечений множеств непустых конечных подсемейств семейства $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \subset \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$; кроме того,

$$\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \colon \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X}) \Big\}$$

есть семейство объединений всевозможных подсемейств непустого семейства $\mathfrak{X}$, $\varnothing \in \{\cup\}(\mathfrak{X})$. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\, \mathbb{M} \setminus M : \ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Специальные семейства. Фиксируем до конца раздела множество I. В виде

$$\pi[I] \triangleq \{ \mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{L}) \,\&\, (I \in \mathcal{L}) \,\&\, (A \cap B \in \mathcal{L} \;\; \forall A \in \mathcal{L} \;\; \forall B \in \mathcal{L})\} \qquad (1.2)$$

имеем семейство всех π-систем (см. [10, с. 14]) п/м I с "нулем" и "единицей", а в виде

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{ \mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L} \;\; \forall x \in I \setminus L \;\; \exists \Lambda \in \mathcal{L} \colon (x \in \Lambda) \,\&\, (\Lambda \cap L = \varnothing)\} \qquad (1.3)$$

имеем семейство всех отделимых π-систем упомянутого типа. Если $\mathcal{L} \in \pi[I]$, то $(I, \mathcal{L})$ рассматриваем как широко понимаемое ИП; ниже перечисляются некоторые частные случаи π-систем из семейств (1.2), (1.3). Так, при $\mathcal{L} \in \pi[I]$, $A \in \mathcal{P}(E)$ и $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \triangleq \Big\{ (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \;\Big|\; \Big(A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i \Big) \,\&\, (L_p \cap L_q = \varnothing \;\; \forall p \in \overline{1,n} \;\; \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}) \Big\},$$

получая семейство всех $\mathcal{L}$-разбиений A "длины" n. Тогда

$$\Pi[I] \triangleq \{ \mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L} \;\; \exists n \in \mathbb{N} \colon \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\pi}^0[I]) \qquad (1.4)$$

есть семейство всех полуалгебр п/м I. В виде

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A} \;\; \forall A \in \mathcal{A}\} \qquad (1.5)$$

имеем семейство всех алгебр п/м I. Каждой полуалгебре $\mathcal{L} \in \Pi[I]$ сопоставляется алгебра $a_I^0(\mathcal{L}) \triangleq \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]$, порожденная полуалгеброй $\mathcal{L}$. В виде

$$(\mathrm{LAT})_0[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid A \cup B \in \mathcal{L} \;\; \forall A \in \mathcal{L} \;\; \forall B \in \mathcal{L}\} \qquad (1.6)$$

имеем семейство всех решеток п/м I с "нулем" и "единицей"; $(\mathrm{alg})[I] \subset (\mathrm{LAT})_0[I]$. Далее,

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \Big\{ \tau \in \pi[I] \;\Big|\; \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \;\; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \Big\} = \Big\{ \tau \in (\mathrm{LAT})_0[I] \;\Big|\; \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \;\; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \Big\} \quad (1.7)$$

есть семейство всех топологий на I; $(\mathrm{clos})[I] \triangleq \{ \mathbf{C}_I[\tau] \colon \tau \in (\mathrm{top})[I]\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[I])$ есть семейство всех замкнутых топологий на I (см. [11, с. 98]). В (1.3)–(1.7) имеем подсемейства (1.2). Таким образом, π-системы образуют очень общий класс измеримых структур; решетки (см. (1.6)) также образуют очень общий класс, но полуалгебры (см. (1.4)) решетками, вообще говоря, не являются.

Семейству $\mathcal{H}$ и множеству S сопоставляем семейство $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{ H \in \mathcal{H} \,|\, S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Непустому семейству $\mathcal{M}$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \triangleq \Big\{ \mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M}) \;\Big|\; \bigcap_{i=1}^{m} Z_i \neq \varnothing \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \forall (Z_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{Z}^m \Big\}$$

всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{M}$. Совсем кратко напомним некоторые понятия общей топологии.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, то (I, τ) называют *топологическим пространством* (ТП). При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $x \in I$ в виде $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ имеем семейство всех открытых окрестностей x;

$$N_\tau(x) \triangleq \{ H \in \mathcal{P}(X) \,|\, \exists G \in N_\tau^0(x) \colon G \subset H\}$$

есть фильтр (см. [12, гл. I]) окрестностей x. Известно (см. [12, гл. I, §1.2]), что

$$\tau = \{G \in \mathcal{P}(I) \mid G \in N_\tau(x) \;\; \forall x \in G\} \quad \forall \tau \in (\mathrm{top})[I].$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $A \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathbb{N}^0_\tau[A] \stackrel{\triangle}{=} [\tau](A)$ и

$$\mathbb{N}_\tau[A] \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in \mathbb{N}^0_\tau[A]\colon G \subset H\}$$

(введены τ-окрестности множества A). Ниже используются аксиомы отделимости (см. [13, разд. I.5]). Топологии $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ сопоставляется непустое семейство $\mathbf{C}_I[\tau]$ всех замкнутых в ТП (I,τ) п/м I; если $A \in \mathcal{P}(I)$, то $[\mathbf{C}_I[\tau]](A) \neq \varnothing$ и

$$\mathrm{cl}(A,\tau) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I \mid A \cap H \neq \varnothing \ \ \forall H \in N_\tau(x)\}$$
$$= \{x \in I \mid A \cap G \neq \varnothing \ \ \forall G \in N^0_\tau(x)\} = \bigcap_{F \in [\mathbf{C}_I[\tau]](A)} F \in [\mathbf{C}_I[\tau]](A)$$

есть замыкание A в ТП (I,τ). Семейству $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{COV})[I \mid \mathcal{Y}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y}) \,\Big|\, I = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z\Big\}$$

всех покрытий I множествами из $\mathcal{Y}$. Тогда

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[I \mid \tau] \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \exists (G_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{G}^n\colon I = \bigcup_{i=1}^n G_i\Big\}$$
$$= \Big\{\tau \in (\mathrm{top})[I] \,\Big|\, \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_I[\tau]]\Big\}$$

есть семейство всех топологий, превращающих I в компактное ТП; компактное T_2-пространство называют *компактом* (см. [14]). Пусть семейство $(\mathrm{BAS})[I]$ всех открытых баз топологий на I определяется посредством [15, (1.9)] (при этом в [15, (1.9)] следует полагать $\mathbf{I} = I$). Легко видеть, что

$$\pi[I] \subset (\mathrm{BAS})[I]. \tag{1.8}$$

2. Ультрафильтры на π-системах

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда в виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}) \mid (\, A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F}) \,\&\, ([\mathcal{L}](F) \subset \mathcal{F} \ \ \forall F \in \mathcal{F})\} \tag{2.1}$$

имеем множество всех фильтров на (широко понимаемом) ИП $(E,\mathcal{L})$. При $x \in E$

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{\, L \in \mathcal{L} \,|\, x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}); \tag{2.2}$$

определен тривиальный фильтр на $(E,\mathcal{L})$, соответствующий точке x. Кроме того (см. (2.1)), $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Далее (см. [15, (2.2)]), в виде

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}$$
$$= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\}$$
$$= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\} \tag{2.3}$$

имеем множество всех у/ф на $(E,\mathcal{L})$; последнее в (2.3) выражение говорит о том, что данные у/ф суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они. С учетом [15, (2.4)] имеем, что $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Отметим, что (см. [15, (2.5)]) при $L \in \mathcal{L}$

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})). \tag{2.4}$$

Легко видеть, что (см. [15, (2.6)]) справедливо свойство

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\ \Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]; \tag{2.5}$$

в силу (1.8) $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, а потому определена топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \overset{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G}\ \ \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{2.6}$$

стоуновского типа, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Получили ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\ \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.7}$$

стоуновского типа. Напомним, что (см. [15, с. 90]) в виде (2.7) реализуется нульмерное (см. [13, 6.2]) T_2-пространство. В связи со свойством нульмерности заметим, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]; \tag{2.8}$$

если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (2.7) — нульмерный компакт, а (2.8) превращается в равенство (заметим, что при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ ТП (2.7) также является компактом). Другое (волмэновское) оснащение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ связываем с множествами

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

При этом $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)$ при $L \in \mathcal{L}$. Тогда

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C]\colon C \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]]$$

есть замкнутая база ТП (2.7) и вместе с тем открытая предбаза следующей топологии волмэновского типа:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{2.9}$$

Заметим, что в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle) \tag{2.10}$$

всегда реализуется компактное T_1-пространство (см. [16, с. 80]). Наконец, отметим, что (см. [16, (2.10)])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{2.11}$$

С учетом (2.6), (2.9), (2.11) получаем теперь в виде триплета

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.12}$$

битопологическое пространство (БТП) (определяем БТП как множество в оснащении парой сравнимых топологий); в связи с (2.10) напомним, что $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. В связи с последующими построениями полагаем, что

$$\big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}\ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})\big)$$

$$\&\ \big(\hat{\mathbf{F}}_0^*[\mathcal{L} \mid \widetilde{\mathcal{E}}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}\ \ \forall \widetilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))\big). \tag{2.13}$$

Полагаем, кроме того, что $\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}$ при $A \in \mathcal{P}(E)$. Тогда для множеств (2.13) получаем очевидные представления в терминах пересечений

$$\Big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)\ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})\Big)\ \&\ \Big(\hat{\mathbf{F}}_0^*[\mathcal{L} \mid \widetilde{\mathcal{E}}] = \bigcap_{\Sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}} \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid \Sigma]\ \ \forall \widetilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))\Big). \tag{2.14}$$

Легко видеть (см. (2.4)), что $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid L]$ при $L \in \mathcal{L}$. На этой основе устанавливается, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \hat{\mathbf{F}}_0^*[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Предложение 1. *Если* $A \in \mathcal{P}(E)$, *то множество* $\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A]$ *замкнуто в ТП* (2.7):

$$\mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A] \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \mathcal{P}(E)$. Выберем произвольно

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A]. \tag{2.16}$$

Тогда $A \cap V = \varnothing$ для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$. Рассмотрим множество $\Phi_{\mathcal{L}}(V) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$. Пусть $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(V)$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и согласно (2.4) $V \in \mathcal{W}$. Поэтому $\exists U \in \mathcal{W}\colon A \cap U = \varnothing$. Последнее означает, что

$$\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A].$$

Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A]$. Коль скоро (см. (2.16)) и $\mathcal{V}$ выбиралось произвольно, имеем

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A] \;\; \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A].$$

С учетом (2.6) получаем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}_0^*[\mathcal{L} \mid A] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$, откуда вытекает (2.15). □

Из (2.14) и предложения 1 получаем, что

$$\hat{\mathbf{F}}_0^*[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{2.17}$$

В связи с (2.17) отметим (см. (2.8), (2.14)), что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]$ при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$.

3. Множества притяжения (общие сведения)

Фиксируем непустое множество E. В настоящем разделе возвращаемся к абстрактным задачам о достижимости с ОАХ. Будем использовать МП, определяемые в [17, замечание 2]. В этой связи полагаем, что

$$\beta[E] \overset{\triangle}{=} \{\, \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \,|\, \forall B_1 \in \mathcal{B} \;\; \forall B_2 \in \mathcal{B} \;\; \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\}, \tag{3.1}$$

получая семейство всех направленных подсемейств $\mathcal{P}(E)$ (элементы E используем далее в качестве обычных решений). Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \in \beta[E]$. В настоящем изложении полагаем, что для всяких ТП (Y,τ), $Y \neq \varnothing$, $f \in Y^E$ и $\mathcal{B} \in \beta[E]$

$$(\mathrm{AS})[E;Y;\tau;f;\mathcal{B}] \overset{\triangle}{=} \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{cl}(f^1(B),\tau). \tag{3.2}$$

Если же (Y,τ), $Y \neq \varnothing$, есть ТП, $f \in Y^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то (см. (3.1); [18, (2.4)]) полагаем, что

$$(\mathrm{as})[E;Y;\tau;f;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} (\mathrm{AS})[E;Y;\tau;f;\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})], \tag{3.3}$$

получая п/м Y. Данное определение (см. (3.2), (3.3)) эквивалентно приведенному в [17, замечание 2]. Можно в качестве (Y,τ) использовать в (3.2), (3.3) ТП (2.7) и (2.10); важно, однако, правильно определить f. В этой связи напомним [18, (1.3)]. С учетом этого полагаем в настоящем разделе, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$; тогда (см. (2.2); [18, (1.3)]) $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ $\forall x \in E$. С учетом этого получаем

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot] \overset{\triangle}{=} ((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E. \tag{3.4}$$

При $A \in \mathcal{P}(E)$ имеем

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Воспользуемся конструкциями [15, § 7]. Прежде всего напомним (см. [15, предложение 7.1]): если $L \in \mathcal{L}$, то

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) = \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \qquad (3.5)$$

(как следствие $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(E)$ всюду плотно в каждом из ТП (2.7), (2.10); см. [15, (7.5)]). Далее, имеем [15, (7.7)] и как следствие (см. [15, теорема 7.1]

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]$$
$$= (\mathrm{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \qquad (3.6)$$

(в обосновании [15, теорема 7.1] важную роль играет свойство (3.5)). Итак, первое в (2.13) множество является универсальным (относительно топологий, порождающих БТП (2.12)) МП; изучение его свойств представляет интерес (см. также [18, (5.4)]).

4. Вопросы реализации множества допустимых обобщенных элементов, 1

В настоящем разделе для общего случая $\mathcal{L} \in \pi[E]$ рассматриваются вопросы, связанные с реализацией и свойствами множеств $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Имея в виду толкование $(E, \mathcal{L})$ как ИП, логично говорить здесь об ОАХ со свойством $\mathcal{L}$-измеримости (строго говоря, такое толкование законно при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$). Заметим, что в качестве $\mathcal{E}$ может, в частности, использоваться фильтр. В этой связи при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ введем

$$(\mathcal{F} - \mathrm{set})[E; \mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid L \cap F \neq \varnothing \ \ \forall F \in \mathcal{F}\}; \qquad (4.1)$$

ясно, что $\mathcal{F} \subset (\mathcal{F} - \mathrm{set})[E; \mathcal{L}]$; с другой стороны, $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ (см. [16, с. 80]), а потому определено множество

$$\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})} \mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Предложение 2. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathcal{F} - \mathrm{set})[E; \mathcal{L}] = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})} \mathcal{U}. \qquad (4.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и полагаем, что

$$(\Omega_1 \overset{\triangle}{=} (\mathcal{F} - \mathrm{set})[E; \mathcal{L}]) \,\&\, \Big(\Omega_2 \overset{\triangle}{=} \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})} \mathcal{U}\Big). \qquad (4.3)$$

Выберем произвольно $M \in \Omega_1$. Тогда согласно (4.1) $M \in \mathcal{L}$ и при этом

$$M \cap F \neq \varnothing \quad \forall F \in \mathcal{F}. \qquad (4.4)$$

В силу (4.4) имеем для некоторого $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, что $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ и $M \in \widetilde{\mathcal{F}}$ (см. [19, (5.6)]). С учетом [15, (2.4)] получаем далее для некоторого у/ф $\widetilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ вложение $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$. Тогда $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{U}}$, а потому $\widetilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$. С другой стороны, $M \in \widetilde{\mathcal{U}}$. В итоге $M \in \Omega_2$, чем и завершается проверка вложения $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Пусть $N \in \Omega_2$. С учетом (4.3) подберем $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$, для которого $N \in \mathcal{V}$. При этом $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$; имеем тогда (см. (2.1), (2.2)), что $N \cap V \neq \varnothing$ при $V \in \mathcal{V}$. Как следствие, $N \cap F \neq \varnothing$ $\forall F \in \mathcal{F}$. Иными словами (см. (4.1)), $N \in (\mathcal{F} - \mathrm{set})[E; \mathcal{L}]$, т. е. $N \in \Omega_1$. Итак, $\Omega_2 \subset \Omega_1$ и как следствие $\Omega_1 = \Omega_2$; с учетом (4.3) получаем (4.2). □

Заметим, что в силу (2.3), (2.4) $\Phi_{\mathcal{L}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{L}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(B)$ при $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$. По индукции получаем, что при $m \in \mathbb{N}$ и $(L_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{L}^m$

$$\bigcap_{i=1}^{m} L_i \in \mathcal{L} \colon \Phi_{\mathcal{L}}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} L_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{m} \Phi_{\mathcal{L}}(L_i). \qquad (4.5)$$

Предложение 3. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$, *то непременно*

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}\Big(\bigcap_{i=1}^m \Sigma_i\Big) \subset \mathbb{G}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о использует (2.14), (4.5), компактность ТП (2.10) и сводится к применению [13, следствие 3.1.5]. Учитываем также то, что семейство (2.5) есть замкнутая предбаза ТП (2.10). □

Введем в рассмотрение базы фильтров (БФ) ИП $(Eh, \mathcal{L})$, полагая, что

$$\beta^0_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{B})\,\&\,(\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2)\}; \tag{4.6}$$

тогда $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$. Рассуждением по индукции устанавливается с учетом (4.6), что

$$\forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E] \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall (B_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{B}^m \quad \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset \bigcap_{i=1}^m B_i. \tag{4.7}$$

Посредством БФ легко конструируются фильтры: если $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$, то (см. [20, (3.3)])

$$(E-\mathrm{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}).$$

Предложение 4. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B})]$, *то*

$$\exists B \in \mathcal{B}\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(B) \subset \mathbb{G}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к непосредственной комбинации (4.7) и предложения 3. Существо предложения 4 состоит в установлении возможности реализации $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B})$ с точностью до произвольной окрестности в ТП (2.10). □

В связи с предложением 2 заметим, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E-\mathrm{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]) \quad \forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E].$$

Вышеупомянутые положения касались общих вопросов окрестностной реализации множеств $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, с точностью до любой окрестности в топологии волмэновского типа; при этом предполагалось только, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Семейство $\mathcal{E}$, порождающее ОАХ, при этом полагалось состоящим из измеримых (в широком смысле) множеств. В случае, когда последнее условие не выполнено, мы рассмотрим вопросы аналогичной реализации в ТП (2.7), накладывая, однако, дополнительное условие на $\mathcal{L}$.

Итак, полагаем до конца раздела, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда (см. [17, предложение 1]) имеем при $A \in \mathcal{P}(E)$, что

$$\mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid A] = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]). \tag{4.8}$$

Предложение 5. *Если* $\mathcal{E} \in \beta[E]$, *то*

$$(\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] = \hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \beta[E]$. Тогда согласно (3.2) и (4.8) имеем цепочку равенств

$$(\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \Sigma].$$

С учетом (2.14) получаем требуемое равенство. □

Следствие 1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то*

$$(\mathrm{as})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] = \hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к комбинации (3.3) и предложения 5. □

Итак, получено общее представление МП в пространстве ОЭ без предположения об $\mathcal{L}$-измеримости множеств семейства, порождающего ОАХ.

5. Вопросы реализации множества допустимых обобщенных элементов, 2

В настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$; таким образом, здесь $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй множеств (разумеется, в качестве $\mathcal{L}$ может использоваться алгебра или σ-алгебра множеств). Тогда ТП (2.7) является непустым компактом (см. [20, разд. 4]); в частности,

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{5.1}$$

В связи с (2.11) отметим следующее простое свойство.

Предложение 6. *Если* (2.10) *есть T_2-пространство, то* $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (2.10) является T_2-пространством. Тогда в силу (2.11), (5.1) и [13, следствие 3.1.14] получаем требуемое равенство топологий. □

В связи с предложением 6 напомним [15, (5.16)–(5.18)], где вопросы совпадения топологий исследовались в связи с аналогичным свойством для пространства максимальных сцепленных систем.

Предложение 7. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}]]$, *то*

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists (\Sigma_j)_{j\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\colon \hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] \subset \bigcap_{j=1}^{m} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \Sigma_j] \subset \mathbb{G}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}]]$. С учетом предложения 1, (5.1) и [13, следствие 3.1.5] получаем для семейства

$$\kappa \triangleq \{\mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \Sigma]\colon \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]) \tag{5.2}$$

следующее положение, а именно:

$$\forall G \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}\Big(\bigcap_{X\in\kappa} X\Big) \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists (X_j)_{j\in\overline{1,m}} \in \kappa^m\colon \bigcap_{j=1}^{m} X_j \subset G. \tag{5.3}$$

Вместе с тем согласно (2.14) и (5.2) имеем цепочку равенств

$$\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \Sigma] = \bigcap_{X\in\kappa} X, \tag{5.4}$$

а тогда по выбору $\mathbb{G}$ получаем в силу (5.3), (5.4) для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(\Lambda_j)_{j\in\overline{1,n}} \in \kappa^n$ свойство

$$\bigcap_{j=1}^{n} \Lambda_j \subset \mathbb{G}. \tag{5.5}$$

Используя (5.2), подбираем $(M_j)_{j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{E}^n$ со свойством $\Lambda_j = \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid M_j] \ \forall j \in \overline{1,n}$. С учетом (5.5) получаем, конечно, вложение $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid M_j] \subset \mathbb{G}$. В силу (5.2) и (5.4) имеем при этом, что $\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] \subset \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid M_j] \ \forall j \in \overline{1,n}$. В итоге

$$\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{E}] \subset \bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid M_j] \subset \mathbb{G}.$$ □

Наряду с (3.1) будем использовать БФ на множестве E, полагая

$$\beta^0[E] \triangleq \big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid (\varnothing \notin \mathcal{B})\,\&\,(\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2)\big\} = \beta^0_{\mathcal{P}(E)}[E].$$

Предложение 8. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0[E]$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{B}]]$, *то*

$$\exists B \in \mathcal{B}\colon \hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{B}] \subset \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid B] \subset \mathbb{G}. \tag{5.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{B} \in \beta^0[E]$ и $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{B}]]$. С учетом предложения 7 подберем $n \in \mathbb{N}$ и $(B_j)_{j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{B}^n$, для которых

$$\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{B}] \subset \bigcap_{j=1}^{n} \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid B_j] \subset \mathbb{G}.$$

Далее, по аналогии с (4.7) имеем, что для некоторого $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$ $\mathbb{B} \subset \bigcap\limits_{j=1}^{n} B_j$. Тогда получаем, что $\mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathbb{B}] \subset \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid B_j]$ $\forall j \in \overline{1,n}$. Поэтому $\mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathbb{B}] \subset \mathbb{G}$. С другой стороны, в силу (2.14) имеем вложение

$$\hat{\mathbf{F}}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathcal{B}] \subset \mathbf{F}^*_0[\mathcal{L} \mid \mathbb{B}],$$

чем и завершается проверка (5.6). □

Предложение 9. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$, *то*

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists (\Sigma_j)_{j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{E}^n\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \Sigma_j\Big) \subset \mathbb{G}.$$

Данное предложение аналогично предложению 3 и использует (5.1) вместо аналогичного свойства топологии $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$.

Предложение 10. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B})]$, *то*

$$\exists B \in \mathcal{B}\colon \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(B) \subset \mathbb{G}.$$

Предложение 10 подобно предложению 4 и устанавливается аналогичным способом. Напомним, что множества (2.13) могут рассматриваться, конечно, в качестве МП в пространстве ОЭ в случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (см. (3.5), (3.6)), но мы все же исследуем вопросы реализации этих множеств в более общем случае произвольной π-системы, что может быть полезным с точки зрения изучения общей структуры БТП (2.12). В следующем разделе отметим совсем кратко и некоторые аналоги для максимальных сцепленных систем (МСС).

6. Максимальные сцепленные системы

В настоящем разделе рассмотрим вопросы распространения некоторых положений предыдущих разделов на случай МСС произвольной π-системы. Будем следовать при этом построениям [15; 16] (в связи с изучением пространств МСС на семействах замкнутых множеств в ТП отметим работы [21–23], где, в частности, исследовались важные понятия суперкомпактности и суперрасширения; отметим также систематическое изложение в [24, гл. VII, § 4]). В настоящем исследовании ограничиваемся некоторыми аналогиями положений, установленных ранее для случая у/ф.

Полагаем в дальнейшем, если не оговорено противное, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$; итак, рассматривается общий случай широко понимаемого ИП (получаемые далее свойства не связываем с проблемой достижимости при наличии ОАХ). В виде

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\}$$

имеем множество всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$. При этом $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. Обобщая (4.1), введем при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\};$$

при $\mathcal{E} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ имеем $(\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}] = (\mathcal{E} - \mathrm{set})[E; \mathcal{L}]$. При $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ непременно $E \in (\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \subset (\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}]$; кроме того, $\mathcal{E} \cup \{L\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ при $L \in (\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}]$. В виде

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Rightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\}$$

имеем (непустое; см. [15; 16]) множество всех МСС π-системы $\mathcal{L}$. При этом $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. По аналогии с (2.13) полагаем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{H}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{E}\} \quad \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{6.1}$$

Кроме того, следуя [15; 16], введем при $L \in \mathcal{L}$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E \mid L] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\}.$$

Ясно, что при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ (6.1) есть пересечение всех множеств $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E \mid L]$, $L \in \mathcal{H}$. Легко видеть, что (см. [15, (5.4)])

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{H}] \neq \varnothing \quad \forall \mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E].$$

Отметим, что при $\mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ определено объединение всех МСС $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{H}]$.

Предложение 11. *Если $\mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, то справедливо равенство*

$$(\mathcal{H} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}] = \bigcup_{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0^*[E|\mathcal{H}]} \mathcal{E}.$$

Доказательство подобно обоснованию предложения 2. □

Заметим, что при $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ справедливо равенство $(\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}] = \mathcal{E}$ (см. в этой связи [15, (5.3)]). Более того, легко видеть, что справедливо свойство: если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, то

$$(\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]) \Leftrightarrow ((\mathcal{E} - \mathrm{Set})[E; \mathcal{L}] = \mathcal{E}).$$

Введем в рассмотрение топологию волмэновского типа на множестве МСС. Напомним, что (см. [15, § 5]) топология $\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{L}\rangle \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$ порождает суперкомпактное (см. [21–23], а также [24, гл. VII, § 4]) ТП

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{L}\rangle); \tag{6.2}$$

в частности, $\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{L}\rangle \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а ТП (6.2) компактно. Семейство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E \mid L] \colon L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])) \tag{6.3}$$

является замкнутой предбазой ТП (6.2) (см. [15, (5.6), (5.8)]).

Предложение 12. *Если $L \in \mathcal{L}$, то множество* (6.1) *замкнуто в ТП* (6.2):

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E \mid L] \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{L}\rangle].$$

Доказательство является простым следствием свойства замкнутой предбазы для семейства (6.3), поскольку $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E \mid L] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ при $L \in \mathcal{L}$. □

Как следствие отметим, что при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ множество (6.1) замкнуто:

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{H}] \in \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{L}\rangle].$$

Предложение 13. *Если* $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{H}])$, *то*

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists (H_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{H}^m\colon \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{H}] \subset \bigcap_{i=1}^{m}\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E \mid H_i] \subset \mathbb{G}.$$

Схема доказательства аналогична обоснованию предложения 7. □

Предложение 14. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$ *и* $\mathbb{G} \in \mathbb{N}^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{B}])$, *то*

$$\exists B \in \mathcal{B}\colon \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0^*[E \mid \mathcal{B}] \subset \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E \mid B] \subset \mathbb{G}.$$

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (4.7) и предложения 13. □

7. Добавление

В настоящем разделе отметим некоторые положения, подобные (2.5) и имеющие смысл сохранения некоторых свойств типа измеримости при переходе от исходного ИП к пространству у/ф. Так, в дополнение к (2.5) напомним некоторые положения [19, § 6], касающиеся случая $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$ и использующие свойство [19, (6.5)]:

$$\Phi_{\mathcal{L}}(A \cup B) = \Phi_{\mathcal{L}}(A) \cup \Phi_{\mathcal{L}}(B) \quad \forall A \in \mathcal{L} \quad \forall B \in \mathcal{L};$$

итак, отметим следующее положение, имеющее место в данном случае:

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{7.1}$$

Следовательно, в упомянутом случае (2.5) усиливается. Здесь же напомним [19, (9.6), (9.7)]: при $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]] \in (\mathrm{alg})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]; \tag{7.2}$$

в виде $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}])$ реализуется ИП с алгеброй множеств — пространство стоуновского представления (см. [25, с. 26]).

Предложение 15. *Если* $\mathcal{L} \in \pi[E]$, *то* π-*система* $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ *отделима*:

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in \tilde{\pi}^0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{7.3}$$

Доказательство. Учитываем (2.5). Пусть $\Omega \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, тогда для некоторого множества $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$ имеем, что $\Omega = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$. Выберем произвольно $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Omega$, получая при этом свойство $\mathbb{L} \notin \mathcal{U}$. С учетом [15, теорема 2.1] для некоторого множества $\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L})$

$$E \setminus \Lambda \in \mathcal{U}.$$

Тогда $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и $\mathbb{L} \subset \Lambda$. Поэтому для некоторого множества $M \in \mathcal{L}$ имеем равенство $\Lambda = E \setminus M$, а потому $M \cap \mathbb{L} = \varnothing$. При этом $M = E \setminus \Lambda \in \mathcal{U}$, а потому (см. (2.4)) $\mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(M)$, где

$$\Phi_{\mathcal{L}}(M) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\colon \Phi_{\mathcal{L}}(M) \cap \Omega = \varnothing$$

(действительно, $\Phi_{\mathcal{L}}(M) \cap \Omega = \Phi_{\mathcal{L}}(M \cap \mathbb{L}) = \Phi_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \varnothing$). Итак, установлено (поскольку Ω и $\mathcal{U}$ выбирались произвольно), что

$$\forall \mathbf{L} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \quad \forall \mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{L} \quad \exists \mathbf{M} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \colon (\mathfrak{U} \in \mathbf{M}) \,\&\, (\mathbf{M} \cap \mathbf{L} = \varnothing).$$

С учетом (1.3) и (2.5) получаем (7.3). $\square$

В связи с предложением 15 напомним связанное с (3.4) свойство максимальности тривиальных фильтров на ИП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}])$.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (рассматриваем далее случай отделимой π-системы $\mathcal{L}$).

Предложение 16. *Истинна импликация*

$$((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]) \Rightarrow (\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]). \tag{7.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (7.4), т. е.

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})].$$

Тогда (см. (1.6)) $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и при этом

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \quad \forall \mathbb{A} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \quad \forall \mathbb{B} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]. \tag{7.5}$$

Выберем произвольно множества $S \in \mathcal{L}$ и $T \in \mathcal{L}$. Тогда (см. (2.5)) $\mathbb{S} \overset{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{L}}(S) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ и $\mathbb{T} \overset{\triangle}{=} \Phi_{\mathcal{L}}(T) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$. В силу (7.5) $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, а потому согласно (2.5) имеем цепочку равенств

$$\Phi_{\mathcal{L}}(S) \cup \Phi_{\mathcal{L}}(T) = \mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda), \tag{7.6}$$

где $\Lambda \in \mathcal{L}$. Сравним множества $S \cup T$ и Λ. Пусть $x_* \in \Lambda$. Тогда $\Lambda \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*]$ (см. (2.2)) и как следствие $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda)$ (учитываем свойство отделимости π-системы $\mathcal{L}$). В силу (7.6)

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \Phi_{\mathcal{L}}(S) \cup \Phi_{\mathcal{L}}(T).$$

Тогда согласно (2.4) имеем, что

$$(S \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*]) \vee (T \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*]).$$

С учетом (2.2) имеем теперь следующее свойство: $(x_* \in S) \vee (x_* \in T)$. В итоге $x_* \in S \cup T$, чем завершается проверка вложения $\Lambda \subset S \cup T$.

Пусть теперь $x^* \in S \cup T$. Тогда в силу (1.2)

$$(S \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x^*]) \vee (T \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x^*]).$$

Как следствие имеем с учетом (2.4), что

$$((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x^*] \in \Phi_{\mathcal{L}}(S)) \vee ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x^*] \in \Phi_{\mathcal{L}}(T)).$$

В силу (7.6) получаем теперь, что $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x^*] \in \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda)$, а тогда $\Lambda \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x^*]$ согласно (2.4). С учетом (2.2) имеем включение $x^* \in \Lambda$. Итак, установлено, что $S \cup T \subset \Lambda$, а потому $\Lambda = S \cup T$, так как ранее было доказано противоположное вложение. В итоге $S \cup T \in \mathcal{L}$. Поскольку S и T выбирались произвольно, установлено, что $A \cup B \in \mathcal{L}$ $\forall A \in \mathcal{L}$ $\forall B \in \mathcal{L}$. Тогда в силу (1.6) имеем требуемое включение $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$. $\square$

Итак, с учетом (7.1) и предложения 16 имеем (в классе отделимых π-систем) следующую эквивалентность:

$$(\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]) \Leftrightarrow ((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]).$$

Предложение 17. *Если* $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{alg})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, *то* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству предложения 16. □

Ввиду (7.2) получаем, что (в классе отделимых π-систем)

$$(\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]) \Leftrightarrow ((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{alg})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]).$$

Предложение 18. *Если* $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]$, *то* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ совпадает с $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]$; последнее есть алгебра открыто-замкнутых множеств, отвечающая ТП (2.7). Используя предложение 17, получаем требуемое утверждение. □

Итак (см. (7.2)), в классе отделимых π-систем

$$(\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]) \Leftrightarrow ((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление диффференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 620 с.
2. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
3. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Панасюк А.И., Панасюк В.И.** Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.
6. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П.** Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИРАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
7. **Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И.** Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2016. Т. 47, № 1 (47). С. 54–118.
8. **Ченцов А.Г.** Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 294–309.
9. **Chentsov A.G., Pytkeev E.G.** Constraints of asymptotic nature and attainability problems // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2019. Vol. 29, no. 4. P. 569–582. doi: 10.20537/vm190408
10. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
11. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал, УРСС, 2004. 368 с.
12. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
13. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
14. **Архангельский А.В.** Компактность // Общая топология-2. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 50. С. 5–128.
15. **Ченцов А.Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2018. Т. 52, № 1. С. 86–102. doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-07
16. **Ченцов А.Г.** О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2019. Т. 54, № 1. С. 74–101.
17. **Ченцов А.Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2014, № 1. С. 87–101.
18. **Ченцов А.Г.** К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2015. Т. 25, № 2. С. 212–229.
19. **Ченцов А.Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2011. № 1. С. 113–142.

20. **Ченцов А.Г.** Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. № 3. 2012. С. 85–102.
21. **de Groot J.** Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
22. **van Mill J.** Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. Math. Center Tract., vol. 85. 238 p.
23. **Strok M., Szymanski A.** Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. Vol. 89, no. 1. P. 81–91.
24. **Федорчук В.В., Филиппов В.В.** Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
25. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 310 с.

Поступила 01.12.2022

После доработки 18.01.2023

Принята к публикации 23.01.2023

Ченцов Александр Георгиевич

д-р физ.-мат. наук

чл.-корр. РАН, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

профессор

Уральский федеральный университет

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* NY: Acad. Press, 1972, 531 p. ISBN: 0127351507 . Translated to Russian under the title Optimal’noe upravlenie differentsial’nymi i funktsional’nymi uravneniyami, Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
2. Duffin R.J. *Infinite programs.* In: H. W. Kuhn, A. W;Tucker (eds.), Linear Inequalities and Related Systems, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956, pp. 157–170.
3. Golshtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematical programming and its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 352 p.
4. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
5. Panasyuk A.I. and Panasyuk V.I. *Asimptoticheskaya magistral’naya optimizatsiya upravlyaemykh sistem* [Asymptotic Turnpike Optimization of the Controlled Systems], Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1986, 296 p.
6. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 279–298. doi: 10.1134/S0081543815080222
7. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. A problem of attainability with constraints of asymptotic nature. *Izv. IMI UdGU*, 2016, no. 1 (47), pp. 54–118 (in Russian).
8. Chentsov A.G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. S102–S118. doi: 10.1134/S0081543817020109
9. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Constraints of asymptotic nature and attainability problems. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki.*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 569–582. doi: 10.20537/vm190408
10. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
11. Alexandroff P.S. *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie* [Introduction to set theory and to general topology]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984, 336 p. Original Russian text published in Aleksandrov P.S. Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu. Moscow: Editorial URSS, 2005, 402 p.

12. Bourbaki N. *Eléments de mathématique, Fascicule* II*, Livre* III*, Topologie générale, Chapitre* 1*, Structures topologiques, Chapitre* 2*, structures uniformes*, Paris: Hermann, 1965, 255 p. ISBN(1971 ed.):3-540-33936-1. Translated to Russian under the title Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury, Moscow, Nauka Publ., 1968, 272 p.
13. Engelking R. *General topology.* Warsaw, PWN/Polish Scientific Publishers, 1977. ISBN: 0800202090. Translated to Russian under the title Obshchaya topologiya, Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
14. Arkhangel'skii A.V. Compactness. General topology II. Encycl. Math. Sci., 1996, vol. 50, pp. 1–117.
15. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions. *Izv. IMI UdGU*, 2018, vol. 52, no. 1pp. 86–102 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-07
16. Chentsov A.G. On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type. *Izv. IMI UdGU*, 2019, vol. 54, no. 1, pp. 74–101 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2019-54-07
17. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).
18. Chentsov A.G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 212–229 (in Russian).
19. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).
20. Chentsov A.G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 85–102. (in Russian).
21. de Groot J. Superextensions and supercompactness. In: Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
22. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces.* Amsterdam. Math. Center Tracts, no. 85, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p. ISBN: 90-6196-151-3
23. Strok M, Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91
24. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii [General topology: Basic constructions]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. ISBN: 5-9221-0618-X .
25. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965, 231 p. Translated to Russian under the title Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei, Moscow: Mir Publ., 1969, 310 p.

Received December 1, 2022
Revised January 18, 2023
Accepted January 23, 2023

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov. Some properties of ultrafilters related to their use as generalized elements. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 271–286.