ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.958: 533.7

К ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕД[1]

С. В. Хабиров

Групповой анализ для дифференциальных уравнений идеальной газовой динамики развит в наибольшей мере. Уравнения состояния для термодинамических параметров предполагались не зависящими от времени. Временная зависимость может получится для релаксирующих сред, например, в результате реологии или в силу энергетического усреднения процессов в многофазной среде. Ставится задача группового анализа релаксирующих сред. Сначала вычисляются преобразования эквивалентности изменяющие только уравнения состояния. Далее решается задача групповой классификации: с точностью до преобразований эквивалентности найти классы уравнений состояния, для которых допускаемая группа расширяется. Здесь решается часть поставленной задачи.

Ключевые слова: газодинамика, релаксирующие уравнения состояния, преобразования эквивалентности, групповая классификация.

S. V. Khabirov. On the group classification of ideal gas-dynamic relaxing media.

The group analysis of differential equations of ideal gas dynamics is most developed. The state equations for thermodynamic parameters were assumed to be time-independent. The time dependence may take place for relaxing media, for example, as a result of rheology or due to the energy averaging of processes in a multiphase medium. The problem of group analysis of relaxing media is posed. First, equivalence transformations are calculated that change only the state equations. Next, the problem of group classification is solved: it is required to find, up to equivalence transformations, classes of state equations for which the admitted group is expanded. This problem is partially solved in the present paper.

Keywords: gas dynamics, relaxing state equations, equivalence transformations, group classification.

MSC: 76N15, 76M60

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-260-270

Введение

Групповой анализ системы дифференциальных уравнений, например, идеальной газовой динамики [1], состоит из нескольких задач. Основные задачи заключаются в следующем.

- Вычислить группу преобразований, не изменяющих уравнения.
- Для уравнений с произвольным элементом (уравнение состояния в газовой динамике) вычислить преобразования эквивалентности, не меняющих вид системы, но изменяющих лишь произвольный элемент.
- Перечислить классы произвольных элементов с точностью до преобразований эквивалентности, для которых допускаемая группа расширяется (групповая классификация).
- Изучить структуру алгебры Ли допускаемой группы: с точностью до группы внутренних автоморфизмов пречислить все подалгебры (оптимальная система), составить граф вложенных подалгебр. Для основной алгебры Ли газовой динамики граф построен в работе [2].
- Расслоить систему на классы подобных решений относительно допускаемой подалгебры большой размерности (автоморфная система) и уравнений для представителей классов (разрешающая система) [3, гл. 7].

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания номер 0246-2019-0052.

- Построить базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования для каждой подалгебры из оптимальной системы [4].
- Построить подмодели и точные решения для подалгебр из оптимальной системы, которые вложены друг в друга согласна графа вложенных подалгебр [5]. Подмодели подразделяются на три типа. Инвариантные подмодели на подалгебрах малой размерности, когда из инвариантов нулевого порядка (точечные инварианты не содержат производных) определяются все функции. Частично инвариантные решения, когда из точечных инвариантов не определяются все функции. Дифференциально инвариантные подмодели, когда некоторые дифференциальные инварианты базиса назначаются новыми функциями других [6].
- Найти все законы сохранения для модели, для подмоделей и интегралы подмоделей [7;8].
- Провести групповой анализ подмоделей с произвольными элементами интегралов. Определить дифференциальные подстановки и преобразования Беклунда подмоделей [9; 10].
- Изучить движения для точных групповых решений, провести сопряжение решений через слабые и сильные разрывы. Доказать критерии инвариантности и частичной инвариантности краевых задач [11–14].
- Для модели и для подмоделей ввести малый групповой параметр и обосновать асимптотическое разложение по малому параметру. Если малый параметр введен, то вычислить приближенные симметрии [15].
- Построить инвариантные уравнения и инвариантные отображения (конкомитанты) по заданной группе. Конкомитанты определяют интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений по известной допускаемой группе симметрий.

Существуют различные алгоритмы решения основных задач группового анализа. При решении этих задач используются результаты групповой классификации.

Обобщение классической газовой динамики дает уравнение состояния, зависящее от времени в силу реологии [16] или в результате энергетического усреднения физико-химических процессов в элементарном объеме многофазной среды [17]. Задача групповой классификации для уравнений газовой динамики с релаксирующим уравнением состояния не тривиальна. Произвольный элемент зависит от независимой переменной — времени. Это приводит к бесконечной группе преобразований эквивалентности. Групповая классификация сводится к изучению совместности двух дифференциальных уравнений (одно линейное, другое нелинейное) для уравнения состояния. В зависимости от коэффициентов этих уравнений получаются различные случаи решения задачи групповой классификации. Один из возможных случаев рассмотрен в данной статье. Другие случаи сводятся к большому числу возможных расширений допускаемой группы. Компактное описание этих возможностей будет дано в последующих работах.

1. Уравнения газовой динамики с релаксирующим уравнением состояния

Законы сохранения массы, импульса и энергии описываются дифференциальными уравнениями [18]

$$V_t + \vec{u} \cdot \nabla V = V\, \nabla \cdot \vec{u}, \tag{1.1}$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + V\, \nabla p = 0, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_t + \vec{u} \cdot \nabla \varepsilon + V p\, \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

где V — удельный объем ($\rho = V^{-1}$ — плотность), $\vec{u}$ — скорость частиц газа, ε — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Уравнение состояния меняется со временем $\varepsilon = e(t, V, S)$; при этом в частице выполняется термодинамическое равенство, связывающее дифференциалы основных величин:

$$TdS = d\varepsilon + pdV + \mu dt.$$

Здесь S — энтропия, $T = e_S > 0$ — температура, $\mu = -e_t \geq 0$ — мощность выделенной энергии, $p = -e_V$. Если дифференциалы взять вдоль мировой линии частицы $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, то можно получить дифференциальные уравнения на все термодинамические параметры:

$$e_S DS + e_t = 0, \tag{1.3}$$

$$DT - V e_{SV} \nabla \cdot \vec{u} = e_{tS} - e_S^{-1} e_t e_{SS},$$

$$Dp + V e_{VV} \nabla \cdot \vec{u} = e_S^{-1} e_{VS} e_t - e_{tV}.$$

Групповую классификацию будем проводить для замкнутой системы уравнений (1.1)÷(1.3), где $\nabla p = -e_{VV}\nabla V - e_{VS}\nabla S$. Произвольный элемент $e(t, V, S), e_t \neq 0, e_S \neq 0, e_{VV} \neq 0$ удовлетворяет равенствам

$$e_j = e_{x^j} = 0, \quad e_{u^k} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

где x^j, u^k — декартовы координаты векторов $\vec{x}, \vec{u}$.

Преобразования эквивалентности разыскиваются по правилу книги [4]: уравнения (1.4) и уравнения на e, возникающие в процессе вычисления, должны быть инвариантными. Для произвольного уравнения состояния алгебра Ли этих преобразований такова ($i = 1, 2, 3$):

$$\{X_i\} = \partial_{\vec{x}}, \quad \{X_{3+i}\} = t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}, \quad \{X_{6+i}\} = \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}};$$

$$X_{10} = \partial_t \Rightarrow \Pi_1 \colon \widetilde{t} = t + a_0, \quad \widetilde{e}(\widetilde{t}, S, V) = e(t, S, V);$$

$$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} \Rightarrow \Pi_2 : \widetilde{t} = bt, \quad \widetilde{\vec{x}} = b\vec{x}, \quad \widetilde{e}(\widetilde{t}, S, V) = e(t, S, V);$$

$$X_{12} = V\partial_V \Rightarrow \Pi_3 \colon \widetilde{V} = dV, \quad \widetilde{e}(t, \widetilde{V}, S) = e(t, V, S);$$

$$X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 2e\partial_e \Rightarrow \Pi_4 \colon \widetilde{t} = ct, \quad \widetilde{\vec{u}} = c^{-1}\vec{u}, \quad \widetilde{e} = c^{-2}e, \quad \widetilde{e}(\widetilde{t}, S, V) = c^{-2}e(t, S, V);$$

$$X_{14} = V\partial_e \Rightarrow \Pi_5 \colon \widetilde{e} = Vb_1 + e; \quad X_{15} = \partial_e \Rightarrow \Pi_6 \colon \widetilde{e} = e + \Gamma;$$

$$X_\eta = \eta(t, S)\partial_S \Rightarrow \Pi \colon \widetilde{S} = h(t, S), \quad \widetilde{e}(t, V, \widetilde{S}) = e(t, V, S).$$

Здесь $\eta(t, S), h(t, S)$ — поизвольные функции; b, d, c, b_1, Γ — постоянные групповые параметры.

Операторы $X_i, i = 1 \div 9$, образуют 9-мерную алгебру Ли L_9, которая порождает допускаемую системой (1.1)÷(1.3) группу с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп).

Для специальных классов уравнений состояния преобразования эквивалентности могут изменится, так же как и допускаемая системой группа преобразований.

2. О групповой классификации релаксирующих сред

Оператор алгебры Ли, допускаемой системой (1.1)÷(1.3),

$$X = \xi^t \partial_t + \vec{\xi} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \cdot \partial_{\vec{u}} + \eta^V \partial_V + \eta^S \partial_S.$$

имеет координаты, которые являются функциями переменных $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S$.

Продолжая оператор на производные $\widetilde{X}$ [4], действуем оператором на каждое из уравнений (1.1), (1.2), (1.3) в силу этих уравнений. Получим условия инвариантности. Эти соотношения содержат некоторые производные в качестве свободных параметров. Расщепление по ним условий инвариантности уравнения (1.1) приводит к следующим соотношениям:

$$\xi^t = \xi^t(t, \vec{x}), \quad \vec{\xi} = \vec{\xi}(t, x),$$

$$\vec{\eta} = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\xi} - \vec{u}(\vec{u}\cdot\nabla\xi^t) + \vec{u}\sigma + \vec{\tilde{\eta}}(t,x,V,S),$$
$$\eta^V_V - V^{-1}\eta^V = \xi^t_t + \sigma(t,\vec{x},V,S);$$
$$Ve_{VV}(\eta^V_{\vec{u}} + V\nabla\xi^t) + \vec{u}(\xi^t_t + \sigma - V\sigma_V) - \vec{\xi}_t + \vec{\tilde{\eta}} = V\vec{\tilde{\eta}}_V,$$
$$e_{VS}(\eta^V_{\vec{u}} + V\nabla\xi^t) = \vec{u}\sigma_S + \vec{\tilde{\eta}}_S, \quad -e_t e_S^{-1}\eta^V_S + \eta^V_t + \vec{u}\cdot\eta^V_{\vec{u}} = V\nabla\cdot\vec{\eta}. \tag{2.1}$$

Здесь ξ^t, $\vec{\xi}$, $\vec{\tilde{\eta}}$, σ — произвольные функции. Условие инвариантности уравнения (1.3) уточняет соотношения на координаты оператора X:

$$\sigma = -\xi^t_t, \quad \vec{\tilde{\eta}} = \vec{\xi}_t, \quad \eta^S(t,\vec{x},S), \quad \eta^V = V\tilde{\eta}^V(t,\vec{x},\vec{u},S),$$
$$\eta^S_t + (\xi^t_t - \eta^S_S + \vec{u}\cdot\nabla\xi^t)e_t e_S^{-1} + \vec{u}\cdot\nabla\eta^S = -X(e_t e_S^{-1}). \tag{2.2}$$

Условия инвариантности уравнения (1.2) задают представления координат оператора X:

$$\xi^t = \xi^t(t), \quad \vec{\xi} = \vec{\xi}(t,\vec{x}),$$
$$\vec{\eta} = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\xi} - \vec{u}\xi^t_t + \vec{\xi}_t, \quad \xi^l_k + \xi^k_l = 0, \quad k \neq l;$$
$$\xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3 = \nu(t,\vec{x}), \quad \eta^V = V\tilde{\eta}^V(t,\vec{x},S);$$
$$\xi^k_{lj} = 0, \quad \xi^t_{tt} = 2\nu_t, \quad \xi^k_{jt} = 0, \quad k \neq j,$$

где ξ^t, $\vec{\xi}$, $\tilde{\eta}^V$, ν — произвольные функции;

$$Ve_{VV}(2\nu - 2\xi^t_t - \tilde{\eta}^V) = X(Ve_{VV}); \tag{2.3}$$
$$Ve_{VS}(2\nu - 2\xi^t_t - \eta^S_S) = Ve_{VV}\eta^V_S + X(Ve_{VS}); \tag{2.4}$$
$$V^2 e_{VV}\nabla\tilde{\eta}^V + Ve_{VS}\nabla\eta^S = \vec{\xi}_{tt}. \tag{2.5}$$

Отсюда следуют равенства
$$\xi^k = \Omega^k_j x^j + B^k_0(t),$$

$\Omega^k_j + \Omega^j_k = 0$, Ω^k_j — произвольные постоянные при $k \neq j$,
$\Omega^1_1 = \Omega^2_2 = \Omega^3_3 = \nu(t) = \dfrac{1}{2}\xi^t_t + C_0$, C_0 — произвольная постоянная,

$$\eta^k = u^j\Omega^k_j - u^k\xi^t_t + \frac{1}{2}x^k\xi^t_{tt} + B^{k\prime}_0.$$

Здесь B^k_0, ν — произвольные функции переменной t.

Из уравнений (2.1) и (2.2) после расщепления по u^k следуют равенства $\nabla\tilde{\eta}^V = \nabla\eta^S = 0$.

Из (2.5) получим

$$B^{k\prime\prime}_0 = 0, \quad \xi^t_{ttt} = 0 \Rightarrow \xi^t = Nt^2 + Bt + B_0, \quad B^k_0 = A^k t + A^k_0.$$

Здесь N, D, B_0, A^k, A^k_0 — произвольные постоянные.

Уравнение (2.3) интегрируется по V дважды:

$$2C_0 e = Ve_V\tilde{\eta}^V + e_S\eta^S + (e\xi^t)_t + V\beta + \gamma(t,S), \tag{2.6}$$

где β, γ — произвольные функции переменных t и S.

Уравнение (2.4) в силу (2.6) равносильно равенствам

$$\tilde{\eta}^V_S = 0, \quad \beta_S = 0 \Rightarrow \beta = \beta(t), \quad \eta^V = V\tilde{\eta}^V(t), \quad \eta^S = \eta(t,S).$$

Из (2.1) следует $\tilde{\eta}^V = 3Nt + E$, E — произвольная постоянная. Уравнения (2.2) и (2.6) принимают вид
$$\gamma_S e_t = e_S(\gamma_t + \beta' V + N(2e + 3Ve_V)), \tag{2.7}$$

$$2e(N_0 - B - Nt) = Ve_V(3Nt + E) + e_S\eta(t,S) + e_t(Nt^2 + Bt + B_0) + V\beta(t) + \gamma(t,S). \tag{2.8}$$

Координаты оператора записываются так:

$$\begin{aligned} &\xi^t = Nt^2 + Bt + B_0, \quad \vec{\xi} = t(N\vec{x} + \vec{A}) + N_0\vec{x} + A_0 + \vec{\Omega} \times \vec{x}, \\ &\vec{\eta}c = N\vec{x} + \vec{A} - \vec{u}(Nt + B - N_0) + \vec{\Omega} \times \vec{u}, \\ &\eta^V c = V(3Nt + E), \quad \eta^S = \eta(t,S), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $N_0 = C_0 + \dfrac{1}{2}B$. Итак, справедливо утверждение.

Теорема 1. *Система* (1.1)÷(1.3) *допускает оператор* X *с координатами, представленными формулами* (2.9). *Условия инвариантности сводятся к равенствам* (2.7) *и* (2.8).

Если функция $e(t,V,S)$ произвольная, то из (2.7) и (2.8) следует, что равны нулю β, γ и все постоянные. Тогда координаты (2.9) определяют допускаемую алгебру L_9.

Система (1.1)÷(1.3) может допускать более широкую алгебру чем L_9, если функция $e(t,V,S)$ удовлетворяет уравнениям типа (2.7) и (2.8) с некоторыми коэффициентами $\widetilde{\gamma}(t,S)$, $\widetilde{\beta}(t)$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{N}_0$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{\eta}(t,S)$. В зависимости от коэффициентов уравнения типа (2.7) удобно рассмотреть 3 следующих случая.

1. $\widetilde{\gamma}_S = 0$, $\widetilde{N} \neq 0$. Уравнение типа (2.7) принимает специальный вид
$$3Ve_V + 2e = -\widetilde{\beta}'(t)V - \widetilde{\gamma}'(t). \tag{2.10}$$
2. $\widetilde{\gamma}_S \neq 0$, $\widetilde{N} = 0$. Уравнение типа (2.7) эквивалентно уравнению
$$e_t = Ve_S\widetilde{\beta}'. \tag{2.11}$$
3. $\widetilde{\gamma}_S = 0$, $\widetilde{N} = 0$ или $\widetilde{\gamma}_S \neq 0$, $\widetilde{N} \neq 0$. Из (2.7) следует $\gamma = NS + \Gamma, \beta = N\widetilde{\beta} + B_1$ и остается одно уравнение типа (2.8).

Далее рассмотрим первый случай расширения допускаемой алгебры.

3. Групповая классификация со специальным уравнением

Общее решение уравнения (2.10) (с точностью до преобразования эквивалентности Π)

$$e = SV^{-2/3} - \frac{1}{5}\widetilde{\beta}'V - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}', \quad \widetilde{\beta}''^2 + \widetilde{\gamma}''^2 \neq 0 \tag{3.1}$$

подставляем в (2.7) и расщепляем по V: $\beta = N\widetilde{\beta} + B_1$, $\gamma = N\widetilde{\gamma} + \Gamma$, где B_1, Γ — произвольные постоянные.

Из (2.8) получим следующие условия инвариантности:

$$\begin{gathered} \eta = 2S\Big(N_0 - B + \frac{1}{3}E\Big), \\ \widetilde{\beta}''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\beta}'(5Nt - 2N_0 + 2B + E) - 5N\widetilde{\beta} - 5B_1 = 0, \\ \widetilde{\gamma}''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\gamma}'(2Nt - 2N_0 + 2B) - 2N\widetilde{\gamma} - 2\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Если функции $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ — произвольные, то все постоянные равны нулю и допускается ядро L_9.

Пусть функции $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ удовлетворяют уравнениям типа (3.2) с постоянными коэффициентами $\widetilde{N}, \widetilde{B}, \widetilde{B}_0, \widetilde{E}, \widetilde{B}_1, \widetilde{N}_0, \widetilde{\Gamma}$.

3.1. $\widetilde{N} \neq 0$. Переносом по t уравнения типа (3.2) эквивалентны следующим:

$$\widetilde{\beta}''(t^2+k)+\widetilde{\beta}'(5t+n_1)-5\widetilde{\beta}=0, \quad \widetilde{\gamma}''(t^2+k)+\widetilde{\gamma}'(2t+n_2)-2\widetilde{\gamma}=0.$$

Здесь k, n_1, n_2 — произвольные постоянные. После дифференцирования этих равенств по t определяются

$$\widetilde{\beta}''=M_1e^{-n_1I}\left|t^2+k\right|^{-7/2}, \quad \widetilde{\gamma}''=M_2e^{-n_2I}\left|t^2+k\right|^{-2}, \quad I=\int(t^2+k)^{-1}dt$$

с некоторыми постоянными M_1, M_2 одновременно не равными нулю. Подстановка этих выражений в продифференцированные уравнения (3.2) и расщепление по t дает

$$\begin{aligned}
&M_1\neq 0: \ E=2N_0+4B+Nn_1, \quad B_0=Nk-\frac{1}{7}n_1B, \quad B(49k+n_1^2)=0;\\
&M_2\neq 0: \ N_0=-\frac{1}{2}(B+n_2N), \quad B_0=Nk-\frac{1}{4}n_2B, \quad B(16k+n_2^2)=0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Если $B\neq 0$, то из (3.2) и (3.3) следует

$$n_1=7n, \quad n_2=4n, \quad k=-n^2, \quad E=3(B+nN), \quad B_0=-nB-Nn^2, \quad N_0=-\frac{1}{2}B-2nN,$$

$$\widetilde{\beta}=M_1(t-n)^{-5}, \quad \widetilde{\gamma}=M_2(t-n)^{-2}\Rightarrow e=M_1V(t-n)^{-6}+M_2(t-n)^{-3}+SV^{-2/3}.$$

Остается два свободных параметра B и N, которым соответствуют допускаемые операторы, дополнительные к L_9 (строка 2 табл. 1):

$$(t-n)\partial_t-\frac{1}{2}\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}-\frac{3}{2}\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+3V\partial_V-S\partial_S,$$

$$(t^2-n^2)\partial_t+(t-2n)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-(t+2n)\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}}+3V(t+n)\partial_V-2nS\partial_S.$$

При $B=0$ из (3.2), (3.3) следует $B_0=Nk$, $N_0=-\frac{1}{2}Nn_2$, $E=N(n_1-n_2)$, $B_1=\Gamma=0$. Параметру N отвечает оператор (строка 1 табл. 1)

$$(t^2+k)\partial_t+\Big(t-\frac{1}{2}n_2\Big)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\Big(\vec{x}-\Big(t+\frac{1}{2}n_2\Big)\vec{u}\Big)\cdot\partial_{\vec{u}}+(3t+n_1-n_2)V\partial_V+\frac{1}{3}(2n_1-5n_2)S\partial_S.$$

Случай $M_1=0$, $M_2\neq 0$. Тогда $\widetilde{\beta}'$ эквивалентно нулю и $B_1=0$. Произвольному параметру отвечает оператор (строка 3 табл. 1)

$$3V\partial_V+2S\partial_S.$$

Если $B\neq 0$, то

$$k=-\Big(\frac{1}{4}n_2\Big)^2, \quad B_0=-N\Big(\frac{1}{4}n_2\Big)^2-\frac{1}{4}n_2B, \quad N_0=-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}n_2N, \quad \widetilde{\gamma}=\frac{1}{6}M_2\Big(t-\frac{1}{4}n_2\Big)^{-2}.$$

Уравнению состояния

$$e=\frac{1}{6}M_2\Big(t-\frac{1}{4}n_2\Big)^{-3}+SV^{-2/3}$$

отвечают допускаемые операторы (строка с номером 3.1.1 табл. 1)

$$\Big(t-\frac{1}{4}n_2\Big)\partial_t-\frac{1}{2}\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}-\frac{3}{2}\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-3S\partial_S,$$

$$\Big(t^2-\Big(\frac{1}{4}n_2\Big)^2\Big)\partial_t+\Big(t-\frac{1}{2}n_2\Big)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\Big(\vec{x}-\Big(t+\frac{1}{2}n_2\Big)\vec{u}\Big)\cdot\partial_{\vec{u}}+3tV\partial_V-n_2S\partial_S.$$

При $B=0$ из (3.3) следует $N_0=-\dfrac{1}{2}n_2N,\ B_0=Nk$ и дополнительный оператор имеет вид (строка с номером 3.1 табл. 1)

$$(t^2+k)\partial_t+\Big(t-\frac{1}{2}n_2\Big)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\Big(\vec{x}-\Big(t+\frac{1}{2}n_2\Big)\vec{u}\Big)\cdot\partial_{\vec{u}}+3tV\partial_V-n_2S\partial_S.$$

Случай $M_1\neq 0,\ M_2=0$. В этом случае $\widetilde{\gamma}'\sim 0,\ \Gamma=0$ и свободным параметрам $N_0,\ N$ отвечают операторы (строка 4 табл. 1)

$$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+2V\partial_V+\frac{10}{3}S\partial_S,$$

$$(t^2+k)\partial_t+t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}}+(3t+n_1)V\partial_V+\frac{2}{3}n_1S\partial_S.$$

При $B\neq 0$ имеем дополнительный оператор (строка с номером 4.1 табл. 1)

$$\Big(t-\frac{1}{7}n_1\Big)\partial_t+4V\partial_V+\frac{2}{3}S\partial_S-\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}$$

для уравнения состояния

$$e=\frac{1}{30}M_1\Big(t-\frac{1}{7}n_1\Big)^{-6}V+SV^{-2/3}.$$

3.2. $\widetilde{N}=0,\ \widetilde{B}\neq 0.$ Уравнения типа (3.2) эквивалентны следующим:

$$t\widetilde{\beta}''-k_1\widetilde{\beta}'=m_1,\quad t\widetilde{\gamma}''-k_2\widetilde{\gamma}'=m_2.$$

С точностью до преобразований эквивалентности решения уравнений имеют вид

$$\widetilde{\beta}'=M_1\chi_1(t),\quad \widetilde{\gamma}'=M_2\chi_2(t),\quad \chi_i(t)=\begin{cases}|t|^{k_i}, & k_i\neq 0,\\ \ln|t|, & k_i=0,\end{cases}$$

где M_i — постоянные, $M_1^2+M_2^2\neq 0$.

Подстановка решений в продифференцированные условия (3.2), расщепление по t приводят к равенствам

$$M_1\neq 0:\ (k_1+6)N=0,\quad (k_1+2)B=2N_0-E,\quad (k_1-1)B_0=0;$$
$$M_2\neq 0:\ (k_2+3)N=0,\quad (k_2+2)B=2N_0,\quad (k_2-1)B_0=0.$$

Случай $M_1\neq 0,\ M_2\neq 0$. Появляются три возможности для дополнительных операторов (строки с номерами 5, 5.1, 5.2 табл. 1):

$$k_1=-6,\ k_2=-3\Rightarrow e=-\frac{1}{5}M_1t^{-6}V-\frac{1}{2}M_2t^{-3}+SV^{-2/3},$$

$$-2t\partial_t+\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+3\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-6V\partial_V+2S\partial_S,\quad t^2\partial_t+t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}}+3tV\partial_V;$$

$$k_1=k_2=1\Rightarrow e=-\Big(\frac{1}{5}M_1V+\frac{1}{2}M_2\Big)t+SV^{-2/3},$$

$$\partial_t,\quad 2t\partial_t+3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+2S\partial_S;$$

другие значения k_1 и $k_2\Rightarrow e=-\dfrac{1}{5}M_1|t|^{k_1}V-\dfrac{1}{2}M_2|t|^{k_2}+SV^{-2/3}$,

$$t\partial_t+\frac{1}{2}(k_2+2)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\frac{1}{2}k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+(k_2-k_1)V\partial_V+\frac{1}{3}(5k_2-2k_1)S\partial_S.$$

Случай $M_1=0,\ M_2\neq 0\Rightarrow\widetilde{\beta}'\sim 0$. Для любого k_2 допускаются операторы (строка 6 табл. 1)

$$3V\partial_V+2S\partial_S, 2t\partial_t+(k_2+2)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+2k_2S\partial_S$$

для уравнения состояния

$$e = SV^{-2/3} - \frac{1}{2}M_2 \begin{cases} |t|^{k_2}, & k_2 \neq 0, \\ \ln|t|, & k_2 = 0. \end{cases}$$

Дополнительный оператор (строки с номерами 6.1, 6.2 табл. 1) при

$$k_2 = 1 \Rightarrow \partial_t, \quad k_2 = -3 \Rightarrow t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V.$$

Случай $M_1 \neq 0,\ M_2 = 0 \Rightarrow \widetilde{\gamma}' \sim 0$. Для любого k_1 допускаются операторы (строка 7 табл. 1)

$$t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - (k_1+2)V\partial_V - \frac{2}{3}(k_1+5)S\partial_S, \quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + \frac{10}{3}S\partial_S.$$

Дополнительные операторы те же что и в предыдущем случае, но при $k_1 = 1$ и $k_1 = -6$ (строки 7.1, 7.2 табл. 1).

3.3. $\widetilde{N} = \widetilde{B} = 0$. Уравнения типа (3.2) эквивалентны следующим:

$$\widetilde{\beta}'' - k_1\widetilde{\beta}' = m_1, \quad \widetilde{\gamma}'' - k_2\widetilde{\gamma}' = m_2.$$

С точностью до преобразований эквивалентности решения таковы:

$$\widetilde{\beta}' = M_1\mu_1(t), \quad \widetilde{\gamma}' = M_2\mu_2(t), \quad M_1^2 + M_2^2 \neq 0, \quad \mu_i = \begin{cases} e^{k_i t}, & k_i \neq 0, \\ t, & k_i = 0, \end{cases}$$

где M_1 и M_2 — произвольные постоянные.

Случай $M_1 \neq 0,\ M_2 \neq 0$. Имеем 4 возможности.

$$e = SV^{-2/3} - \frac{1}{5}M_1Ve^{k_1t} - \frac{1}{2}M_2 \begin{cases} e^{k_2t}, \\ t, \end{cases}$$

$$e = SV^{-2/3} - \frac{1}{2}M_1Vt - \frac{1}{2}M_2 \begin{cases} e^{k_2t}, \\ t. \end{cases}$$

Для всех возможностей допускается оператор (строка 8 табл. 1)

$$\partial_t + \frac{1}{2}k_2\left(\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}\right) + (k_2 - k_1)V\partial_V + \frac{1}{3}(5k_2 - 2k_1)S\partial_S.$$

В последнем случае $k_1 = k_2 = 0$ добавляется растяжение (строка с номером 8.1 табл. 1)

$$2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S.$$

Случай $M_1 = 0,\ M_2 \neq 0$. К полученным при $M_1 \neq 0,\ M_2 \neq 0$ операторам с $k_1 = 0$ добавляется оператор $3V\partial_V + 2S\partial_S$ (строка с номером 8.1.1 табл. 1).

Случай $M_1 \neq 0,\ M_2 = 0$. К полученным при $M_1 \neq 0,\ M_2 \neq 0$ операторам с $k_2 = 0$ добавляется оператор (строка с номером 8.1.2 табл. 1)

$$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + \frac{10}{3}S\partial_S.$$

Проделанные вычисления позволяют сформулировать теорему 2.

Теорема 2. *Система уравнений газовой динамики* (1.1)÷(1.3) *с реологическим уравнением состояния* (3.1) *допускает алгебру Ли расширения ядра* L_9 (*идеал расширения*) *как линейные комбинации операторов* (*подалгебра расширения*)

$$X_{10} = \partial_t, \quad Y = t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V,$$

$$Y_1 = t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 2S\partial_S, \quad Y_2 = \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S, \quad Y_3 = 3V\partial_V + 2S\partial_S.$$

Все расширения компактно собраны в таблице. Например, операторы строки 3 относятся и к строке 3.1, операторы строк 3 и 3.1 относятся и к строке 3.1.1; оператор строки 5 относится к строкам 5.1 и 5.2, но операторы последних относятся только к ним самим. В таблице после точки дополнительных операторов нет.

Т а б л и ц а 1

Таблица допускаемых подалгебр расширений ядра

№	$\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$	Операторы расширений
1	$\widetilde{\beta}'' = M_1 e^{n_1 I} \lvert t^2+k \rvert^{-7/2}$, $\widetilde{\gamma}'' = M_2 e^{n_2 I} \lvert t^2+k \rvert^{-2}$, $I = \int (t^2+k)^{-1} dt$	$Y + k\partial_t - \frac{1}{2} n_2 Y_2 + \frac{1}{3}(n_1 - n_2) Y_3$.
2	$\widetilde{\beta}' = M_1 (t-n)^{-6}$, $\widetilde{\gamma}' = M_2 (t-n)^{-3}$	$Y_1 - n\partial_t - \frac{1}{2} Y_2 + Y_3$, $Y - n^2\partial_t - 2nY_2 + nY_3$.
3	$\beta' = 0$	Y_3,
3.1	$\gamma'' = M_2 e^{n_2 I} \lvert t^2+k \rvert^{-2}$	$Y + k\partial_t - \frac{1}{2} n_2 Y_2$,
3.1.1	$k = -\left(\frac{1}{4} n_2\right)^2$, $\widetilde{\gamma}' = \frac{1}{6} M_2 \left(t - \frac{1}{4} n_2\right)^{-3}$	$Y_1 - \frac{1}{4} n_2 \partial_t - \frac{1}{2} Y_2$.
4	$\widetilde{\gamma}' = 0$	$Y_2 + \frac{2}{3} Y_3, Y + k\partial_t + \frac{1}{3} n_1 Y_3$,
4.1	$\widetilde{\beta}' = \frac{1}{30} M_1 \left(t - \frac{1}{7} n_1\right)^{-6}$	$Y_1 - \frac{1}{7} n_1 \partial_t + \frac{4}{3} Y_3$.
5	$\widetilde{\beta}' = M_1 \lvert t \rvert^{k_1},\ \widetilde{\gamma}' = M_2 \lvert t \rvert^{k_2}$	$Y_1 + \left(\frac{1}{2} k_2 + 1\right) Y_2 + \frac{1}{3}(k_2 - k_1) Y_3$,
5.1	$\mathrm{k}_1 = -6,\ k_2 = -3$	Y.
5.2	$k_1 = k_2 = 1$	X_{10}.
6	$\widetilde{\beta}' = 0$, $\widetilde{\gamma}' = M_2 \begin{cases} \lvert t \rvert^{k_2}, \\ \ln \lvert t \rvert, k_2 = 0 \end{cases}$	$Y_3, 2Y_1 + (k_2+2) Y_2$,
6.1	$k_2 = 1$	X_{10}.
6.2	$k_2 = -3$	Y.
7	$\widetilde{\gamma}' \sim 0$	$Y_1 - \frac{1}{3}(k_1+2) Y_3,\ 3Y_2 + 2Y_3$,
7.1	$k_1 = 1$	X_{10}.
7.2	$k_1 = -6$	Y.
8	$\widetilde{\beta}' = M_1 \begin{cases} e^{k_1 t}, \\ t, k_1 = 0, \end{cases}$ $\widetilde{\gamma}' = M_2 \begin{cases} e^{k_2 t}, \\ t, k_2 = 0 \end{cases}$	$X_{10} + \frac{1}{2} k_2 Y_2 + \frac{1}{3}(k_2 - k_1) Y_3$,
8.1	$k_1 = k_2 = 0$	$2Y_1 + 3Y_2$,
8.1.1	$M_1 = 0$	Y_3.
8.1.2	$M_2 = 0$	$Y_2 + \frac{2}{3} Y_3$.

Заключение

Проведена групповая классификация для уравнений газовой динамики со специальным релаксирующим уравнением состояния. Для двух других типов уравнения состояния, удовлетворяющих линейным уравнениям (2.11) и типа (2.8), групповая классификация более сложная. Изменяются преобразования эквивалентности. Работа по решению этих задач продолжается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л.В.** Программа “Подмодели”. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, №4. С. 30–55.
2. **Хабиров С.В., Мукминов Т.Ф.** Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 121–143. doi: 10.33048/semi.2019.16.006
3. **Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с.
4. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. **Хабиров С.В., Мукминов Т.Ф.** Простые волны конических движений // Уфим. мат. журн. 2022. Т. 14, № 2. С. 82–93.
6. **Хабиров С.В.** Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
7. **Ibragimov N.H.** A new conservation theorem // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 333, no. 1. P. 311–328.
8. **Чиркунов Ю.А.** Метод А-операторов и законы сохранения для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 50, № 2. С. 53–60.
9. **Ибрагимов Н.Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
10. **Khabirov S.V.** Group analysis of the plane steady vortex submodel of ideal gas with varying entropy // Mathematics. 2021. Vol. 9, iss. 16. P. 1–15. doi: 10.3390/math9162006
11. **Меньщиков В.М.** О продолжении инвариантных решений уравнений газовой динамики через ударную волну // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1970. Вып. 4. С. 163–169.
12. **Меньщиков В.М.** О непрерывном сопряжении инвариантных решений // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 10. С. 70–84.
13. **Пухначев В.В.** Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично-инвариантными решениями уравнений Навье — Стокса //Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 10. С. 125–137.
14. **Хабиров С.В.** Автомодельное схождение ударной волны по теплопроводному газу // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, №5. С. 731–740.
15. **Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H.** Approximate groups of transformations // Differential Equations. 1993. Vol. 29, no. 10. P. 1487–1504.
16. **Малкин А.Я., Исаев А.И.** Реология: концепция, методы, приложения. СПб: Изд.-во “Профессия”, 2010. 557 с.
17. **Vladimirov V.A.** Modelling system for relaxing media. symmetry, restrictions and attractive features of invariant solutions // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 2000. Vol. 30, Part 1. P. 231–238.
18. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. Изд. 2-е, доп. 336 с.

Поступила 22.02.2023
После доработки 10.04.2023
Принята к публикации 17.04.2023

Хабиров Салават Валеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: habirov@anrb.ru

REFERENCES

1. Ovsyannikov L. V. The “podmodeli” program. Gas dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 601–627. doi: 10.1016/0021-8928(94)90137-6
2. Mukminov T.F., Khabirov S.V. Graph of embedded subalgebras of 11-dimensional symmetry algebra for continuous medium. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 121–143 (in Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.006

3. Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. *Elementy simmetriingogo analiza differentsial'nykh uravnenii mekhaniki sploshnoi sredy* [Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics], Novosibirsk, Novosibirsk State Tech. Univ. Publ., 2012, 659 p. ISBN: 9785778218963 .
4. Ovsyannikov L.V. *Group analysis of differential equations*, NY: Acad. Press, 1982, 432 p. ISBN: 9781483219066 .. Original Russian text was published in Ovsyannikov L.V., *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 399 p.
5. Khabirov S.V., Mukminov T.F. Simple waves of conic motions. *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 2022, vol. 14, no. 2. pp. 82–93 (in Russian).
6. Khabirov S.V. Classification of differential invariant submodels. *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 562–579. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf
7. Ibragimov N.H. A new conservation theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 333, no. 1, pp. 311–328. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078
8. Chirkunov Yu.A. Method of *A*-operators and conservation laws for the equations of gas dynamics. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 2, pp. 213–219. doi: 10.1007/s10808-009-0029-7
9. Ibragimov N.H. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, NY, Springer-Verlag, 1985, 394 p. ISBN: 9781402003394 . Original Russian text was published in Ibragimov N.Kh., *Gruppy preobrazovanii v matematicheskoi fizike*, Moscow, Nauka Publ., 1983, 280 p. ISBN: 978-0-02-889274-0 .
10. Khabirov S.V. Group analysis of the plane steady vortex submodel of ideal gas with varying entropy. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 16, article no. 2006. doi: 10.3390/math9162006
11. Men'shchikov V.M. On continuation of invariant solutions of gas dynamic equations across shock wave. In: *Dinamika sploshnoi sredy*, Sb. Nauch. Tr. AN SSSR. Sib. Otd., 1970, vol. 4, pp. 163–169 (in Russian).
12. Men'shchikov V.M. On continuous coupling of invariant solutions. In: *Dinamika sploshnoi sredy*, Sb. Nauch. Tr. AN SSSR. Sib. Otd., 1972, vol. 10, pp. 70–84 (in Russian).
13. Pukhnachev V.V. Unsteady motions of viscous liquid with free bound described by partially invariant solutions of Navier–Stokes equations. In: *Dinamika sploshnoi sredy*, Sb. Nauch. Tr. AN SSSR. Sib. Otd., 1972, vol. 10, pp. 125–137 (in Russian).
14. Khabirov S.V. Self-similar convergence of a shock wave in a heat conducting gas. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 5, pp. 524–531. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.11.005
15. Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Approximate groups of transformations. *Differ. Equ.*, 1993, vol. 29, no. 10, pp. 1487–1504.
16. Malkin A.Ya., Isaev A.I. *Rheology: conceptions, methods, applications*, Toronto, Chemical Puplishing, 2005, 474 p. ISBN: 978-1895198331 . Translated to Russian under the title *Reologiya: kontseptsiya, metody, prilozheniya*, St. Petersburg, Profession Publ., 2010, 500 p. ISBN: 978-5-93913-139-1 .
17. Vladimirov V.A. Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solutions. *Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine*, 2000, vol. 30, no. 1, pp. 231–238.
18. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p. ISBN: 5-93972-201-6 .

Received February 22, 2023
Revised April 10, 2023
Accepted April 17, 2023

Funding Agency: The work was supported under state contract no. 0246-2019-0052 .

Salavat Valeevich Khabirov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia, e-mail: habirov@anrb.ru .

Cite this article as: S. V. Khabirov. On the group classification of ideal gas-dynamic relaxing media. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 260–270.