ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.9

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СЕКТОРИАЛЬНЫМ НАБОРОМ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО[1]

В. Е. Федоров, К. В. Бойко

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи Коши для разрешенного относительно старшей дробной производной Герасимова — Капуто квазилинейного уравнения в банаховом пространстве с замкнутыми операторами из класса $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}$ в линейной части и с непрерывным в норме графика нелинейным оператором. Доказана теорема о локальном существовании и единственности решения задачи Коши в случае локально липшицева нелинейного оператора. При условии его липшицевости показано существование единственного решения на наперед заданном отрезке. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач для уравнений в частных производных с производными Герасимова — Капуто по времени.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова — Капуто, задача Коши, секториальный набор операторов, разрешающее семейство операторов, квазилинейное уравнение, локальное решение, нелокальное решение, начально-краевая задача.

V. E. Fedorov, K. V. Boyko. Quasilinear equations with a sectorial set of operators at Gerasimov–Caputo derivatives.

The issues of unique solvability of the Cauchy problem are studied for a quasilinear equation solved with respect to the highest fractional Gerasimov–Caputo derivative in a Banach space with closed operators from the class $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}$ in the linear part and with a nonlinear operator continuous in the graph norm. A theorem on the local existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem is proved in the case of a locally Lipschitz nonlinear operator. Under the nonlocal Lipschitz condition for the nonlinear operator, the existence of a unique solution on a predetermined interval is shown. Abstract results are illustrated by examples of initial–boundary value problems for partial differential equations with Gerasimov–Caputo time derivatives.

Keywords: Gerasimov–Caputo fractional derivative, Cauchy problem, sectorial set of operators, resolving family of operators, quasilinear equation, local solution, nonlocal solution, initial–boundary value problem.

MSC: 35R11, 34G20, 34A08

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-248-259

Введение

В последние десятилетия вырос интерес исследователей к дробным дифференциальным уравнениям, в первую очередь, в связи со все более частым использованием таких уравнений при моделировании различных явлений, возникающих в физике, химии, математической биологии, технике и т. д. (см. монографии [1;2] и библиографию в них). Подробнее об уравнениях дробного порядка и близких к ним интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра можно узнать из работ [3–8].

В данной работе исследуется задача Коши $z^{(l)}(t_0) = z_l$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, для дифференциального уравнения с несколькими дробными производными в линейной и нелинейной частях

$$D^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z(t) + B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \ldots, D^{\gamma_r} z(t)). \tag{0.1}$$

Здесь D^β — производная Герасимова — Капуто порядка $\beta > 0$ или интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta$ в случае $\beta \le 0$; $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$;

[1]Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1).

$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r < \alpha$; $\mathcal{Z}$ — банахово пространство; A_k, $k = 1, 2, \dots, n$, являются линейными замкнутыми операторами с плотными в $\mathcal{Z}$ областями определения; нелинейное отображение $B\colon [t_0, T] \times \mathcal{Z}^r \to \bigcap_{k=1}^n D_{A_k}$ непрерывно в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{D}} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \sum_{k=1}^n \|A_k \cdot\|_{\mathcal{Z}}$.

Однозначная разрешимость задачи Коши для линейного неоднородного уравнения (0.1) ($B = f(t)$) в случае, когда операторы A_k ограничены, $k = 1, 2, \dots, n$, доказана в [9]. В случае, когда набор неограниченных операторов $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ принадлежит классу $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}$, однозначная разрешимость задачи Коши для линейного неоднородного уравнения (0.1) исследована в [10]. Отметим также работу [11], в которой для линейного уравнения (0.1) с неизвестным коэффициентом в правой части найден критерий корректности обратной задачи. Близкие задачи для уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля исследуются в работах [12; 13].

Во втором разделе данной работы приведена теорема о разрешимости линейного неоднородного уравнения (0.1), которая используется при дальнейших рассуждениях. В третьем разделе при условии локальной липшицевости нелинейного оператора B получена теорема о локальной однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейного уравнения (0.1). Для этого использована теорема о неподвижной точке в специально построенном метрическом пространстве. Четвертый раздел содержит аналогичный результат о существовании единственного решения на заранее заданном отрезке (нелокальная однозначная разрешимость) при условии липшицевости нелинейного оператора. В последнем разделе модельные примеры начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных с дробными производными Герасимова — Капуто по времени иллюстрируют абстрактные результаты.

1. Основные определения и предварительные сведения

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{Z}$, а через $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов с плотными в $\mathcal{Z}$ областями определения. При $t_0 \in \mathbb{R}$, $h : (t_0, \infty) \to \mathcal{Z}$ дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ имеет вид

$$J^\beta h(t) := \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} h(s)ds, \quad t > t_0;$$

J^0 по определению является тождественным оператором. Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, D^m — производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D^α — дробная производная Герасимова — Капуто [14–16] порядка $\alpha > 0$, она определяется как

$$D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha}\Big(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\frac{(t-t_0)^k}{k!}\Big).$$

Если функция h достаточно гладкая, то $D^\alpha h(t) = J^{m-\alpha} D^m h(t)$. Под производной Герасимова — Капуто порядка $\beta < 0$ будем понимать дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta$, т. е. $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$ при $\beta < 0$.

Обозначим преобразование Лапласа функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ как $\widehat{h}$ или $\mathfrak{L}[h]$, если выражение для h слишком длинное. Преобразование Лапласа для дробной производной Герасимова — Капуто имеет вид [5, p. 106]

$$\widehat{D^\alpha h}(\lambda) = \lambda^\alpha \widehat{h}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0)\lambda^{\alpha-1-k}.$$

Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \le m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, α_k могут быть отрицательными; D^{α_k} — производная Герасимова — Капуто, если $\alpha_k > 0$, или интеграл Римана — Лиувилля в случае $\alpha_k \leq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Операторы $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ имеют области определения $D_{A_1}, D_{A_2}, \dots, D_{A_n}$ соответственно. Обозначим

$$\mathcal{D} := \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k}, \quad R_\lambda := \Big(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\Big)^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{D}.$$

Снабдим множество $\mathcal{D}$ нормой

$$\| \cdot \|_{\mathcal{D}} = \| \cdot \|_{\mathcal{Z}} + \sum_{k=1}^{n} \|A_k \cdot \|_{\mathcal{Z}},$$

относительно которой $\mathcal{D}$ является банаховым пространством, так как представляет собой пересечение банаховых пространств $D_{A_1}, D_{A_2}, \dots, D_{A_n}$ с соответствующими нормами графика.

Обозначим $n_l := \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : l \leq m_k - 1\}$ при $l = 0, 1, \dots, m-1$, если же множество $\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : l \leq m_k - 1\}$ пусто при некотором $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (это выполняется в точности тогда, когда $\alpha_n \leq m - 1$), то положим $n_l := n + 1$.

О п р е д е л е н и е 1. Набор операторов $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ принадлежит классу $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если

(i) $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$;

(ii) при всех $\lambda \in S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C}\colon |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0,\ a \neq a_0\}$, $l = 0, 1, \dots m-1$ существуют операторы

$$R_\lambda\Big(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\Big) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z});$$

(iii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $l = 0, 1, \dots m-1$

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha-1}}, \quad \Big\|R_\lambda\Big(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\Big)\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a||\lambda|^{\alpha-1}}. \tag{1.1}$$

Поскольку условия в этом определении задаются в секторе S_{θ_0,a_0}, случай уравнений с набором операторов $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ будем называть секториальным, как и соответствующий набор операторов.

З а м е ч а н и е 1. Класс операторов $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$, определенный в работе [10], в терминах данной работы является в точности классом $\mathcal{A}^{n+r}_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$.

З а м е ч а н и е 2. При $n = 1$, $\alpha_1 = 0$ имеем $n_l = 2$ при $l = 0, 1, \dots, m-1$, поэтому все неравенства в (1.1) совпадают с первым из них, при этом $R_\lambda = (\lambda I - A_1)^{-1}$ — резольвента оператора A_1, $\mathcal{D} = D_{A_1}$. В этом случае класс $\mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ совпадает с классом $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ операторов, порождающих аналитические разрешающие семейства операторов уравнения $D^\alpha z(t) = Az(t)$ [17]. Если к тому же $\alpha = 1$, это класс генераторов аналитических полугрупп операторов $\mathcal{H}(a_0, \theta_0)$ [18].

При $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$, $t_0 < T$, $f : [t_0, T] \to \mathcal{Z}$ рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k D^{\alpha_k} z(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T], \tag{1.2}$$

и задачу Коши для него

$$z^{(l)}(t_0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \tag{1.3}$$

Решением задачи Коши (1.2), (1.3) назовем такую функцию $z \in C((t_0, T]; \mathcal{D}) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, для которой $D^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_k} z \in C((t_0, T]; D_{A_k})$, $k = 1, 2, \dots, n$, выполняются равенство (1.2) для всех $t \in (t_0, T]$ и условия (1.3).

Теорема 1 [10, теорема 4]. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \le m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{D})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1.2), (1.3), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Z(t-s) f(s) ds, \quad t \in (t_0, T],$$

где

$$Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{\alpha - l - 1} R_\lambda \Big(I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k \Big) e^{\lambda t} d\lambda, \quad Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0,$$

$\Gamma = \{a + re^{i\theta} : r \in [0, \infty)\} \cup \{a + re^{-i\theta} : r \in [0, \infty)\}$ *при некотором* $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

З а м е ч а н и е 3. В работе [10] показано, что семейства операторов $\{Z_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ при каждом $l = 0, 1, \dots, m-1$, а также $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ при условии $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ аналитически продолжимы в сектор $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$. При $n = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha = 1$ остается одно семейство $\{Z_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, которое совпадает с семейством $\{Z(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, так как $n_0 = 2$ (см. замечание 2). Это семейство является аналитической полугруппой операторов.

2. Локальное решение квазилинейного уравнения

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $r_i - 1 < \gamma_i \le r_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, r$, U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B : U \to \mathcal{Z}$. Рассмотрим вопросы существования и единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения на достаточно малом отрезке $[t_0, t_1]$, т. е. локального решения.

Решением задачи Коши (1.3) для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z(t) + B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \tag{2.1}$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ назовем такую функцию $z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{D}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для которой $D^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha_k} z \in C((t_0, t_1]; D_{A_k})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, выполняются включение $(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \in U$ при $t \in [t_0, t_1]$ и равенство (2.1) для всех $t \in (t_0, t_1]$, а также условия (1.3).

Обозначим $\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathcal{Z}^r$, $S_\delta(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^r : \|y_l - x_l\|_\mathcal{Z} \le \delta, l = 1, 2, \dots, r\}$. Отображение $B : U \to \mathcal{Z}$ называется локально липшицевым по $\bar{x}$, если для любого $(t, \bar{x}) \in U$ существуют $\delta > 0, q > 0$, такие, что $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x}) \subset U$, и для любых $(s, \bar{y}), (s, \bar{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x})$ выполняется неравенство $\|B(s, \bar{y}) - B(s, \bar{v})\|_\mathcal{Z} \le q \sum_{i=1}^r \|y_i - v_i\|_\mathcal{Z}$.

Используя начальные данные $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$, определим многочлен

$$\tilde{z}(t) = z_0 + (t - t_0) z_1 + \frac{(t - t_0)^2}{2!} z_2 + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!} z_{m-1}$$

и векторы $\tilde{z}_i = D^{\gamma_i}|_{t=t_0} \tilde{z}(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$. Заметим, что $\tilde{z}_i = 0$, если $\gamma_i \notin \{0, 1, \dots, m-1\}$. В случае $\gamma_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ имеем $\tilde{z}_i = z_{\gamma_i}$. Таким образом, значение аргумента нелинейного оператора B в начальный момент времени должно иметь вид $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_r)$.

Лемма 1 [19, лемма 1]. *Пусть* $l - 1 < \beta \le l \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\exists C > 0 \quad \forall h \in C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \quad \|D^\beta h\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \le C \|h\|_{C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}.$$

Лемма 2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \ge 0$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B \in C(U; \mathcal{D})$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_r) \in U$. *Тогда функция* z *является решением задачи* (1.3), (2.1) *на отрезке* $[t_0, t_1]$, *если и только если* $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, *и при всех* $t \in [t_0, t_1]$ *выполняются включение* $(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \in U$ *и равенство*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Z(t-s) B(s, D^{\gamma_1} z(s), D^{\gamma_2} z(s), \dots, D^{\gamma_r} z(s)) ds. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если z — решение задачи (1.3), (2.1), то $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, отображение

$$t \to B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \tag{2.3}$$

непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в пространство $\mathcal{D}$ в силу условий на оператор B. По теореме 1 выполняется равенство (2.2).

Пусть $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, при всех $t \in [t_0, t_1]$ выполняется включение $(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)) \in U$ и z удовлетворяет уравнению (2.2). Тогда отображение (2.3) принадлежит классу $C([t_0, t_1]; \mathcal{D})$. Как при доказательстве теоремы 1 (см. доказательство теоремы 4 в [10]), можно непосредственно показать, что z — решение задачи (1.3), (2.1).

Лемма доказана.

Обозначим $i_* := \min\{i \in \{1, 2, \dots, r\} : \gamma_i > m-1\}$, если множество $\{i \in \{1, 2, \dots, r\} : \gamma_i > m-1\}$ не пусто, иначе $i_* := r+1$. Для $t_1 > t_0$ определим пространство $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) := \{z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), i = i_*, i_*+1, \dots, r\}$ и снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} + \sum_{i=i_*}^{r} \|D^{\gamma_i} z\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}.$$

З а м е ч а н и е 4. Для функции $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ в силу леммы 1 $D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, i_*-1$. Поэтому функции из $C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, для которых $D^{\gamma_i} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, r$, о которых идет речь в лемме 2, это в точности функции из $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Лемма 3. $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ *— банахово пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ возьмем фундаментальную последовательность $\{x_l\}$, тогда существуют пределы $x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ для $\{x_l\}$ в $C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, y_i — для последовательностей $\{D^{\gamma_i} x_l\}$ в $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = i_*, i_*+1, \dots, r$. Следовательно, при $t \in [t_0, t_1]$

$$J^{\gamma_i} y_i(t) = \lim_{l \to \infty} J^{\gamma_i} D^{\gamma_i} x_l(t) = \lim_{l \to \infty} \left(x_l(t) - \sum_{j=0}^{m-1} x_l^{(j)}(t_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} \right)$$

$$= x(t) - \sum_{j=0}^{m-1} x^{(j)}(t_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!}, \quad y_i = D^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), \quad i = i_*, i_*+1, \dots, r.$$

Таким образом, $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ является банаховым пространством.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^r$, $B \in C(U; \mathcal{D})$ *локально липшицево по* $\bar{x}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r) \in U$. *Тогда при некотором* $t_1 > t_0$ *задача* (1.3), (2.1) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\tau > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $[t_0, t_0+\tau] \times S_\delta(\bar{\tilde{z}}) \subset U$, где $\bar{\tilde{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots, \tilde{z}_r)$. Обозначим через $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ множество функций $z \in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, для которых $\|D^{\gamma_i} z(t) - \tilde{z}_i\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$ при $t_0 \leq t \leq t_0+\tau$. Определим на множестве $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ метрику $d(x,y) := \|x-y\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})}$, тогда в силу леммы 3 $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$ — полное метрическое пространство. Заметим, что $\tilde{z} \in \mathcal{S}_{\tau,\delta}$ при достаточно малых $\tau > 0$.

При заданных $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, для $z \in \mathcal{S}_{\tau,\delta}$ определим отображение

$$G(z)(t) := \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Z(t-s) B(s, D^{\gamma_1} z(s), D^{\gamma_2} z(s), \ldots, D^{\gamma_r} z(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0+\tau].$$

Поскольку отображение $t \to B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \ldots, D^{\gamma_r} z(t))$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в пространство $\mathcal{D}$, по теореме 1 $G(z) \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(k)}(t_0) = z_k$ для всех $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Для $i = i_*, i_*+1, \ldots, r$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, $x \in \mathcal{D}$

$$\mathfrak{L}[D^{\gamma_i} Z_l(t) x](\lambda) = \lambda^{\gamma_i - l - 1} R_\lambda \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right) x - \lambda^{\gamma_i - 1 - l} x = \lambda^{\gamma_i - l - 1} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l - 1} \lambda^{\alpha_k} A_k x,$$

$$\left\| \lambda^{\gamma_i - l - 1} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l-1} \lambda^{\alpha_k} A_k x \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{C \|x\|_{\mathcal{D}}}{|\lambda|^{\alpha - \gamma_i + l + 1 - \alpha_{n_l - 1}}},$$

$$D^{\gamma_i} Z_l(0) x = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{\gamma_i - l - 1} R_\lambda \sum_{k=1}^{n_l - 1} \lambda^{\alpha_k} A_k e^{\lambda t} x d\lambda = 0,$$

так как для $k \leq n_l - 1$ имеем $l > m_k - 1$, значит, $l \geq \alpha_k$, $\alpha - \gamma_i + l + 1 - \alpha_k \geq \alpha - \gamma_i + 1 > 1$. Поэтому $D^{\gamma_i} Z_l(t) x \in C([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z})$ при $x \in \mathcal{D}$, $i = i_*, i_*+1, \ldots, r$.

При доказательстве леммы 2 в [10] было показано, что

$$\|D^l Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C t^{\alpha - l - 1}, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.4}$$

$$D^l \int_{t_0}^{t} Z(t-s) B^z(s) ds|_{t=t_0} = \int_{t_0}^{t} Z^{(l)}(t-s) B^z(s) ds|_{t=t_0} = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где функция $B^z(s) := B(s, D^{\gamma_1} z(s), D^{\gamma_2} z(s), \ldots, D^{\gamma_r} z(s))$ непрерывна по s на $[t_0, t_0+\tau]$ в норме $\mathcal{D}$. Поэтому при $i = i_*, i_*+1, \ldots, r$

$$\left\| \mathfrak{L}[J^{m-\gamma_i} Z](\lambda) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \left\| \lambda^{\gamma_i - m} R_\lambda \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{C}{|\lambda|^{\alpha - \gamma_i + m}},$$

$$\|D^{\gamma_i - m + l} Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C t^{m - \gamma_i - l + \alpha - 1}, \quad l = 0, 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

$$D^{\gamma_i - m + l} Z(0) = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{\gamma_i - m + l} R_\lambda e^{\lambda t} x d\lambda = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

так как $\gamma_i-m+l-\alpha<\gamma_i-1-\alpha<-1$ при $l=0,1,\dots,m-1$. Следовательно, при $l=0,1,\dots,m-1$

$$D^{\gamma_i-m+l}\int\limits_{t_0}^{t}Z(t-s)B^z(s)ds=D^l\int\limits_{t_0}^{t}J^{m-\gamma_i}Z(t-s)B^z(s)ds=\int\limits_{t_0}^{t}D^{\gamma_i-m+l}Z(t-s)B^z(s)ds,$$

$$D^{\gamma_i-m+l}\int\limits_{t_0}^{t}Z(t-s)B^z(s)ds|_{t=t_0}=0,\quad l=0,1,\dots,m-1,$$

$$D^{\gamma_i}\int\limits_{t_0}^{t}Z(t-s)B^z(s)ds=D^m\int\limits_{t_0}^{t}J^{m-\gamma_i}Z(t-s)B^z(s)ds=\int\limits_{t_0}^{t}D^{\gamma_i}Z(t-s)B^z(s)ds,$$

в силу (2.5)

$$\left\|\lim_{t\to t_0+}D^{\gamma_i}\int\limits_{t_0}^{t}Z(t-s)B^z(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}}\le\lim_{t\to t_0+}C_1(t-t_0)^{\alpha-\gamma_i}\max_{s\in[t_0,t_0+\tau]}\|B^z(s)\|_{\mathcal{Z}}=0.$$

Значит, при $z_l\in\mathcal{D}$, $l=0,1,\dots,m-1$, $D^{\gamma_i}G(z)\in C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$; при этом

$$D^{\gamma_i}G(z(t))|_{t=t_0}=\tilde{z}_i,\quad i=1,2,\dots,r,$$

поэтому $G(z)\in S_{\tau,\delta}$ при достаточно малом $\tau>0$.

Для $x,y\in\mathcal{S}_{\tau,\delta}$, $l=0,1,\dots,m-1$, $i=i_*,i_*+1,\dots,r$ с учетом леммы 1 получаем

$$\|[G(x)]^{(l)}(t)-[G(y)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}}=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}D^lZ(t-s)[B^x(s)-B^y(s)]ds\right\|_{\mathcal{Z}}$$

$$\le C_l(t-t_0)^{\alpha-l}\sum_{j=1}^{r}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\gamma_j}(x(t)-y(t))\|_{\mathcal{Z}}\le C\tau^{\alpha-l}d(x,y),$$

$$\|D^{\gamma_i}G(x)(t)-D^{\gamma_i}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}}=\left\|\int\limits_{t_0}^{t}D^{\gamma_i}Z(t-s)[B^x(s)-B^y(s)]ds\right\|_{\mathcal{Z}}$$

$$\le C_{\gamma_i}(t-t_0)^{\alpha-\gamma_i}\sum_{j=1}^{r}\sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]}\|D^{\gamma_j}(x(t)-y(t))\|_{\mathcal{Z}}\le C\tau^{\alpha-\gamma_i}d(x,y).$$

Таким образом, при достаточно малом $\tau>0$ $d(G(x),G(y))\le d(x,y)/2$ и отображение G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве $\mathcal{S}_{\tau,\delta}$. Это единственное решение уравнения (2.2) в $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})$, поэтому по лемме 2 и с учетом замечания 4 это единственное решение задачи (1.3), (2.1) на выбранном отрезке $[t_0,t_0+\tau]$.

Теорема доказана.

3. Нелокальное решение квазилинейного уравнения

Пусть, как прежде, $r\in\mathbb{N}$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_r<\alpha$, $r_i-1<\gamma_i\le r_i\in\mathbb{Z}$, $i=1,2,\dots,r$, $B:[t_0,T]\times\mathcal{Z}^r\to\mathcal{Z}$, $t_0,T\in\mathbb{R}$, $t_0<T$. Докажем теперь существование единственного решения на заранее заданном отрезке $[t_0,T]$ (нелокального решения).

Решением задачи Коши

$$z^{(l)}(t_0)=z_l,\quad l=0,1,\dots,m-1,\tag{3.1}$$

для квазилинейного уравнения

$$D^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} D^{\alpha_k} A_k z(t) + B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t)), \quad t \in (t_0, T], \tag{3.2}$$

назовем функцию $z \in C((t_0,T];\mathcal{D}) \cap C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$ такую, что $D^\alpha z \in C((t_0,T];\mathcal{Z})$, $D^{\alpha_k} z \in C((t_0,T];D_{A_k})$, $k = 1,2,\dots,n$, $D^{\gamma_i} z \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$, $i = 1,2,\dots,r$, выполняются равенства (3.1) и (3.2) для всех $t \in (t_0,T]$.

Лемма 2 в условиях данного раздела будет выглядеть следующим образом.

Лемма 4. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \ge 0$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $B \in C([t_0,T] \times \mathcal{Z}^r; \mathcal{D})$. Тогда функция z является решением задачи* (3.1), (3.2) *на отрезке $[t_0,T]$, если и только если $z \in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})$ и при всех $t \in [t_0,T]$ выполняется равенство*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Z(t-s) B(s, D^{\gamma_1} z(s), D^{\gamma_2} z(s), \dots, D^{\gamma_r} z(s)) ds.$$

Отображение $B : [t_0,T] \times \mathcal{Z}^r \to \mathcal{Z}$ называется липшицевым по $\bar{x} \in \mathcal{Z}^r$, если существует такое $q > 0$, что для любых $(s,\bar{x}), (s,\bar{y}) \in [t_0,T] \times \mathcal{Z}^r$ выполняется неравенство

$$\|B(s,\bar{x}) - B(s,\bar{y})\|_{\mathcal{Z}} \le q \sum_{i=1}^{r} \|x_i - y_i\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 3. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $\gamma_1 < \dots < \gamma_r < \alpha$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \ge 0$, $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, отображение $B \in C([t_0,T] \times \mathcal{Z}^r; \mathcal{D})$ липшицево по $\bar{x}$. Тогда задача* (3.1), (3.2) *имеет единственное решение на отрезке $[t_0,T]$.*

Доказательство. При фиксированных $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, зададим в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})$ отображение

$$G(z)(t) := \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t-t_0) z_l + \int_{t_0}^{t} Z(t-s) B(s, D^{\gamma_1} z(s), D^{\gamma_2} z(s), \dots, D^{\gamma_r} z(s)) ds, \quad t \in [t_0,T].$$

Отображение $t \to B(t, D^{\gamma_1} z(t), D^{\gamma_2} z(t), \dots, D^{\gamma_r} z(t))$ непрерывно действует из $[t_0,T]$ в пространство $\mathcal{D}$, поэтому по теореме 1 $G(z) \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(k)}(t_0) = z_k$ для всех $k = 0,1,\dots,m-1$. Тот факт, что при $z_l \in \mathcal{D}$, $l = 0,1,\dots,m-1$, $D^{\gamma_i} G(z) \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$, $i = 1,2,\dots,r$, доказывается так же, как в теореме 2. Поэтому $G(z) \in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})$.

Будем обозначать через G^j j-ю степень оператора G, $j \in \mathbb{N}$. Для определенности считаем, что $T - t_0 \ge 1$, в случае же $T - t_0 < 1$ дальнейшие рассуждения останутся справедливыми после замены $T - t_0$ на 1. Для $t \in [t_0,T]$, $j \in \mathbb{N}$, $y, z \in C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})$ по индукции докажем неравенство

$$\|G^j(y) - G^j(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \le \frac{c^j (t-t_0)^{\alpha-\gamma_r+j-1}}{(j-1)!} \|y - z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \tag{3.3}$$

при некотором $c > 0$.

Действительно, для $j = 1$, $l = 0,1,\dots,m-1$ имеем в силу (2.4) и леммы 1

$$\|[G(y)]^{(l)}(t) - [G(z)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \le C_1 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-l-1} \|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds$$

$$\leq C_2 q\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^\alpha (t-t_0)^{\alpha-\gamma_r},$$

а с учетом (2.5) при $i=i_*, i_*+1, \ldots, r$

$$\|D^{\gamma_i}G(y)(t)-D^{\gamma_i}G(z)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-\gamma_i-1}\|B^y(s)-B^z(s)\|_{\mathcal{Z}}ds$$

$$\leq C_2 q\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^\alpha (t-t_0)^{\alpha-\gamma_r}.$$

Поэтому

$$\|G(y)-G(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq C_2 Nq\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(T-t_0)^\alpha (t-t_0)^{\alpha-\gamma_r},$$

где $N=m+r-i_*+1$ — количество слагаемых в определении нормы в $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})$.

Далее при $l=0,1,\ldots,m-1$

$$\|[G^2(y)]^{(l)}(t)-[G^2(z)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-l-1}\|B^{G(y)}(s)-B^{G(z)}(s)\|_{\mathcal{Z}}ds$$

$$\leq C_2 q(T-t_0)^\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\|G(y)-G(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,s];\mathcal{Z})}ds$$

$$\leq C_2^2 Nq^2(T-t_0)^{2\alpha}\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{\alpha-\gamma_r+1},$$

$$\|D^{\gamma_i}G^2(y)(t)-D^{\gamma_i}G^2(z)(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-\gamma_i-1}\|B^{G(y)}(s)-B^{G(z)}(s)\|_{\mathcal{Z}}ds$$

$$\leq C_2 q(T-t_0)^\alpha\int\limits_{t_0}^{t}\|G(y)-G(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,s];\mathcal{Z})}ds$$

$$\leq C_2^2 Nq^2(T-t_0)^{2\alpha}\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{\alpha-\gamma_r+1},$$

$$\|G^2(y)-G^2(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq (C_2Nq)^2(T-t_0)^{2\alpha}\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}(t-t_0)^{\alpha-\gamma_r+1}.$$

Продолжая аналогичным образом, имеем

$$\|G^3(y)-G^3(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})} \leq (C_2Nq)^3(T-t_0)^{3\alpha}\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,t];\mathcal{Z})}\frac{(t-t_0)^{\alpha-\gamma_r+2}}{2}.$$

В предположениии, что неравенство (3.3) выполнено при $c=C_2Nq(T-t_0)^\alpha$, $j=p$ получим справедливость такого неравенства при $j=p+1$.

Из (3.3) следует, что при $j\in\mathbb{N}$

$$\|G^j(y)-G^j(z)\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})} \leq \frac{c^j(T-t_0)^{\alpha-\gamma_r+j-1}}{(j-1)!}\|y-z\|_{C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})}.$$

Поэтому, если j достаточно велико, то G^j является сжимающим отображением в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})$, а значит, это отображение по теореме о неподвижной точке имеет единственную неподвижную точку в этом пространстве, которая, как известно, является единственной неподвижной точкой в пространстве $C^{m-1,\{\gamma_i\}}([t_0,T];\mathcal{Z})$ отображения G. Она и является единственным решением задачи (3.1), (3.2) на $[t_0,T]$ в силу леммы 4.

Теорема доказана.

4. Приложение к начально-краевой задаче

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$; рассмотрим уравнение

$$\Delta D_t^{3/2} v(\xi,t) = aD_t^{-1/3}\Delta v(\xi,t) + bD_t^{5/4}\Delta^2 v(\xi,t) + h(\xi, D_t^{1/2}v(\xi,t), D_t^{6/5}v(\xi,t)), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{4.1}$$

где $\Delta := D_{\xi_1}^2 + D_{\xi_2}^2 + \cdots + D_{\xi_d}^2$ — оператор Лапласа по пространственным переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d$, D_t^β — производная Герасимова — Капуто по переменной t порядка $\beta > 0$ или интеграл Римана — Лиувилля по t порядка $-\beta$ в случае $\beta \leq 0$. Будучи снабженным граничным условием Дирихле

$$v(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{4.2}$$

оператор Лапласа непрерывно обратим, поэтому уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$D_t^{3/2} v(\xi,t) = aD_t^{-1/3} v(\xi,t) + bD_t^{5/4}\Delta v(\xi,t) + \Delta^{-1} h(\xi, D_t^{1/2}v(\xi,t), D_t^{6/5}v(\xi,t)), \quad (\xi,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{4.3}$$

Здесь $\alpha = 3/2$, $m = 2$, поэтому зададим два начальных условия

$$v(\xi,0) = v_0(\xi), \ \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,0) = v_1(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{4.4}$$

При этом $n = r = 2$, $\alpha_1 = -1/3$, $\alpha_2 = 5/4$, $\gamma_1 = 1/2$, $\gamma_2 = 6/5$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Возьмем $l \in \mathbb{N}$, $l > d/2$, $\mathcal{Z} = H^l(\Omega)$ — пространство Соболева, $A_1 = aI$, $D_{A_1} = H^l(\Omega)$, $A_2 = b\Delta$, $D_{A_2} = H_0^{2+l}(\Omega) := \{w \in H^{2+l}(\Omega) : w(\xi) = 0, \, \xi \in \partial\Omega\} = \mathcal{D}$. Ввиду леммы 3(i) из [10] (см. также замечание 1) получим, что в условиях данного раздела $(A_1, A_2) \in \mathcal{A}^2_{\alpha,G}(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 > 0$.

Если $h \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, то в силу предложения 1 [20, с. 197] отображение $(w_1(\xi), w_2(\xi)) \to h(\xi, w_1(\xi), w_2(\xi))$ принадлежит классу $C^\infty((H^l(\Omega))^2; H^l(\Omega))$, поэтому

$$B(w_1,w_2)(\xi) = \Delta^{-1} h(\xi, w_1(\xi), w_2(\xi)) \in C^\infty((H^l(\Omega))^2; H_0^{2+l}(\Omega)),$$

B локально липшицево и непрерывно в норме $\mathcal{D}$. В таком случае при $v_1, v_2 \in H_0^{2+l}(\Omega)$ по теореме 2 существует единственное локальное по t решение задачи (4.2)–(4.4).

Если же, например,

$$h(w_1,w_2) = \frac{1}{1 + w_1^2 + w_2^2},$$

то производные h_{w_1}, h_{w_2} ограничены на $\mathbb{R}^2$ и отображение $B(w_1,w_2)(\xi) = \Delta^{-1} h(w_1(\xi), w_2(\xi))$ к тому же липшицево. В этом случае по теореме 3 существует единственное решение задачи (4.2)–(4.4) во всем цилиндре $\Omega \times [0,T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Учайкин В.В.** Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
2. **Tarasov V.E.** Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. NY: Springer, 2011. 505 p.
3. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publ., 1993. 976 p.
4. **Prüss J.** Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer, 1993. 366 p.
5. **Podlubny I.** Fractional differential equations. San Diego; Boston: Acad. Press, 1999. 340 p.
6. **Псху А.В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
7. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier Science Publ., 2006. 540 p.
8. **Kostić M.** Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton: CRC Press, 2015. 484 p.

9. **Федоров В.Е., Бойко К.В., Фуонг Т.Д.** Начальные задачи для некоторых классов линейных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 85–104. doi: 10.25587/SVFU.2021.75.46.006
10. **Boyko K.V., Fedorov V.E.** The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43, no. 6. P. 1293–1302. doi: 10.1134/S1995080222090049
11. **Бойко К.В., Федоров В.Е.** Обратная задача для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2022. Т. 213. С. 38–46. doi: 10.36535/0233-6723-2022-213-38-46
12. **Федоров В.Е., Туров М.М.** Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 1143–1162. doi: 10.33048/smzh.2021.62.514
13. **Туров М.М.** Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля произвольных порядков // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7, вып. 4. С. 434–446.
14. **Герасимов А.Н.** Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Приклад. математика и механика. 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.
15. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose Q is almost frequancy independent. II // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1967. Vol. 13, no. 5. P. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
16. **Novozhenova O.G.** Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union // Frac. Calcul. Appl. Anal. 2017. Vol. 20, no. 3. P. 790–809. doi: 10.1515/fca-2017-0040
17. **Bajlekova E.G.** Fractional evolution equations in banach spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001. 107 p.
18. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
19. **Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.** Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives // Springer Proc. Math. Stat. 2019. Vol. 292. P. 81–93. doi 10.1007/978-3-030-26987-6_6
20. **Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.

Поступила 28.02.2023
После доработки 15.03.2023
Принята к публикации 20.03.2023

Федоров Владимир Евгеньевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры математического анализа
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: kar@csu.ru

Бойко Ксения Владимировна
аспирант
Челябинский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: kvboyko@mail.ru

REFERENCES

1. Uchaikin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives], Ulyanovsk, ArteShock Publ., 2008, 512 p. ISBN: 978-5-904198-01-5.
2. Tarasov V.E. *Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, NY, Springer, 2011, 505 p. ISBN 978-3-642-14003-7.
3. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Philadelphia, Gordon and Breach Science Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641. Original Russian text was published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.

4. Prüss J. *Evolutionary integral equations and applications,* Basel, Springer, 1993, 366 p. doi: 10.1007/978-3-0348-8570-6
5. Podlubny I. *Fractional differential equations,* San Diego, Boston, Academic Press, 1999, 340 p. ISBN: 9780080531984.
6. Pskhu A.V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Equations in partial derivatives of fractional order], Moscow, Nauka Publ., 2005, 199 p. ISBN: 5-02-033721-8.
7. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations,* Amsterdam, Elsevier Science Publ., 2006, 540 p. ISBN: 978-0-444-51832-3.
8. Kostić M. *Abstract Volterra integro-differential equations*, Boca Raton, CRC Press, 2015, 484 p. doi: 10.1201/b18463
9. Fedorov V.E., Boyko K.V., Fuong T.D. Initial problems for some classes of linear evolutionary equations with several fractional derivatives. *Mathematical Notes of NEFU*, 2021, vol. 28, no. 3, pp. 85–104 (in Russian). doi: 10.25587/SVFU.2021.75.46.006
10. Boyko K.V., Fedorov V.E. The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov — Caputo derivatives. *Lobachevskii J. Math.,* 2022, vol. 43, no. 6, pp. 1293–1302. doi: 10.1134/S1995080222090049
11. Boyko K.V., Fedorov V.E. Inverse problem for a class of degenerate evolutionary equations with several Gerasimov–Caputo derivatives. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2022, vol. 213, pp. 38–66 (in Russian). doi: 10.36535/0233-6723-2022-213-38-46
12. Fedorov V.E., Turov M.M. The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann–Liouville derivatives. *Sib. Math. J.,* 2021, vol. 62, no. 5, pp. 925–942. doi: 10.1134/S0037446621050141
13. Turov M.M. Quasilinear equations with several Riemann–Liouville derivatives of arbitrary orders. *Chelyabinskiy Fiz.-Mat. Zhurn..,* 2022, vol. 7, no. 4, pp. 434–446 (in Russian). doi: 10.47475/2500-0101-2022-17404
14. Gerasimov A.N. Generalization of linear laws of deformation and its applications to problems of inner friction. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (in Russian).
15. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent II. *Geophysical J. International,* 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x
16. Novozhenova O.G. Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet Union. *Frac. Calcul. Appl. Anal.,* 2017, vol. 20, no. 3, pp. 790–809. doi: 10.1515/fca-2017-0040
17. Bajlekova E.G. *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces:* PhD thesis. Eindhoven, Eindhoven University of Technology, 2001, 107 p.
18. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1966. doi: 10.1007/978-3-642-66282-9 . Translated to Russian under the title *Teoriya vozmushcheniya lineinykh operatorov*, Moscow, Mir Publ., 1972, 740 p.
19. Plekhanova M.V., Baybulatova G.D. *Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives.* In: Springer Proc. Math. Stat., 2019, pp. 81–93. doi: 10.1007/978-3-030-26987-6_6
20. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.-H. *Theory and applications of hopf bifurcation.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1981, 311 p. doi: 10.1002/zamm.19820621221 . Translated to Russian under the title *Teoriya i prilozheniya bifurkatsii rozhdeniya tsikla*, Moscow, Mir Publ., 1985, 280 p.

Received February 28, 2023
Revised March 15, 2023
Accepted March 20, 2023

Funding Agency: This work was supported by the RF President's Grant for State Support of Leading Scientific Schools (project no. 2708.2022.1.1).

Vladimir Evgenyevich Fedorov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: kar@csu.ru .

Kseniya Vladimirovna Boyko, doctoral student, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: kvboyko@mail.ru .

Cite this article as: V. E. Fedorov, K. V. Boyko. Quasilinear equations with a sectorial set of operators at Gerasimov–Caputo derivatives. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 248–259 .