

УДК 519.62

ДВИЖЕНИЕ В \mathbb{R}^3 НАБЛЮДАТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ СО СТОРОНЫ ОБЪЕКТА¹

В. И. Бердышев

В работе предлагается способ движения наблюдателя по конусу, позволяющий следить за объектом на возможно большей части его траектории в условиях угрозы со стороны мини-объектов, запускаемых объектом в процессе его движения.

Ключевые слова: навигация, оптимальная траектория, движущийся объект, наблюдатель, видеосенсор, локаатор.

V. I. Berdyshev. The motion in \mathbb{R}^3 of an observer under threat from an object.

For an observer moving over a cone, a way of motion is proposed that allows the observer to monitor an object on the largest possible part of its trajectory under the threat from mini-objects launched by the object in the process of its motion.

Keywords: navigation, optimal trajectory, moving object, observer, video sensor, locator.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-23-26

В пространстве \mathbb{R}^3 задана траектория \mathcal{T} . Ради простоты будем предполагать, что \mathcal{T} является кратчайшей кривой, огибающей выпуклые множества из некоторого набора. Такая траектория состоит из дуг, расположенных на границах этих множеств и прямолинейных отрезков, соединяющих дуги. По траектории \mathcal{T} с постоянной по величине скоростью v_t движется объект t с мини-объектами m на борту, способными после запуска двигаться с постоянной по величине скоростью v_m . Мишенью для мини-объектов является наблюдатель. Слежение за объектом осуществляется с телесного вертикального конуса S с вершиной s , круговым основанием радиуса a и центром в точке A , расположенного на горизонтальной плоскости Q , которая изображает земную поверхность. Наблюдатель представляется шаром $V_\varepsilon(f)$ малого радиуса ε , $0 < \varepsilon < a$, с локатором f в центре. Далее предполагается, что локаатор способен сформировать как обычную осесимметричную, так и плоскую диаграмму направленности. Скорость v_f движения наблюдателя ограничена:

$$0 < k \leq |v_f| < K < |v_m|,$$

где k , K — заданные константы. Попадание мини-объекта m в шар $V_\varepsilon(f)$ означает гибель наблюдателя. Обозначим через \tilde{S} границу ε -расширения конуса S . Наблюдатель может двигаться

- вдоль образующих $[s, g]$, $g \in Q$, конуса S вверх и вниз так, что $f \in \tilde{S}$ и точка $q(f) = V_\varepsilon(f) \cap \partial S$ касания шара $V_\varepsilon(f)$ с конусом S скользит по образующей $[s, g]$;
- по окружности $C^b = \{f = f^b: V_\varepsilon(f) \text{ касается конуса } S \text{ и плоскости } Q, b = \rho(f, Q)\}$, при этом наблюдатель $V_\varepsilon(f)$ при $f \in C_b$ с выключенным локатором считается недоступным для мини-объекта.

¹Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

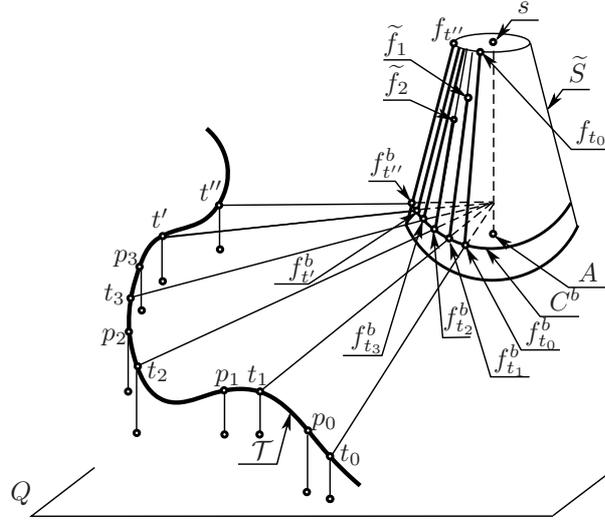


Рис. 1. Жирной линией изображена траектория \mathcal{T} движения объекта t (1-й этап) с точками t_i , начальными на i -м шаге 1-го этапа, с граничными точками дуги t', t'' , близкой к конусу \tilde{S} . На конусе изображены боковые образующие $[f_{t_i}, f_{t_i}^b]$ и окружность C^b , по которым движется наблюдатель.

Конус S выбирается так, чтобы

- с него была видна большая часть траектории \mathcal{T} , которую будем обозначать через $\mathcal{T} = \widehat{t_0, t^0}$,
- ось конуса $\{\lambda s + (1 - \lambda)A: \lambda \in \mathbb{R}\}$ не пересекалась с \mathcal{T} .

В работе предлагается способ движения наблюдателя по конусу S , позволяющий следить за объектом t на возможно большей части его траектории в условиях угрозы со стороны мини-объектов, запускаемых объектом в процессе его движения. Кроме того, для расширения кругозора целесообразно из возможных вариантов участков траектории наблюдателя выбирать наиболее высокие.

Пусть $t \in \mathcal{T}$, $R(t)$ — плоскость, содержащая точки s, A, t , и $Z_t = [s, q]$ — образующая конуса S , $Z_t \subset R(t) \cap \partial S$, из пары образующих, ближайшая к t . Через f_t обозначим точку такую, что $\|s - f_t\| = \varepsilon$, и образующая Z_t является касательной к шару $V_\varepsilon(f_t)$ в точке s . Позицию участников движения будем обозначать через $\mathcal{P} = \{f, t, m\}$, а условие присутствия мини-объекта на движущемся объекте t — в виде $m \in t$. Процедура слежения наблюдателем за объектом выполняется в несколько этапов, а внутри каждого этапа — по шагам.

Первый этап. Шаг 0 (см. рис. 1). Из исходной позиции $\mathcal{P}_0 = \{f_0, t_0, m_0 \in t_0\}$ объект, обнаружив наблюдателя f_0 , где $f_0 = f_{t_0}$, с включенным локатором, направляет мини-объект m_0 в сторону конуса S , а сам движется по \mathcal{T} со скоростью v_t . Мини-объект преследует движущегося наблюдателя. Ради простоты предполагается, что выбранное положение конуса S позволяет наблюдателю, стартующему из начальной позиции f_0 , установить скорость v_f , $k < |v_f| < K$ такую, что время τ_0 его движения с включенным локатором по образующей Z_t от точки f_{t_0} до точки $f^b = f_{t_0}^b = R(t_0) \cap C^b$ меньше времени движения мини-объекта от t_0 до f^b :

$$\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_f(f_0, f^b) = \frac{|\widehat{f_0, f^b}|}{|v_f|} < \frac{\rho(t_0, f^b)}{|v_m|} = \tau_m(t_0, t^b). \quad (1)$$

За это время наблюдатель достигает недостижимой для мини-объекта m_0 точки f^b (для нее шар $V_\varepsilon(f^b)$ касается конуса S и плоскости Q) и выключает локатор, а объект t , двигаясь по \mathcal{T} со скоростью v_t , приходит в точку $p_0 \in \mathcal{T}$ такую, что $|\widehat{t_0, p_0}| = |v_t| \cdot \tau_0$. В итоге мини-объект не достигает цели, наблюдатель отследил движение объекта на дуге $\widehat{t_0, p_0} \subset \mathcal{T}$, и реализуется

позиция

$$\mathcal{P} = \{f_{t_0}^b, p_0, m_0 \in V_\delta(f_{t_0}^b) \setminus \{f_{t_0}^b\}\}$$

при некотором $\delta > 0$.

Сформируем позицию $\mathcal{P}_1(f, t, m)$. С позиции $f_{t_0}^b$ наблюдатель $V_\varepsilon(f_{t_0}^b)$ начинает движение на максимальной скорости $|v_f| = K$ по окружности C^b (вдогонку за объектом), используя локатор с плоской диаграммой направленности, определяемой плоскостью $R(f^b)$, натянутой на s, A, f^b . Поскольку радиус окружности C^b мал в сравнении с расстоянием $\rho(A, \mathcal{T})$, то скорость движения точки $R(f^b) \cap \mathcal{T}$ превосходит скорость движения объекта t по траектории \mathcal{T} . Поэтому за короткое время точка $\widehat{R(f^b) \cap \mathcal{T}}$ пройдет точку $p_0 \in \mathcal{T}$ и достигнет объект в некоторой позиции $t_1 \in \mathcal{T}$. Участок $\widehat{p_0, t_1} \subset \mathcal{T}$ объект проходит вне наблюдения. Пусть $f_{t_1}^b \in C^b$ — позиция наблюдателя в момент, когда случилось равенство $R(f^b) \cap \mathcal{T} = t_1$. В этот момент объект t_1 обнаруживает наблюдателя и посылает в его сторону мини-объект m_1 . Сформирована позиция

$$\mathcal{P}_1 = \{f_{t_1}^b, t_1, m_1 \in t_1\}.$$

На шаге 1 наблюдатель, отслеживая объект, со скоростью движения $v_f, |v_f| < K$, движется “вверх” по образующей Z_{t_1} так, что центр f шара $V_\varepsilon(f)$ преодолевает расстояние от $f_{t_1}^b$ до некоторой точки $\tilde{f}_1 \in Z_{t_1}$ и затем обратно по Z_{t_1} от точки \tilde{f}_1 до $f_{t_1}^b$, также отслеживая объект t . После этого он выключает локатор. За потраченное наблюдателем время объект приходит в некоторую точку $p_1 \in \widehat{t_1, t^0}$. Точка \tilde{f}_1 выбирается в виде

$$\tilde{f}_1 = f_{t_1}^b + \lambda(f_{t_1} - f_{t_1}^b), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

так, что выполняется неравенство

$$\frac{2\|f_{t_1}^b - \tilde{f}_1\|}{|v_f|} < \frac{\|f_{t_1}^b - t_1\|}{|v_m|}, \quad (2)$$

где f_{t_1} — точка из \tilde{S} такая, что $\|s - f_{t_1}\| = \varepsilon$ и образующая Z_{t_1} является касательной к шару $V_\varepsilon(f_{t_1})$ в точке s . При малом λ условие (2) выполняется, поскольку $f_{t_1}^b - \tilde{f}_1 = -\lambda(f_{t_1} - f_{t_1}^b)$. На пути от $f_{t_1}^b$ до \tilde{f}_1 наблюдатель следит за объектом, поэтому он заинтересован в том, чтобы скорость v_f была меньше, а его путь, а значит, и путь объекта, были бы возможно больше. Но при малой $|v_f|$ наблюдатель подвержен опасности со стороны мини-объекта m_1 . В связи с этим представляет интерес задача

$$\min_{|v_f|} \max \left\{ \lambda : \frac{\|f_{t_1}^b - \tilde{f}_1\|}{\|f_{t_1}^b - t_1\|} \leq \frac{|v_f|}{|v_m|}, \quad 0 < \lambda \leq 1 \right\}. \quad (3)$$

В момент возвращения наблюдателя в точку $f_{t_1}^b$ образуется позиция $\mathcal{P} = \{f_{t_1}^b, p_1, m_1 \in V_\delta(f_{t_1}^b) \setminus \{f_{t_1}^b\}\}$. Далее наблюдатель, включив локатор с плоской диаграммой направленности, определяемой плоскостью $R(f^b)$, на максимальной скорости K движется по окружности C^b , догоняя движущийся по \mathcal{T} объект. Пусть в момент “захвата” плоскостью $R(f^b)$ объект находился в позиции t_2 , а наблюдатель — в позиции $f_{t_2}^b$. В итоге наблюдатель демаскирован, а объект направляет в сторону наблюдателя $f_{t_2}^b$ очередной мини-объект m_2 . Сформирована позиция $\mathcal{P}_2 = \{f_{t_2}^b, t_2, m_2 \in t_2\}$.

Следующий шаг 2 выполняется по аналогии с шагом 1 и т. д.

Процесс формирования позиций $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}, \dots$ приостанавливается с точки t_n , когда, по мнению наблюдателя, величина $\|\tilde{f}_n - f_{t_n}^b\|$ становится малой и нецелесообразно решать задачу (3) для номера $n + 1$. Начиная с точки $t_n \stackrel{\text{def}}{=} t'_n$, он отключает локатор, завершая первый этап и возобновляя слежение за объектом, когда точка $t \in \mathcal{T}$, $t \stackrel{\text{def}}{=} t''_n$, отстоит достаточно далеко от конуса S , точнее, когда

$$\frac{\|s - f_t^b\|}{K} \leq \frac{\|t - f_t^b\|}{|v_m|}.$$

Второй этап. Наблюдатель начинает слежение, стартуя из точки f_t “вниз” по образующей Z_t , где $t = t''_n$. Далее повторяются действия, выполненные объектом, мини-объектом и наблюдателем на первом этапе и т. д. Справедлива

Теорема 1. Предложенный способ движения наблюдателя по конусу S позволяет построить на траектории \mathcal{T} сетку узлов

$$t_0, p_0, t_1, p_1, t_2, p_2, \dots, t_{n-1}, p_{n-1}, t_n; \quad t'_n, t''_n; \quad t_{n+1}, p_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+k}; \quad t'_{n+k}, t''_{n+k}; \quad \dots,$$

при этом для каждого i дугу $\widehat{t_i, p_i}$ объект t преодолевает под наблюдением, а дуги $\widehat{p_i, t_{i+1}}$, $\widehat{t'_i, t''_i}$ — вне зоны наблюдения.

Выражаю благодарность В.Б. Костюсову за обсуждение тематики исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Оптимальная траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта с поражающим устройством // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. С. 73–76. doi: 10.31857/S2686954321040032
2. **Лю В.** Методы планирования пути в среде с препятствиями (обзор) // Математика и мат. моделирование. 2018. № 1. С. 15–58. doi: 10.24108/mathm.0118.0000098

Поступила 11.03.2023

После доработки 15.04.2023

Принята к публикации 24.04.2023

Бердышев Виталий Иванович
 академик РАН, научный руководитель
 Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
 г. Екатеринбург
 e-mail: bvi@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. Optimal trajectory of an observer tracking the motion of an object equipped with a striking device. *Dokl. Math.*, 2021, vol. 104, no. 1, pp. 221–224. doi: 10.1134/S1064562421040037
2. Lyu V. *Metody planirovaniya puti v srede s prepyatstviyami (obzor)* [Path planning methods in an environment with obstacles (a review)]. *Matematika i Mat. Modelirovanie*, 2018, vol. 1, pp. 15–58 (in Russian). doi: 10.24108/mathm.0118.0000098

Received March 11, 2023

Revised April 15, 2023

Accepted April 24, 2023

Funding Agency: This study is a part of the research carried out at the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2023-913).

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: bvi@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Berdyshev. The motion in \mathbb{R}^3 of an observer under threat from an object. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 23–26.