

УДК 517.958

ПЛОСКИЙ КОЛЛАПС ГАЗА С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ¹**Л. З. Уразбахтина, Ю. В. Юлмухаметова**

Рассмотрены решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей с однородной деформацией. Матрица линейности является диагональной невырожденной с различными собственными числами. Уравнение состояния есть уравнение с разделенной плотностью. Для рассматриваемого решения с уравнением состояния для политропного газа записаны уравнения мировых линий движения частиц газа. Движение частиц описывает коллапсы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях в различные моменты времени. Показаны движения ограниченных выделенных объемов частиц. Описаны движения звуковой поверхности, характеристик и характеристического коноида. Приведены приближенные формулы для вычисления движения характеристик, проходящих через любую заданную поверхность. Получено точное решение с неоднородной деформацией для матрицы линейности рассматриваемого решения без условий инвариантности плотности и давления.

Ключевые слова: газовая динамика, линейное поле скоростей, однородная деформация, неоднородная деформация, политропный газ, коллапс, характеристики.

L. Z. Urazbakhtina, Yu. V. Yulmukhametova. A planar collapse of a gas with a linear velocity field.

Solutions of gas dynamics equations with a linear velocity field and uniform deformation are considered. The linearity matrix is diagonal nondegenerate with different eigenvalues. The state equation is an equation with separated density. The world lines of motion of gas particles are written for a solution of the state equation for a polytropic gas. The motion of particles describes collapses in two mutually perpendicular planes at different times. The motions of bounded specific volumes of particles are shown. The motions of a sonic surface, characteristics, and the characteristic conoid are described. Approximate formulas are given for calculating the motion of characteristics passing through any given surface. An exact solution with nonhomogeneous deformation is obtained for the linearity matrix of the solution without the conditions of density and pressure invariance.

Keywords: gas dynamics, linear velocity field, homogeneous deformation, inhomogeneous deformation, polytropic gas, collapse, characteristics.

MSC: 76N15, 76M60

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-207-216

Введение

Изучение газовой динамики частиц, скорости которых являются линейными функциями от пространственных координат, тесно связано с исследованием динамики жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов. Еще Риман [1] показал, что при условии линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общий тип движения, совместимый с условием сохранения эллипсоидальной формы фигуры равновесия, представляет собой суперпозицию равномерного вращения и внутренних движений с равномерно распределенной завихренностью жидкости. Интерес к данной области обуславливают ее значением для космогонии и астрофизики, в частности, важностью ее выводов для теории фигур небесных тел. Обзор работ по тематике данного исследования наиболее широко представлен в сборнике [2]. Современные исследования по линейному полю скоростей можно найти в работе [3], в которой изучены двумерные уравнения течения невязкой сжимаемой жидкости в осесимметричных координатах. В [4] для системы уравнений идеального политропного газа на равномерно вращающейся плоскости найдены первые интегралы, соответствующие движению с однородной деформацией (линейное поле скоростей).

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0052.

При классификации уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей и произвольным уравнением состояния было получено 11 моделей [5]. Каждая из них представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (24-го и выше). Есть случаи интегрируемых систем. К таким подмоделям относятся инвариантные и частично инвариантные решения с линейным полем скоростей [6; 7]. Полученные формулы, как правило, описывают пространственное движение частиц с коллапсом на некотором многообразии меньшей размерности, где плотность имеет особенность. После коллапса уже другое решение, заданное этими же формулами, описывает мгновенный источник или взрыв. Для решений, определенных в части пространства, возникает проблема их сопряжения через слабые или сильные разрывы, чтобы устранить особенность с бесконечной плотностью. Для этого надо знать поведение характеристик на решении уравнений газовой динамики. Важно выделить оригинальные свойства таких движений газа: движение выделенного ограниченного объема, движение звуковых характеристик и характеристического коноида, движение звуковой поверхности. В работе [6] была представлена классификация и проведено полное интегрирование модели с линейным полем скоростей. Остался неразобраным вопрос о физических аспектах полученного решения. Поэтому в данной работе проведено исследование семейства точных решений уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей и однородной деформацией с одним из случаев классификации, а именно, с диагональной невырожденной матрицей линейности, различными собственными числами и ускорением, равным нулю. Также получено точное решение с неоднородной деформацией.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваются уравнения идеальной газовой динамики [8]

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ \rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ S_t + (\vec{u} \cdot \nabla) S = 0 \quad \text{или} \quad p_t + (\vec{u} \cdot \nabla) p + \rho a^2 \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $t, \vec{x} = (x, y, z)$ — независимые переменные, $\vec{u} = (u, v, w)$ — скорость, p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, уравнение состояния $p = f(\rho, S)$ замыкает систему (1.1), $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука газа. Если из уравнения состояния выразить энтропию $S = g(\rho, p)$, то $a^2(p, \rho) = f_\rho(\rho, g(p, \rho))$.

Решение уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей имеет вид

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (1.2)$$

Если $\vec{u}_0 = 0$, то (1.2) задает решение с однородной деформацией. Если $\vec{u}_0 \neq 0$, то соотношение (1.2) является решением с неоднородной деформацией. Представление плотности и давления общего вида. Для всех подалгебр, у которых инвариантное решение представляется в виде (1.2) выполняется равенство $A' + A^2 = 0$.

Рассмотрим частное решение уравнений газовой динамики, заданное формулами в декартовой системе координат [6]:

$$u = \frac{\lambda_1 x + \bar{u}_0}{\lambda_1 t + 1}, \quad v = \frac{\lambda_2 y + \bar{v}_0}{\lambda_2 t + 1}, \quad w = \frac{\lambda_3 z + \bar{w}_0}{\lambda_3 t + 1}, \quad (1.3)$$

$$k(p) = K\Pi^{-1}(t), \quad \rho = F(\vec{u})\Pi^{-1}(t). \quad (1.4)$$

Здесь $\Pi(t) = \prod_{i=1}^3 (\lambda_i t + 1)$; $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0$ — произвольные постоянные; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — произвольные, не равные друг другу, постоянные, отличные от нуля ($\lambda_i \neq 0$); $F(\vec{u})$ — произвольная функция скорости; K — постоянная. Уравнение состояния есть уравнение с разделенной плотностью [6]

$$B(S)k(p) = \rho, \quad (1.5)$$

где $B(S)$ — функция энтропии S . Если положить в (1.5) $k = p^{1/\gamma}$, то получим уравнение состояния для политропного газа. Квадрат скорости звука вычисляется по формуле (в скобках указан квадрат скорости звука для политропного газа)

$$a^2 = \frac{k(p)}{\rho k'(p)} \quad (a^2 = \gamma p \rho^{-1}). \quad (1.6)$$

Уравнения газовой динамики с уравнением состояния (1.5) допускают следующие преобразования [7; 8].

1. Переносы: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$, $t' = t + a_0$.
2. Галилеевы переносы: $\vec{x}' = \vec{x} + t\vec{b}$, $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{b}$.
3. Вращения: $\vec{x}' = O\vec{x}$, $\vec{u}' = O\vec{u}$, $OO^T = I$, $\det O = 1$.
4. Растяжения: $t' = cc_1t$, $\vec{x}' = c\vec{x}$, $\vec{u}' = c_1^{-1}\vec{u}$, $\rho' = c_1^2\rho$ и для политропного газа $\rho' = c_2\rho$, $p' = c_2p$.
5. Отражения: $t' = -t$, $\vec{x}' = -\vec{x}$ и $t' = -t$, $\vec{u}' = -\vec{u}$.

Решение (1.3) с точностью до этих преобразований принимает вид

$$u = \frac{x}{t + \mu}, \quad v = \frac{y}{t}, \quad w = \frac{z}{t - 1}, \quad k(p) = K\Pi^{-1}(t), \quad \rho = F(\vec{u})\Pi^{-1}(t), \quad (1.7)$$

где $\Pi(t) = (t + \mu)t(t - 1)$, $\mu \neq 0, 1$ — постоянная. Из (1.7) следует, что плотность обращается в ноль при $t \rightarrow \pm\infty$ для ограниченной функции F , при этом скорости стремятся к нулю, т. е. со временем газ стремится к покою, растекаясь до вакуума. Получается четыре различных решения:

- а) $1 < t < \infty$, б) $0 < t < 1$, в) $-\mu < t < 0$, г) $-\infty < t < -\mu$.

Утверждение 1. При некотором преобразовании решение (1.7) при $-\mu < t < 0$ переходит в решение при $0 < t < 1$ и решение (1.7) при $-\infty < t < -\mu$ переходит в решение при $1 < t < \infty$.

Доказательство. После замен, которые допускают уравнения газовой динамики,

$$\begin{aligned} \mu^{-1} &\rightarrow \mu, \quad -\mu^{-3}K \rightarrow K, \quad -\mu^{-5}F(\mu^{-1}\vec{u}) \rightarrow F(\mu^{-1}\vec{u}), \\ -\mu^{-1}t &\rightarrow t, \quad x \rightarrow -z, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow x, \\ \mu u &\rightarrow w, \quad \mu v \rightarrow v, \quad \mu w \rightarrow -u, \quad \mu^{-2}\rho \rightarrow \rho, \end{aligned}$$

следуют переходы, описанные в утверждении. □

Как следует из утверждения 1, достаточно изучить движение газа для решений а) и б).

2. Траектории движения частиц

Мировые линии частиц удовлетворяют системе дифференциальных уравнений [8]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t).$$

Интегральные кривые последнего уравнения представляют собой мировые линии частиц газа в пространстве $\mathbb{R}^4(t, \vec{x})$, проекции которых в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ представляют собой траектории частиц. Для решения (1.7) система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t + \mu}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{t - 1}.$$

Интегралы этой системы задаются равенствами

$$x = C_1(t + \mu), \quad y = C_2t, \quad z = C_3(t - 1), \quad (2.1)$$

где $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ — постоянные, которые являются глобальными лагранжевыми координатами. Частицы летят по прямым со скоростями \vec{C} . Матрица Якоби перехода от эйлеровых координат к лагранжевым имеет вид $J(t) = \text{diag}(t + \mu, t, t - 1)$. Определитель матрицы Якоби обращается в ноль в моменты времени $t = -\mu, 0, 1$. В эти моменты времени ранг матрицы Якоби равен 2. Значит, особые многообразия — плоскости, на которых плотность обращается в бесконечность. Для решения б) частицы из плоскости $y = 0$ в момент времени $t = 0$ летят по прямым линиям и в момент времени $t = 1$ попадают на плоскость $z = 0$, а затем с течением времени летят в бесконечность для решения а).

Рассмотрим в момент времени $t = 0$ прямоугольник на плоскости xOz . Вершины прямоугольника находятся в точках $A(0, 0, 0)$, $B(x_0, 0, 0)$, $C(0, 0, z_0)$, $D(x_0, 0, z_0)$. В момент времени $t = 0$ в каждой точке плоскости xOz находится множество различных материальных точек, различающихся между собой скоростями $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$. Так, в точке $D(x_0, 0, z_0)$ находятся материальные точки со скоростями $(\mu^{-1}x_0, v_0, -z_0)$, где v_0 — произвольная. Далее ограничим скорости $\alpha \leq v_0 \leq \beta$. В точках $A(0, 0, 0)$ и $C(0, 0, z_0)$ находятся материальные точки со скоростями $(0, v_0, 0)$ и $(0, v_0, -z_0)$. В точке $B(x_0, 0, 0)$ — материальные точки со скоростями $(\mu^{-1}x_0, v_0, 0)$. Где окажется этот прямоугольник в момент времени $t = 1$? Материальные точки из A перейдут в $A_1(0, v_0, 0)$, материальные точки из B перейдут в точки $B_1((1 + \mu)\mu^{-1}x_0, v_0, 0)$, материальные точки из $C(0, 0, z_0)$ перейдут в точки $C_1(0, v_0, 0)$, материальные точки из $D(x_0, 0, z_0)$ — в точки $D_1((1 + \mu)\mu^{-1}x_0, v_0, 0)$. Получается, что материальные точки, лежащие на стороне AC , перейдут в ось Oy . Материальные точки на стороне BD перейдут на прямую $x = (1 + \mu^{-1})x_0$. Таким образом, прямоугольник перейдет в полосу на плоскости xOy для произвольного v_0 и в прямоугольник для ограниченных $\alpha \leq v_0 \leq \beta$ (см. рис. 1).

В момент времени $0 < t < 1$ выполняются переходы: $A \rightarrow A_t(0, v_0t, 0)$, $B \rightarrow B_t((t + \mu)\mu^{-1}x_0, v_0t, 0)$, $C \rightarrow C_t(0, v_0t, z_0(1 - t))$, $D \rightarrow D_t((t + \mu)\mu^{-1}x_0, v_0t, z_0(1 - t))$. Материальные точки в момент времени t образуют прямоугольный параллелепипед.

Положение наших материальных точек в момент $1 < t < \infty$ определяется материальными точками, которые находятся в прямоугольнике $A_1B_1C_1D_1$ при $t = 1$. В вершине $A_1(0, \alpha, 0)$ находятся материальные точки со скоростями $(0, \alpha, w_0)$, и они перейдут в точки $(0, t\alpha, w_0(t - 1))$, $0 \leq w_0 \leq -z_0$. В вершине $C_1(0, \beta, 0)$ находятся материальные точки со скоростями $(0, \beta, w_0)$, и они перейдут в точки $(0, t\beta, w_0(t - 1))$. В вершине $B_1(x_0(1 + \mu^{-1}), \alpha, 0)$ находятся материальные точки со скоростями $(\mu^{-1}x_0, \alpha, w_0)$, и они перейдут в точки $(x_0(1 + \mu^{-1}), t\alpha, w_0(t - 1))$. В вершине $D_1(x_0(1 + \mu^{-1}), \beta, 0)$ находятся материальные точки со скоростями $(x_0\mu^{-1}, \beta, w_0)$, и они перейдут в точки $(x_0(1 + \mu^{-1}t), t\beta, w_0(t - 1))$.

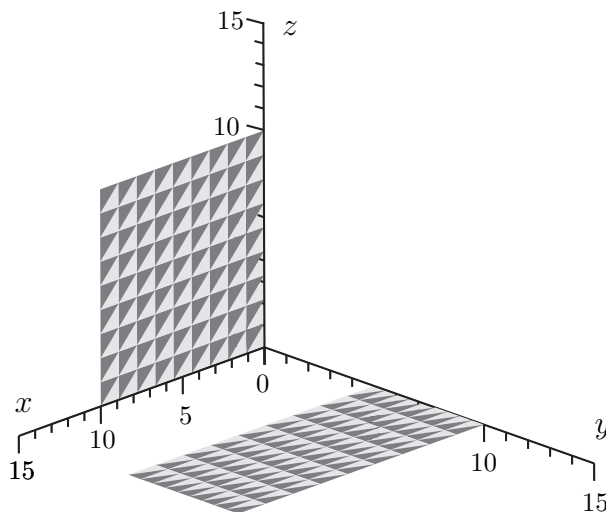


Рис. 1. Положение прямоугольника в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$.

3. Движение ограниченного объема и звуковой поверхности

Утверждение 2. Материальный объем газа, частицы которого движутся по закону (1.7), ограничен эллипсоидом

$$\frac{\left(x - x_{01} \frac{t + \mu}{t_0 + \mu}\right)^2}{\left(\frac{t + \mu}{t_0 + \mu} R\right)^2} + \frac{\left(y - y_{01} \frac{t}{t_0}\right)^2}{\left(\frac{t}{t_0} R\right)^2} + \frac{\left(z - z_{01} \frac{t - 1}{t_0 - 1}\right)^2}{\left(\frac{t - 1}{t_0 - 1} R\right)^2} = 1, \quad (3.1)$$

где t_0 — некоторый начальный момент времени, при котором объем ограничен сферой радиуса R с центром в точке (x_{01}, y_{01}, z_{01}) .

Доказательство. Рассмотрим движение объема из одних и тех же частиц, ограниченного сферой в момент времени $t = t_0$. Каждая материальная частица сферы движется по закону

$$x = \frac{x_0}{t_0 + \mu}(t + \mu), \quad y = \frac{y_0}{t_0}t, \quad z = \frac{z_0}{t_0 - 1}(t - 1).$$

Уравнение сферы, ограничивающей объем в момент $t = t_0$, имеет вид $F_0(x, y, z) = (x - x_{01})^2 + (y - y_{01})^2 + (z - z_{01})^2 - R^2 = 0$, где R — радиус сферы с центром в точке с координатами (x_{01}, y_{01}, z_{01}) .

Дифференциальное уравнение для функции F , задающей материальную поверхность $F = 0$ в момент времени t , имеет вид [9]

$$F_t + \frac{x}{t + \mu} F_x + \frac{y}{t} F_y + \frac{z}{t - 1} F_z = 0, \quad F|_{t=t_0} = F_0.$$

Общее решение задачи таково: $F(x(t + \mu)^{-1}, yt^{-1}, z(t - 1)^{-1}) = 0$. В начальный момент времени выполняется соотношение $F(x_0(t_0 + \mu)^{-1}, y_0 t_0^{-1}, z_0(t_0 - 1)^{-1}) = F_0$. Отсюда следует, что материальный объем ограничен эллипсоидом (3.1) в момент времени t . \square

При $t \rightarrow 0$ эллипсоид эволюционирует в эллипс на плоскости xOz с центром $(x_{01}\mu(t_0 + \mu)^{-1}, 0, -z_{01}(t_0 - 1)^{-1})$ и полуосями $(\mu R(t_0 + \mu)^{-1}, 0, R(t_0 - 1)^{-1})$. При $t \rightarrow 1$ эллипсоид эволюционирует в эллипс с центром $(x_{01}(1 + \mu)(t_0 + \mu)^{-1}, y_{01}t_0^{-1}, 0)$ на плоскости xOy и полуосями $((1 + \mu)R(t_0 + \mu)^{-1}, Rt_0^{-1}, 0)$ (см. рис. 2).

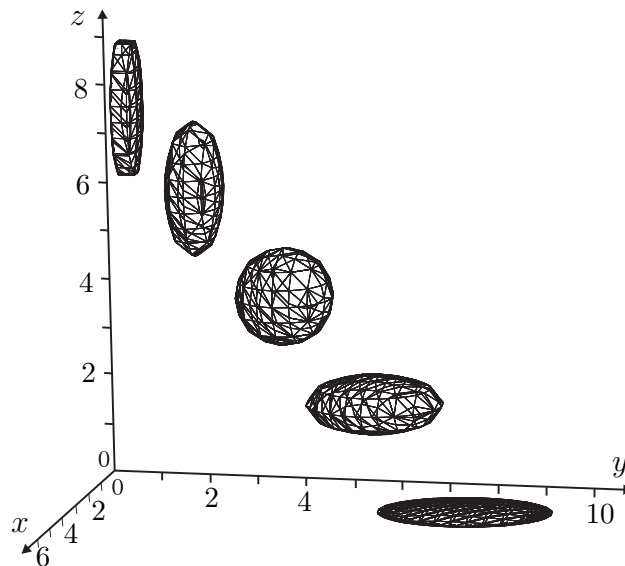


Рис. 2. Движение выделенного объема.

Рассмотрим движение звуковой поверхности. Для политропного газа уравнение состояния имеет вид $p = S\rho^\gamma$, $1 < \gamma < 2$. Квадрат скорости звука вычисляется по формуле

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma \Pi^{1-\gamma}(t)}{F(\vec{u})}.$$

Далее положим $F(\vec{u}) = F_0 > 0$, F_0 — постоянная. В этом случае звуковая поверхность $|\vec{u}| = a$ есть эллипсоид с центром в начале координат и полуосями (r_1, r_2, r_3) :

$$r_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{F_0}}(t + \mu)\Pi^{(1-\gamma)/2}(t), \quad r_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{F_0}}t\Pi^{(1-\gamma)/2}(t), \quad r_3 = \sqrt{\frac{\gamma}{F_0}}(t - 1)\Pi^{(1-\gamma)/2}(t).$$

При $t \rightarrow 0$ полуоси эллипсоида ведут себя следующим образом: $(r_1, r_2, r_3) \rightarrow (\infty, 0, \infty)$, и звуковая поверхность растекается по плоскости xOz , образуя плоское дозвуковое состояние.

При $t \rightarrow 1$ плоское дозвуковое состояние $(r_1, r_2, r_3) \rightarrow (\infty, \infty, 0)$, и звуковая поверхность растекается по плоскости xOy .

При $t \rightarrow \infty$ поведение звуковой поверхности зависит от параметра γ .

1) При $\gamma = 5/3$ полуоси $(r_1, r_2, r_3) \rightarrow \sqrt{3^{-1}5F_0^{-1}}(1, 1, 1)$. Звуковая поверхность стремится к шару, внутри которого происходит дозвуковое движение, снаружи — сверхзвуковое движение газа. Таким образом, для любого момента времени имеется трансзвуковое движение газа.

2) При $\gamma > 5/3$ полуоси $(r_1, r_2, r_3) \rightarrow (0, 0, 0)$. Звуковая поверхность превращается в точку. Трансзвуковое движение стремится к сверхзвуковому.

3) При $\gamma < 5/3$ полуоси $(r_1, r_2, r_3) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)$. Звуковая поверхность объемлет все пространство. Трансзвуковое движение стремится к дозвуковому.

4. Характеристики и характеристический коноид

Звуковые характеристики C_\pm задаются гиперповерхностями $h(t, \vec{x}) = 0$ в $R^4(t, \vec{x})$ [9]. В начальный момент $t = t_0$ они проходят через поверхность $\sigma_0 : h_0(\vec{x}) = 0$. Функция $h(t, \vec{x})$ удовлетворяет уравнению [9]

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z \pm a|\nabla h| = 0. \quad (4.1)$$

Решения уравнений (4.1) строятся методом характеристик, которые для уравнений газовой динамики называются бихарактеристиками. Бихарактеристики — это кривые, которые проходят через каждую точку двумерной поверхности σ_0 , образуя характеристическую поверхность. Уравнения бихарактеристик таковы:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \pm a|\nabla h|^{-1}\nabla h, \quad \frac{dh_j}{dt} = -\vec{u}_j \cdot \nabla h \mp a_j|\nabla h|, \quad j = t, x, y, z. \quad (4.2)$$

Все бихарактеристики, выходящие из одной точки $P(t_0, \vec{x}_0)$, образуют характеристический коноид. Бихарактеристики для коноида удовлетворяют системе (4.2) с начальными условиями $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, $h_j(t_0) = C_j$ и условиями согласования $C_0 + u_0C_1 + v_0C_2 + w_0C_3 \pm a_0|\vec{C}| = 0$, где u_0, v_0, w_0, a_0 — значения известных функций в точке P . Звуковые бихарактеристики на решении (1.7) задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dh_x}{dt} &= -\frac{h_x}{t + \mu}, & \frac{dh_y}{dt} &= -\frac{h_y}{t}, & \frac{dh_z}{dt} &= -\frac{h_z}{t - 1}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{t + \mu} \pm a\frac{h_x}{|\nabla h|}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t} \pm a\frac{h_y}{|\nabla h|}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{z}{t - 1} \pm a\frac{h_z}{|\nabla h|}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интегралы первых трех дифференциальных уравнений

$$\nabla h = (C_1(t + \mu)^{-1}, C_2t^{-1}, C_3(t - 1)^{-1}).$$

Общее решение оставшихся уравнений зависит от двух параметров C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} x - \frac{x_0(t+\mu)}{t_0+\mu} &= C_1(t+\mu)\sqrt{\gamma/F_0} \int_{t_0}^t \frac{\Pi^{(1-\gamma)/2}(s)ds}{(s+\mu)^2\sqrt{C_1^2(s+\mu)^{-2}+C_2^2s^{-2}+C_3^2(s-1)^{-2}}}, \\ y - \frac{y_0t}{t_0} &= C_2t\sqrt{\gamma/F_0} \int_{t_0}^t \frac{\Pi^{(1-\gamma)/2}(s)ds}{s^2\sqrt{C_1^2(s+\mu)^{-2}+C_2^2s^{-2}+C_3^2(s-1)^{-2}}}, \\ z - \frac{z_0(t-1)}{t_0-1} &= C_3(t-1)\sqrt{\gamma/F_0} \int_{t_0}^t \frac{\Pi^{(1-\gamma)/2}(s)ds}{(s-1)^2\sqrt{C_1^2(s+\mu)^{-2}+C_2^2s^{-2}+C_3^2(s-1)^{-2}}}, \quad |\vec{C}|^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Исключив в (4.4) параметры, получим звуковой коноид. В случаях а) и б) при t , близких к t_0 , звуковой коноид ведет себя, как сфера

$$\left(x - \frac{x_0(t+\mu)}{t_0+\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0t}{t_0}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0(t-1)}{t_0-1}\right)^2 \sim \frac{\gamma}{F_0}\Pi^{1-\gamma}(t_0)(t-t_0)^2.$$

Если сферу взять в качестве начальной поверхности для C_+ характеристики, то эта характеристика приближает характеристический коноид.

При больших временах ($t \rightarrow \infty$) поведение звукового коноида зависит от показателя γ .

При $2 > \gamma > 5/3$:

$$\left(x - \frac{x_0(t+\mu)}{t_0+\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0t}{t_0}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0(t-1)}{t_0-1}\right)^2 \sim \frac{\gamma}{F_0}4(3\gamma-5)^{-2}t_0^{5-3\gamma};$$

при $\gamma = 5/3$: $\left(x - \frac{x_0(t+\mu)}{t_0+\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0t}{t_0}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0(t-1)}{t_0-1}\right)^2 \sim (\ln t)^2$;

при $1 < \gamma < 5/3$:

$$\left(x - \frac{x_0(t+\mu)}{t_0+\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0t}{t_0}\right)^2 + \left(z - \frac{z_0(t-1)}{t_0-1}\right)^2 \sim 4(5-3\gamma)^{-2}t_0^{5-3\gamma}.$$

Для характеристик C_{\pm} , проходящих через поверхность $h_0(\vec{x}) = 0$, система (4.3) имеет следующие начальные условия:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad h_0(\vec{x}_0) = 0, \quad \nabla|_{t=t_0} = \nabla_0 h_0(\vec{x}_0). \quad (4.5)$$

В параметрическом виде начальную поверхность можно задать как $\vec{x} = \vec{x}_0(\alpha, \beta)$, α, β — локальные внутренние координаты поверхности $h_0(\vec{x}_0(\alpha, \beta)) \equiv 0$. Тогда можно выбрать множитель у функции h_0 , так что $\nabla_0 h_0 = \vec{x}_{0\alpha} \times \vec{x}_{0\beta}$,

Решение задачи (4.3), (4.5) имеет вид

$$\nabla h = ((t_0+\mu)(t+\mu)^{-1}h_{0x_0}, t_0t^{-1}h_{0y_0}, (t_0-1)(t-1)^{-1}h_{0z_0}), \quad |\nabla h| = Q(t),$$

$$x - \frac{t+\mu}{t_0+\mu}x_0 = \pm\sqrt{\gamma/F_0}(t+\mu)(t_0+\mu)h_{0x_0} \int_{t_0}^t \frac{\Pi^{(1-\gamma)/2}(s)ds}{(s+\mu)^2Q(s)},$$

$$y - \frac{t}{t_0}y_0 = \pm\sqrt{\gamma/F_0}tt_0h_{0y_0} \int_{t_0}^t \frac{\Pi^{(1-\gamma)/2}(s)ds}{s^2Q(s)},$$

$$z - \frac{t-1}{t_0-1}z_0 = \pm\sqrt{\gamma/F_0}(t-1)(t_0-1)h_{0z_0} \int_{t_0}^t \frac{\Pi^{(1-\gamma)/2}(s)ds}{(s-1)^2Q(s)}.$$

При t_1 , близких к t_0 , возле каждой точки \vec{x}_0 поверхности $h_0(\vec{x}_0) = 0$ получается коноид. Огибающие коноидов дают характеристики C_{\pm} . Если их взять за начальные поверхности в момент t_1 , то можно построить огибающие коноидов в момент t_2 , близкий к t_1 , и получить характеристики C_{\pm} в момент t_2 и т. д.

Приближенные формулы для характеристик C_{\pm} в момент $t = t_1$, близкий к t_0 , получаются путем разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора в точке t_0 и взятием только первого члена этого разложения:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{t_1 + \mu}{t_0 + \mu} x_0 &\sim \pm \sqrt{\gamma/F_0} (t_1 + \mu)(t_0 + \mu)^{-1} h_{0x_0} (t_1 - t_0) \Pi^{(1-\gamma)/2}(t_0) Q(t_0)^{-1}, \\ y_1 - \frac{t_1}{t_0} y_0 &\sim \pm \sqrt{\gamma/F_0} t_1 t_0^{-1} h_{0y_0} (t_1 - t_0) \Pi^{(1-\gamma)/2}(t_0) Q(t_0)^{-1}, \\ z - \frac{t_1 + \mu}{t_0 + \mu} z_0 &\sim \pm \sqrt{\gamma/F_0} (t_1 - 1)(t_0 - 1)^{-1} h_{0z_0} (t_1 - t_0) \Pi^{(1-\gamma)/2}(t_0) Q(t_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Разбивка на малые временные интервалы и использование локальных координат начальной поверхности позволяют приближенно строить характеристики в параметрической форме до тех пор, пока различные точки характеристик не начнут совпадать (самопересечение поверхности).

5. Точное решение с неоднородной деформацией

Решение (1.7) является решением с однородной деформацией с матрицей линейности диагонального вида

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{t + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t - 1} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Найдем точное решение с неоднородной деформацией с матрицей (5.1). Для этого заметим, что для матрицы A вида (5.1) выполняется соотношение $A' + A^2 = 0$. При этом построение характеристического коноида и звуковой поверхности производилось для политропного газа. Основываясь на этих данных, делаем вывод, что для нахождения решения необходимо выбрать подмодель 2 из [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' + 2\mathcal{S}A &= (1 - \gamma)\mathcal{S} \operatorname{tr}A, \quad A' + A^2 = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}^T, \\ \vec{v}' + A^T \vec{v} + \mathcal{S} \vec{u}_0 &= (1 - \gamma)\vec{v} \operatorname{tr}A, \quad \vec{u}_0' + A \vec{u}_0 = \vec{v}, \\ \rho &= 2e^{-\int \operatorname{tr}A dt} R'(I), \quad I = (\vec{x} \cdot \mathcal{S} \vec{x} + 2\vec{v} \cdot \vec{x}) e^{-(1-\gamma) \int \operatorname{tr}A dt} - 2 \int \vec{u}_0 \cdot \vec{v} e^{-(1-\gamma) \int \operatorname{tr}A dt} dt, \\ p &= \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) + p_0 \frac{1 - \rho^\gamma}{\gamma}, \end{aligned}$$

где p_0 — произвольная постоянная, R, h_0 — произвольные функции, $\operatorname{tr}A$ — след матрицы A .

Матрицу (5.1) подставим в уравнения подмодели 2. Дифференциальные уравнения на матрицы \mathcal{S} и A выполняются. А дифференциальное уравнение для вектора \vec{u}_0 в покоординатной записи примет вид

$$\begin{aligned} u_1'' + \frac{2u_1'}{t + \mu} &= (1 - \gamma) \left(u_1' + \frac{u_1}{t + \mu} \right) \operatorname{tr}A, \\ v_1'' + \frac{2v_1'}{t} &= (1 - \gamma) \left(v_1' + \frac{v_1}{t} \right) \operatorname{tr}A, \\ w_1'' + \frac{2w_1'}{t - 1} &= (1 - \gamma) \left(w_1' + \frac{w_1}{t - 1} \right) \operatorname{tr}A, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\text{tr}A = \frac{1}{t+\mu} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}$.

Замена переменных $u_1 = u_2(t+\mu)^{-1}$, $v_1 = v_2 t^{-1}$, $w_1 = w_2(t-1)^{-1}$ приводит систему (5.2) к виду $\vec{u}_2'' = (1-\gamma)\vec{u}_2' \text{tr}A$, где $\vec{u}_2(t) = (u_2, v_2, w_2)$. После повторного интегрирования компоненты вектора \vec{u}_2 полностью определяются. Обратная замена дает решение системы (5.2) следующего вида:

$$u_1 = \frac{u_{10}}{t+\mu} \int_{t_0}^t \Pi^{1-\gamma}(t) dt, \quad v_1 = \frac{v_{10}}{t} \int_{t_0}^t \Pi^{1-\gamma}(t) dt, \quad w_1 = \frac{w_{10}}{t-1} \int_{t_0}^t \Pi^{1-\gamma}(t) dt,$$

где u_{10}, v_{10}, w_{10} — постоянные интегрирования. Запишем компоненты вектора скорости (1.2), используя последние формулы для u_1, v_1 и w_1 :

$$u = \frac{x}{t+\mu} + \frac{u_{10}}{t+\mu} \int_{t_0}^t \Pi^{1-\gamma}(t) dt, \quad v = \frac{y}{t} + \frac{v_{10}}{t} \int_{t_0}^t \Pi^{1-\gamma}(t) dt, \quad w = \frac{z}{t-1} + \frac{w_{10}}{t-1} \int_{t_0}^t \Pi^{1-\gamma}(t) dt. \quad (5.3)$$

Функция плотности и давления из формул подмодели 2 имеет вид [10]

$$\rho = \frac{2R'(I)}{\Pi(t)}, \quad p = \bar{p}_0 - \frac{R(I)}{\Pi\gamma(t)}, \quad (5.4)$$

где $I = 2\vec{u}_{10} \cdot A\vec{x} - 2 \int \vec{u}_0 \cdot A\vec{u}_{10} dt$, $\vec{u}_{10} = (u_{10}, v_{10}, w_{10})$, \bar{p}_0 — постоянная.

Таким образом, решение уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей с матрицей линейности (5.1) задается формулами (5.3), (5.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Riemann В.** Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoides, Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861.
2. **Борисов А.В., Мамаев И.С.** Динамика жидких и газовых эллипсоидов. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2010. 364 с.
3. **Giron J.F., Ramsey S.D., Baty R.S.** Nemchinov-dyson solutions of the two-dimensional axisymmetric inviscid compressible flow equations // Phys. Fluids. 2020. Vol. 32, no. 12. Article no. 127116. doi: 10.1063/5.0032170
4. **Турцынский М.К.** О свойствах решений уравнений газовой динамики на вращающейся плоскости, отвечающих движениям с однородной деформацией // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2020. № 2. С. 39–45.
5. **Юлмухаметова Ю.В.** Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 208–226.
6. **Уразбахтина Л. З.** Интегрируемые гидродинамические подмодели с линейным полем скоростей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 3(51). С. 135–145.
7. **Хабиров С.В.** Нерегулярные частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1 уравнений газовой динамики // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43, № 5. С. 1168–1184.
8. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
9. **Хабиров С. В.** Лекции аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Изд-во БГУ, 2013. 224 с.
10. **Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y.** New exact solutions with a linear velocity field for the gas dynamics equations for two types of state equations // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 1. Article no. 123. doi: 10.3390/math10010123

Поступила 2.02.2023

После доработки 10.04.2023

Принята к публикации 17.04.2023

Уразбахтина Лилия Зинфировна
канд. физ.-мат. наук

доцент каф. ИИиПМИ
Уфимский университет науки и технологий
г. Уфа
e-mail: ylz@yandex.ru

Юлмухаметова Юлия Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: yulmuhametova.yuv@ugatu.su

REFERENCES

1. Riemann B. *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoides*, Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861.
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. (eds.) *Dinamika zhidkikh i gazovykh ellipsoidov* [Dynamics of liquid and gas ellipsoids]. Moscow, Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 364 p.
3. Giron J.F., Ramsey S.D., Baty R.S. Nemchinov-dyson solutions of the two-dimensional axisymmetric inviscid compressible flow equations. *Phys. Fluids*, 2020, vol. 32, no. 12, article no. 127116. doi: 10.1063/5.0032170
4. Turzynsky M. Properties of solutions to the gas dynamics equations on a rotating plane, corresponding to motions with homogeneous deformation. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2020, vol. 75, no. 2, pp. 37–43. doi: 10.3103/S002713302002003X
5. Yulmukhametova Yu. V. Submodels in gas dynamics with linear field of velocity. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2012, vol. 9, pp. 208–226 (in Russian).
6. Urazbakhitina L. Z. Integrable hydrodynamic submodels with a linear velocity field. *J. Appl. Industr. Math.*, 2013, vol. 7, no. 1. pp. 117–126. doi: 10.1134/S1990478913010110
7. Khabirov S. V. Irregular partially invariant solutions of rank 2 and defect 1 to equations of gas dynamics. *Sib. Math. J.*, 2002, vol. 43, no. 5, pp. 942–954. doi: 10.1023/A:1020119210353
8. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003, 336 p. ISBN: 5-93972-201-6
9. Khabirov S. V. *Lektsii. Analiticheskie metody v gazovoi dinamike* [Lectures. Analytical methods in gas dynamics], Ufa, Bashkir State Univ., 2013, 224 p.
10. Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New exact solutions with a linear velocity field for the gas dynamics equations for two types of state equations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 1, article no. 123. <https://doi.org/10.3390/math10010123>

Received February 2, 2023

Revised April 10, 2023

Accepted April 17, 2023

Funding Agency: The work was supported under state contract no. 0246-2019-0052.

Lilia Zinphirovna Urazbakhitina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia, e-mail: ylz@yandex.ru.

Yuliya Valer'evna Yulmukhametova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ufa Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia. e-mail: yulmuhametova.yuv@ugatu.su.

Cite this article as: L. Z. Urazbakhitina, Yu. V. Yulmukhametova. A planar collapse of a gas with a linear velocity field. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 207–216.