ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.957+517.958:532.5

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

О. Н. Ульянов, Л. И. Рубина

Рассматривается система уравнений нестационарной пространственной естественной конвекции несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Авторы применяют ранее предложенные ими методы редукции линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными (УЧП) и систем УЧП к уравнениям и системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В работе описаны общие принципы подходов, развиваемых авторами. Методы основаны на построении системы уравнений характеристик для некоторого базового уравнения в частных производных первого порядка. Базовое уравнение определенным образом конструируется при анализе исходной системы уравнений. Редукции приводят к ОДУ и системам ОДУ, в которых независимая переменная ψ, такова, что уравнение $\psi(x,y,z,t) = \text{const}$ задает поверхность уровня для некоторых неизвестных функций исходной системы УЧП. Методы применимы к УЧП и системам УЧП независимо от их типа. Получена редукция уравнений Обербека — Буссинеска к системе ОДУ, имеющей функциональный произвол. Найдено точное решение исходной системы, имеющее константный произвол. Функциональный произвол в построенной редукции позволил также получить систему ОДУ, в которой независимой переменной является температура T. Для этой системы также найдены точные решения. В работе проведен анализ возможного движения несжимаемой вязкой жидкости (вихревое или безвихревое) при естественной конвекции. Выделены случаи, когда движение жидкости является вихревым и случаи, когда осуществляется безвихревое движение. Для исходной системы УЧП в результате редукции выписано точное решение, определяющее безвихревое движение жидкости.

Ключевые слова: естественная конвекция вязкой жидкости, уравнения Обербека — Буссинеска, системы дифференциальных уравнений с частными производными, редукции, точные решения.

O. N. Ul'yanov, L. I. Rubina. On some classes of free convection motions.

A system of equations of unsteady spatial free convection of an incompressible viscous fluid in the Boussinesq approximation is considered. The analysis is based on the methods of reduction of linear and nonlinear partial differential equations (PDEs) and systems of PDEs to ordinary differential equations (ODEs) and systems of ODEs. These methods were proposed by the authors earlier, and their general principles are given in the paper. The methods are based on the construction of a system of equations of characteristics for a first-order PDE (the basic equation). This equation is constructed in a certain way by analyzing the original system of equations. The reductions lead to ODEs or systems of ODEs in which an independent variable ψ is such that the equation $\psi(x,y,z,t) = \text{const}$ defines a level surface for all unknown functions of the original system of PDEs. The methods are applicable to PDEs and systems of PDEs regardless of their type. The Oberbeck–Boussinesq equations are reduced to a system of ODEs with a functional arbitrariness, and an exact solution with a constant arbitrariness is found for the original system. The functional arbitrariness in the constructed reduction also yielded a system of ODEs in which the temperature T is an independent variable. For this system exact solutions are found. A possible (vortex or vortex-free) motion of an incompressible fluid with free convection is analyzed. The cases of vortex and vortex-free motion of the fluid are identified. An exact solution defining a vortex-free motion of the fluid is written as a result of reductions for the original system of PDEs.

Keywords: free convection of viscous fluid, Oberbeck–Boussinesq equations, partial differential equations, reductions, exact solutions.

MSC: 35C05, 35C99, 35N99, 35Q35, 76R10

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-189-206

ПАМЯТИ УЧИТЕЛЯ

Введение

В статье рассматривается система уравнений нестационарной пространственной естественной конвекции несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска [1], которая лежит в основе ряда исследований А. Ф. Сидорова [1–5]. В этих работах Анатолий Федорович Сидоров развивал и использовал как численные методы, так и аналитические подходы.

На протяжении многих десятилетий сохраняется интерес ученых, занимающихся исследованиями в целом ряде областей математических, физических и инженерных наук, к изучению свободной или естественной конвекции, обусловленной плавучестью, которая формируется из-за разности плотностей жидкости в результате неравномерного нагрева в поле силы тяжести. Этот интерес мотивирован присутствием естественной конвекции во многих процессах в природе и технике и, зачастую, ее существенным влиянием на развитие этих процессов. В качестве теоретической основы для изучения течений при естественной или смешанной конвекции широко используется приближение Буссинеска [6]. В 1897 г. он предложил упрощение задачи естественной конвекции, при котором в модели игнорируются различия в плотности, за исключением гравитационного члена уравнения импульса. Отметим, что еще ранее, в 1879 г., А. Обербек применил ту же идею в своем описании теплопроводности в жидкостях [7]. Подход не утрачивает актуальности (см. [8;9]) и оказался настолько плодотворным при численном моделировании естественной конвекции, что можно утверждать, что сформировалась специальная ветвь вычислительной гидродинамики — Computational Fluid Dynamics, которая опирается на эту идею (см. [10]). Значительные усилия исследователи прилагают и к поиску точных — в широком понимании этого термина — решений уравнений Обербека — Буссинеска.

Важная роль точных решений для любой математической модели общепризнана. Конечно, такие решения, особенно полученные в замкнутой форме, могут быть сконструированы для относительно небольшого числа математических моделей и совсем редко — для постановок начально-краевых задач. Среди методов получения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных (УЧП) и систем УЧП, которые применяют в том числе и для уравнений Обербека — Буссинеска, в первую очередь следует отметить подходы, основанные на таких мощных и универсальных методах, как теоретико-групповые методы, поиск симметрий, инвариантных и частично-инвариантных решений исследуемых уравнений [11;12] и метод дифференциальных связей [13], в развитии которого принял участие А. Ф. Сидоров. Много работ посвящено поиску решений типа Остроумова — Бириха [14; 15] и их обобщениям (см., например, [16]). Усилия исследователей также направлены на развитие методов редукции УЧП и систем УЧП к уравнениям и системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), на конструирование решений с помощью различных анзацев [17]. Упомянем также построение решений в классе Линя — Сидорова — Аристова [1; 4; 18].

Для изучения математической модели естественной конвекции в приближении Буссинеска авторы статьи применяют ранее предложенные ими методы редукции [19; 20]. Редукции УЧП и систем УЧП к уравнениям и системам ОДУ широко распространены (см., например, [21;22]). Существенная черта подходов, изложенных в статье, заключается в том, что они редуцируют исходное уравнение или систему уравнений (в данном случае уравнения Обербека — Буссинеска) к ОДУ или системе ОДУ, в которых независимой переменной является переменная ψ такая, что уравнение $\psi(x, y, z, t) = \text{const}$ задает поверхности уровня одной или нескольких функций (в данном случае — компонент вектора скорости, давления и температуры). Конечно, случай одного УЧП и случай, когда рассматривается система УЧП, отличаются коренным образом, поскольку во втором случае предположение о наличии одинаковых поверхностей уровня у всех искомых функций системы УЧП может не выполняться. Таким образом, одна из целей работы — применение развиваемых авторами подходов для еще одной математической модели — системы уравнений Обербека — Буссинеска. Эти методы применимы к УЧП и системам УЧП независимо от их типа (гиперболический, параболический, эллиптический, смешанный). Главные цели работы — редукция рассматриваемой системы УЧП к системам ОДУ, построение новых точных решений уравнений Обербека — Буссинеска и рассмотрение полученных классов свободноконвективных движений.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 описаны общие подходы, развиваемые авторами для редукции систем УЧП к системам ОДУ. В разд. 2 для редукции исходной системы к системе ОДУ использован первый подход. Выписана система ОДУ, имеюшая функциональный произвол, найдено решение этой системы (подразд. 2.1) В подразд. 2.2 функциональный произвол использован для получения систем ОДУ, независимой переменной в которых является температура. Выписаны точные решения. В разд. 3 рассмотрен вопрос о возможности реализации безвихревого движения вязкой жидкости при естественной конвекции в рамках приближения Буссинеска и первого подхода к редукции, а также в случае, когда используется комбинированный подход. Построено точное решение исходной системы уравнений. Проведено рассмотрение полученных свободноконвективных движений.

1. О некоторых подходах к редукции систем УЧП к системам ОДУ

Опишем общие принципы подходов, развиваемых авторами для редукции систем УЧП к системам ОДУ. В этих подходах имеются как общие для случаев УЧП и систем УЧП этапы, так и специфические моменты, возникающие только при рассмотрении систем УЧП.

Рассматривается в общем случае система k нелинейных уравнений в частных производных для p неизвестных функций $v_1, v_2, \ldots, v_p$ от n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Принято говорить, что если $p < k$, то система переопределенная, если $p > k$, то система недоопределенная, если $p = k$, то система определенная [13].

Переход от исходной системы УЧП к системе ОДУ основан на предположении, что решения исходной системы зависят от одной переменной (например, полагаем, что все функции $v_\mu = v_\mu(\psi)$, где $\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}$ — уравнение, которое задает поверхность уровня функций v_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, p$). Вычислив производные сложных функций $v_\mu = v_\mu(\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ и подставив их в исходную систему, получим систему равенств

$$\sum_{s=1}^{S} A_{s,j} B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \ldots, \psi_{i_1 i_2 \ldots i_{mj}}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.1}$$

Здесь нижние индексы у функции ψ указывают на номер независимой переменной, по которой вычисляется производная от функции ψ; $S \neq \infty$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, n$; $B_{s_1,j} \not\equiv B_{s_2,j}$, если $s_1 \neq s_2$. Сомножители $A_{s,j}$ в общем случае содержат функции v_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ и производные этих функций по переменной ψ соответствующих порядков.

Соотношения (1.1) можно переписать в виде системы

$$\sum_{s=1}^{S} A_{s,j} g_{s,j}(\psi) = 0, \quad B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \ldots, \psi_{i_1 i_2 \ldots i_{mj}}) = g_{s,j}(\psi), \tag{1.2}$$

где $g_{s,j}(\psi)$ — пока произвольные функции.

Пусть среди уравнений $B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \ldots, \psi_{i_1 i_2 \ldots i_{mj}}) = g_{s,j}$ есть уравнение, в которое входят только независимые переменные и первые производные функции ψ. Не умаляя общности, можно считать, что это уравнение $B_{1,1}(x_i, \psi_i) = g_{1,1}$. Для него выписываем систему уравнений характеристик [23]. Это уравнение назовем базовым. К полученной системе уравнений характеристик добавляем уравнения, описывающие изменение вдоль характеристик необходимых производных функции ψ порядка выше первого. Таким образом получаем расширенную систему уравнений характеристик (базовую систему). Далее требуем, чтобы все оставшиеся уравнения системы (1.2) были первыми интегралами выписанной базовой системы уравнений характеристик. Таким образом приходим к системе ОДУ для исходной системы УЧП.

Если среди уравнений $B_{s,j}(x_i, \psi_i, \psi_{il}, \ldots, \psi_{i_1 i_2 \ldots i_{mj}}) = g_{s,j}$ есть несколько уравнений, которые содержат только независимые переменные и первые производные функции ψ, то каждое из таких уравнений можно считать базовым и, опираясь на него, получать соответствующую систему ОДУ для исходной системы уравнений в частных производных. При решении полученных систем ОДУ одна функция остается произвольной, поэтому эту функцию (например, $g_{1,1}$) считаем постоянной или используем ее для решения. Этот порядок действий применялся ранее (см., например, [19]), назовем его первым подходом для получения системы ОДУ. Иногда кроме описанного выше порядка действий можно реализовать другие подходы, несколько модифицировав этот порядок.

В рассматриваемой исходной системе УЧП могут присутствовать векторные величины, описывающие, например, безвихревые векторные поля. Тогда можно предположить, что потенциалы векторных полей зависят от функции ψ, где уравнение $\psi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ задает их поверхности уровня (это второй подход, его условно можно назвать "физическим"). Система ОДУ выписывается аналогично после выбора базового уравнения в частных производных первого порядка и построения расширенной системы уравнений характеристик базового уравнения с присоединением к ней в качестве первых интегралов некоторых выражений (см., например, [20]).

Заметим, что в ряде случаев можно считать, что некоторые функции, входящие в систему, являются производными (например, производными по времени) от некоторых вновь вводимых в рассмотрение функций, и эти новые функции зависят от одной переменной ψ, которая является функцией, задающей их поверхность уровня. При этом предположении строится редукция к системе ОДУ, и только после решения системы ОДУ происходит возвращение к решениям исходной системы (третий подход, его условно можно назвать "математическим").

Иногда для получения системы ОДУ можно комбинировать все три подхода, считая в исходной системе часть функций, в том числе векторных, зависящими от одной переменной (первый подход), для других векторных величин использовать второй подход, а для некоторых скалярных функций (тоже, может быть, не для всех) — третий.

Описанные выше алгоритмы сведения систем УЧП к системам ОДУ применяются, если на решения системы не наложены дополнительные условия. Если для рассматриваемой системы уравнений заданы начальные, краевые или иные условия, работают несколько другие алгоритмы. Они позволяют иногда не только сводить системы УЧП к системам ОДУ, но и получать классы решений систем УЧП в явном виде, что продемонстрировано на примере рассматриваемой ниже системы Обербека — Буссинеска.

2. Редукция уравнений Обербека — Буссинеска к системам ОДУ

Рассматривается система уравнений нестационарной пространственной естественной конвекции несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\Big(\frac{p}{\rho}\Big) + \nu\Delta\mathbf{u} - \beta\mathbf{q}T, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T = \kappa\boldsymbol{\Delta}T, \quad \mathbf{div}\mathbf{u} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости; $p(x_1, x_2, x_3, t)$ — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность; $T(x_1, x_2, x_3, t)$ — температура; $\nu \neq 0$ — коэффициент кинематической вязкости; $\kappa \neq 0$ — коэффициент теплопроводности; $\beta \neq 0$ — коэффициент теплового расширения жидкости; $\mathbf{q} \neq \mathbf{0} = (0, 0, q)$, где $q = -g$, g — ускорение свободного падения.

Далее будем использовать для вектора скорости вместо $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$ обозначение $\mathbf{U}(x, y, z, t) = (u, v, w)$.

Перепишем систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned}
&\rho[u_t + uu_x + vu_y + wu_z - \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})] = -p_x,\\
&\rho[v_t + uv_x + vv_y + wv_z - \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz})] = -p_y,\\
&\rho[w_t + uw_x + vw_y + ww_z - \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz})] = -p_z - \rho\beta qT,\\
&T_t + uT_x + vT_y + wT_z - \kappa(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = 0, \quad u_x + v_y + w_z = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим независимым переменным.

2.1. Первый подход

Полагаем, что $T = T(\psi)$, $p = p(\psi)$, $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, где $\psi = \psi(x, y, z, t)$. Вычисляем производные сложных функций

$$
\begin{aligned}
&u_t = u'\psi_t, \quad u_x = u'\psi_x, \quad u_y = u'\psi_y, \quad u_z = u'\psi_z,\\
&u_{xx} = u''\psi_x^2 + u'\psi_{xx}, \quad u_{yy} = u''\psi_y^2 + u'\psi_{yy}, \quad u_{zz} = u''\psi_z^2 + u'\psi_{zz},\\
&v_t = v'\psi_t, \quad v_x = v'\psi_x, \quad v_y = v'\psi_y, \quad v_z = v'\psi_z,\\
&v_{xx} = v''\psi_x^2 + v'\psi_{xx}, \quad v_{yy} = v''\psi_y^2 + v'\psi_{yy}, \quad v_{zz} = v''\psi_z^2 + v'\psi_{zz},\\
&w_t = w'\psi_t, \quad w_x = w'\psi_x, \quad w_y = w'\psi_y, \quad w_z = w'\psi_z,\\
&w_{xx} = w''\psi_x^2 + w'\psi_{xx}, \quad w_{yy} = w''\psi_y^2 + w'\psi_{yy}, \quad w_{zz} = w''\psi_z^2 + w'\psi_{zz},\\
&p_x = p'\psi_x, \quad p_y = p'\psi_y, \quad p_z = p'\psi_z, \quad T_x = T'\psi_x, \quad T_y = T'\psi_y, \quad T_z = T'\psi_z,\\
&T_{xx} = T''\psi_x^2 + T'\psi_{xx}, \quad T_{yy} = T''\psi_y^2 + T'\psi_{yy}, \quad T_{zz} = T''\psi_z^2 + T'\psi_{zz}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Здесь и далее по тексту этого раздела штрих обозначает производную по ψ, нижние индексы у функции $\psi = \psi(x, y, z, t)$ — производные по соответствующим независимым переменным. Подставив выражения (2.3) в систему (2.2), получим равенства

$$
\begin{aligned}
&\rho\{u'[f_0 + uf_1 + vf_2 + wf_3 - \nu f_{11}] - \nu u''\} = -p'f_1,\\
&\rho\{v'[f_0 + uf_1 + vf_2 + wf_3 - \nu f_{11}] - \nu v''\} = -p'f_2,\\
&\rho\{w'[f_0 + uf_1 + vf_2 + wf_3 - \nu f_{11}] - \nu w''\} = -p'f_3 - \rho\beta q T(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2),\\
&T'[f_0 + uf_1 + vf_2 + wf_3 - \kappa f_{11}] - \kappa T'' = 0, \quad u'f_1 + v'f_2 + w'f_3 = 0,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&f_0 = \frac{\psi_t}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}, \quad f_1 = \frac{\psi_x}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}, \quad f_2 = \frac{\psi_y}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2},\\
&f_3 = \frac{\psi_z}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}, \quad f_{11} = \frac{\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2}, \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 \neq 0.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Полагаем, что $f_i = f_i(\psi)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $f_{11} = f_{11}(\psi)$. Тогда (2.5) можно рассматривать как недоопределенную [13] систему из пяти уравнений с шестью неизвестными функциями: ψ, $f_i(\psi)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $f_{11}(\psi)$. Чтобы равенства (2.4), (2.5) свелись к системе ОДУ, достаточно найти такие функции $f_i(\psi)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $f_{11}(\psi)$, при которых система (2.5) совместна. Система (2.5) совместна, если все соотношения в ней являются дифференциальными следствиями базового уравнения в частных производных первого порядка (см. разд. 1).

Утверждение 1. *Если* $f_i(\psi) = \alpha_i f_0(\psi)$, $\alpha_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, $f_{11} = -f_0'/f_0$, *то система* (2.5) *совместна и равенства* (2.4) *сводятся к системе* ОДУ.

Доказательство. Выберем первое уравнение системы (2.5) $f_0(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)-\psi_t = 0$ в качестве базового. Выпишем для этого уравнения систему уравнений характеристик [23]

$$
\frac{dx}{ds} = 2f_0\psi_x, \quad \frac{dy}{ds} = 2f_0\psi_y, \quad \frac{dz}{ds} = 2f_0\psi_z, \quad \frac{dt}{ds} = -1, \quad \frac{d\psi}{ds} = \psi_t,
$$

$$
\frac{d\psi_t}{ds} = -f_0'\psi_t(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2), \quad \frac{d\psi_x}{ds} = -f_0'\psi_x(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2),
$$

$$
\frac{d\psi_y}{ds} = -f_0'\psi_y(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2), \quad \frac{d\psi_z}{ds} = -f_0'\psi_z(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2).
$$

Считая, что $\psi_t \neq 0$, выберем ψ в качестве независимой переменной, изменяющейся на характеристике. Получаем

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{d\psi} = 2f_0\frac{\psi_x}{\psi_t} = 2\frac{\psi_x}{\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2}, \quad \frac{dy}{d\psi} = 2f_0\frac{\psi_y}{\psi_t} = 2\frac{\psi_y}{\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2}, \\
\frac{dz}{d\psi} = 2f_0\frac{\psi_z}{\psi_t} = 2\frac{\psi_z}{\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2}, \quad \frac{dt}{d\psi} = -\frac{1}{\psi_t} = -\frac{1}{f_0(\psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2)}, \\
\frac{d\psi_t}{d\psi} = -\frac{f_0'}{f_0}\psi_t, \quad \frac{d\psi_x}{d\psi} = -\frac{f_0'}{f_0}\psi_x, \quad \frac{d\psi_y}{d\psi} = -\frac{f_0'}{f_0}\psi_y, \quad \frac{d\psi_z}{d\psi} = -\frac{f_0'}{f_0}\psi_z.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Отсюда $\psi_x = c_1/f_0$, $\psi_y = c_2/f_0$, $\psi_z = c_3/f_0$, $\psi_t = (c_1^2+c_2^2+c_3^2)/f_0$, $c_i = \mathrm{const}$, $i = 1,2,3$. Подставив полученные производные ψ_x, ψ_y, ψ_z, ψ_t в (2.6), имеем

$$\frac{dx}{d\psi} = 2f_0\frac{c_1}{c_1^2+c_2^2+c_3^2} = 2f_1, \quad \frac{dy}{d\psi} = 2f_0\frac{c_2}{c_1^2+c_2^2+c_3^2} = 2f_2, \quad \frac{dz}{d\psi} = 2f_0\frac{c_3}{c_1^2+c_2^2+c_3^2} = 2f_3.$$

Тогда для совместности системы должны выполняться зависимости

$$f_i(\psi) = \alpha_i f_0(\psi), \quad \alpha_i = \frac{c_i}{c_1^2+c_2^2+c_3^2}, \quad \psi_x^2+\psi_y^2+\psi_z^2 = \frac{1}{f_0^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)},$$

$$\psi_x = \frac{\alpha_1}{f_0(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}, \quad \psi_{xx} = -\frac{f_0'\alpha_1^2}{f_0^3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)^2}.$$

Аналогично, вычислив ψ_{yy}, ψ_{zz}, получаем $f_{11} = -f_0'(\psi)/f_0(\psi)$.

Итак, все равенства в переопределенной системе (2.5) будут дифференциальными следствиями базового уравнения, если $f_i(\psi) = \alpha_i f_0(\psi)$, $\alpha_i = c_i/(c_1^2+c_2^2+c_3^2)$, $f_{11} = -f_0'(\psi)/f_0(\psi)$.

Система (2.5) с учетом полученных зависимостей, достаточных для совместности системы (2.5), сводится к системе ОДУ (независимой переменной в системе является функция ψ, $\psi(x,y,z,t) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня функций u, v, w, p, T) с произвольной функцией $f_0(\psi) \neq 0$ (нестационарное движение):

$$\begin{aligned}
&\rho\{u'[f_0^2(1+u\alpha_1+v\alpha_2+w\alpha_3)+\nu f_0'] - \nu u'' f_0\} = -p'\alpha_1 f_0^2, \\
&\rho\{v'[f_0^2(1+u\alpha_1+v\alpha_2+w\alpha_3)+\nu f_0'] - \nu v'' f_0\} = -p'\alpha_2 f_0^2, \\
&\rho\{w'[f_0^2(1+u\alpha_1+v\alpha_2+w\alpha_3)+\nu f_0'] - \nu w'' f_0\} = -p'\alpha_3 f_0^2 - \rho\beta q T(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) f_0^3, \\
&T'[f_0^2(1+u\alpha_1+v\alpha_2+w\alpha_3)+\kappa f_0'] - \kappa T'' f_0 = 0, \\
&u'\alpha_1 + v'\alpha_2 + w'\alpha_3 = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Утверждение доказано.

Рассмотрим полученную систему (2.7). Преобразуем ее, используя соотношения

$$u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3 = A_1, \quad A_1 = \mathrm{const}, \tag{2.8}$$

$$u''\alpha_1 + v''\alpha_2 + w''\alpha_3 = 0, \tag{2.9}$$

которые очевидны из ее последнего уравнения.

Подставим (2.8) в систему (2.7). Сложив первые три уравнения, умноженные соответственно на α_1, α_2 и α_3, и воспользовавшись (2.9), получим уравнение для p'. Подставив полученное p' в первые два уравнения системы и проинтегрировав затем эти уравнения, а также четвертое уравнение системы (уравнения содержат вторые производные u, v и T) один раз, получаем систему ОДУ

$$p' = -\rho\beta q\alpha_3 f_0 T, \quad T(1+A_1) - \kappa\frac{1}{f_0}T' = A_2,$$

$$u(1+A_1)-\nu u'\frac{1}{f_0}+p\frac{\alpha_1}{\rho}=A_3,\quad v(1+A_1)-\nu v'\frac{1}{f_0}+p\frac{\alpha_2}{\rho}=A_4,$$

где $A_i=\mathrm{const}$, $i=1,2,3,4$.

Выпишем решение этой системы

$$\begin{aligned}
&T=A_5\exp\Big(\frac{1+A_1}{\kappa}\int f_0d\psi\Big)+\frac{A_2}{1+A_1},\\
&p=-\frac{\rho\beta q\alpha_3}{1+A_1}\Big[A_5k\exp\Big(\frac{1+A_1}{\kappa}\int f_0d\psi\Big)+A_2\int f_0d\psi\Big]+A_6,\\
&u=\Big\{A_7+\int\Big[\Big(A_3-\frac{\alpha_1}{\rho}p\Big)\exp\Big(-\frac{1+A_1}{\nu}\int f_0d\psi\Big)\Big]d\psi\Big\}\exp\Big(\frac{1+A_1}{\nu}\int f_0d\psi\Big),\\
&v=\Big\{A_8+\int\Big[\Big(A_4-\frac{\alpha_2}{\rho}p\Big)\exp\Big(-\frac{1+A_1}{\nu}\int f_0d\psi\Big)\Big]d\psi\Big\}\exp\Big(\frac{1+A_1}{\nu}\int f_0d\psi\Big),\\
&A_j=\mathrm{const},\quad j=1,\dots,8.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Формулы (2.10) вместе с полученным из (2.8) выражением для w:

$$w=-\frac{A_1-u\alpha_1-v\alpha_2}{\alpha_3},\quad \alpha_3\neq 0,\tag{2.11}$$

представляют собой решение, зависящее от произвольной функции $f_0(\psi)$. Находим эту функцию. Из системы (2.6) имеем

$$t=-(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)h+t_0,\quad x=2\alpha_1h+x_0,\quad y=2\alpha_2h+y_0,\quad z=2\alpha_3h+z_0,\quad h=\int f_0d\psi.$$

Отсюда, полагая $t_0=\mathrm{const}$, $x_0=\mathrm{const}$, $y_0=\mathrm{const}$, $z_0=\mathrm{const}$, получаем

$$\int f_0d\psi=\frac{t+\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z+\alpha_4}{\sum_{i=1}^3\alpha_i^2},\quad \alpha_4=-(t_0+\alpha_1x_0+\alpha_2y_0+\alpha_3z_0).\tag{2.12}$$

После подстановки в (2.10) найденного выражения (2.12) для интеграла от f_0 получаем решение (2.10), (2.11), имеющее константный произвол. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Система* (2.7) *имеет решение* (2.10), (2.11)*, обладающее константным произволом.*

2.2. О редукции к системе ОДУ при $\psi(x,y,z,t)=T(x,y,z,t)$

В подразд. 2.1 мы полагали, что течение вязкой жидкости и температура зависят от функции $\psi=\psi(x,y,z,t)$, причем уравнение $\psi(x,y,z,t)=\mathrm{const}$ задает поверхность уровня всех этих функций. В результате получили систему ОДУ (2.5), (2.7), в которой функция $f_0(\psi)\neq 0$ произвольна. Этот произвол в данном подразделе будет использован для того, чтобы получить соотношения для величин, определяющих движение вязкой несжимаемой жидкости как функций от температуры.

Полагаем, что $p=p(\psi)$, $u=u(\psi)$, $v=v(\psi)$, $w=w(\psi)$ и $\psi(x,y,z,t)=T(x,y,z,t)$. Тогда $\psi(x,y,z,t)=T(x,y,z,t)$ должна обращать в тождество уравнение (см. (2.2))

$$T_t+uT_x+vT_y+wT_z-\kappa(T_{xx}+T_{yy}+T_{zz})=0,$$

что приводит к дополнительному условию, которому должна удовлетворять функция $\psi(x,y,z,t)$ из системы (2.5):

$$\psi_t+u\psi_x+v\psi_y+w\psi_z-\kappa(\psi_{xx}+\psi_{yy}+\psi_{zz})=0.\tag{2.13}$$

Условие (2.13) с учетом (2.5) и утверждения 1 сводится к условию на функцию $f_0(\psi)$: $f_0^2(\psi)(1+\alpha_1u+\alpha_2v+\alpha_3w)+\kappa f_0'(\psi)=0$, а учитывая (2.8), имеем $f_0^2(1+A_1)+\kappa f_0'=0$.

Отсюда, если $(1+A_1)\neq 0$, то

$$f_0=\frac{\kappa}{(1+A_1)T+\kappa A_0},\quad f_{11}=\frac{(1+A_1)}{(1+A_1)T+\kappa A_0},\quad f_i=\frac{\kappa\alpha_i}{(1+A_1)T+\kappa A_0},\tag{2.14}$$

где $i=1,2,3,\ A_0=\mathrm{const}$.

Если $(1+A_1)=0$, то

$$f_0=\mathrm{const},\quad f_i=\alpha_i f_0=\mathrm{const},\quad i=1,2,3,\quad f_{11}=0.\tag{2.15}$$

При $(1+A_1)\neq 0$ с учетом (2.14) система (2.7) сводится к системе ОДУ

$$\begin{gathered}\rho\Big[u'(\kappa-\nu)\frac{(1+A_1)}{(1+A_1)T+\kappa A_0}-\nu u''\Big]=-p'\frac{\kappa\alpha_1}{(1+A_1)T+\kappa A_0},\\ \rho\Big[v'(\kappa-\nu)\frac{(1+A_1)}{(1+A_1)T+\kappa A_0}-\nu v''\Big]=-p'\frac{\kappa\alpha_2}{(1+A_1)T+\kappa A_0},\\ \rho\Big[w'(\kappa-\nu)\frac{(1+A_1)}{(1+A_1)T+\kappa A_0}-\nu w''\Big]=-p'\frac{\kappa\alpha_3}{(1+A_1)T+\kappa A_0}\\ -\rho\beta q(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\frac{\kappa^2T}{[(1+A_1)T+\kappa A_0]^2},\quad u'\alpha_1+v'\alpha_2+w'\alpha_3=0.\end{gathered}\tag{2.16}$$

Если $(1+A_1)=0$ и $f_0\neq 0$, то с учетом (2.15) система (2.7) сводится к системе ОДУ

$$\begin{aligned}&\rho\nu u''=p'f_1,\\ &\rho\nu v''=p'f_2,\\ &\rho\nu w''=p'f_3+\rho\beta qT(f_1^2+f_2^2+f_3^2),\\ &u'f_1+v'f_2+w'f_3=0.\end{aligned}\tag{2.17}$$

В системах (2.16), (2.17) и далее в этом подразделе штрих обозначает дифференцирование по T.

2.2.1. О решении системы (2.16). Если $(1+A_1)\neq 0$, то, учитывая (2.8), из (2.16) получаем систему ОДУ

$$\begin{gathered}p'=-\rho\beta q\alpha_3\frac{\kappa T}{[(1+A_1)T+\kappa A_0]},\\ u''-u'\frac{(1+A_1)(\kappa-\nu)}{\nu[(1+A_1)T+\kappa A_0]}=-\beta q\frac{\alpha_1\alpha_3\kappa^2T}{\nu[(1+A_1)T+\kappa A_0]^2},\\ v''-v'\frac{(1+A_1)(\kappa-\nu)}{\nu[(1+A_1)T+\kappa A_0]}=-\beta q\frac{\alpha_2\alpha_3\kappa^2T}{\nu[(1+A_1)T+\kappa A_0]^2},\\ w''-w'\frac{(1+A_1)(\kappa-\nu)}{\nu[(1+A_1)T+\kappa A_0]}=\beta q(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{\kappa^2T}{\nu[(1+A_1)T+\kappa A_0]^2}.\end{gathered}\tag{2.18}$$

Отсюда

$$p=-\frac{\rho\beta q\alpha_3\kappa}{(1+A_1)}\Big\{T-\frac{\kappa A_0}{(1+A_1)}\ln[(1+A_1)T+\kappa A_0]\Big\}+A_{10},\quad A_{10}=\mathrm{const}.\tag{2.19}$$

Следствие 1. *Пусть выполняются соотношения* (2.18).
Если $\nu\neq\kappa$, то при $\alpha_3\neq 0$

$$\begin{aligned}&u'=A_{12}\eta(T)-\alpha_1\zeta(T),\quad v'=A_{13}\eta(T)-\alpha_2\zeta(T),\\ &w'=-\eta(T)\frac{\alpha_1A_{12}+\alpha_2A_{13}}{\alpha_3}+\zeta(T)\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3},\quad \eta(T)=[(1+A_1)T+\kappa A_0]^{[(\kappa-\nu)/\nu]},\\ &\zeta(T)=\frac{\beta q\alpha_3\kappa^2}{(\nu-\kappa)(1+A_1)^2}+\frac{\beta q\alpha_3\kappa^2A_0}{(1+A_1)^2[(1+A_1)T+\kappa A_0]},\quad A_j=\mathrm{const},\quad j=12,13.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Если $\nu = \kappa$, то при $\alpha_3 \neq 0$

$$u' = -\frac{\beta q\kappa\alpha_1\alpha_3}{(1+A_1)^2}\Big\{\frac{\kappa A_0}{[(1+A_1)T+\kappa A_0]} + \ln[(1+A_1)T+\kappa A_0]\Big\} + A_{14}, \quad A_{14} = \mathrm{const},$$
$$v' = -\frac{\beta q\kappa\alpha_2\alpha_3}{(1+A_1)^2}\Big\{\frac{\kappa A_0}{[(1+A_1)T+\kappa A_0]} + \ln[(1+A_1)T+\kappa A_0]\Big\} + A_{15}, \quad A_{15} = \mathrm{const}, \qquad (2.21)$$
$$w' = \frac{\beta q\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{(1+A_1)^2}\Big\{\frac{\kappa A_0}{[(1+A_1)T+\kappa A_0]} + \ln[(1+A_1)T+\kappa A_0]\Big\} - \frac{\alpha_1 A_{14} + \alpha_2 A_{15}}{\alpha_3}.$$

Из систем (2.20), (2.21) можно легко получить компоненты вектора скорости $u = u(T)$, $v = v(T)$, $w = w(T)$, удовлетворяющие системе (2.16).

Следствие 2. *Температура в системе* (2.16) *определяется выражением*

$$T(\xi) = \frac{1}{(1+A_1)}\Big\{\exp\Big[\frac{(1+A_1)\xi}{\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\Big] - \kappa A_0\Big\}, \quad \xi = t + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3. \qquad (2.22)$$

Доказательство. Так как $T_t = \psi_t$, то из (2.5) получаем $T_t = f_0/(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$. Но при $T = \psi$ выполняются условия (2.14). Тогда, подставив в $T_t = f_0/(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$ значения f_0 и f_i из (2.14), получаем

$$T_t = \frac{(1+A_1)T+\kappa A_0}{\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}, \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 \neq 0,$$
$$\ln[(1+A_1)T+\kappa A_0] = t\frac{(1+A_1)}{\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)} + A_{22}(x,y,z).$$

Вид функции $A_{22}(x,y,z)$ определяется после вычисления $T_x = \alpha_1 f_0/(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$, $T_y = \alpha_2 f_0/(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$, $T_z = \alpha_3 f_0/(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$. В результате имеем

$$T(\xi) = \frac{1}{(1+A_1)}\Big\{\exp\Big[\frac{(1+A_1)\xi}{\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\Big] - \kappa A_0\Big\}, \quad \xi = t + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3,$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, формулы (2.19), (2.20), (2.22) и формулы (2.19), (2.21), (2.22) позволяют получить решения системы (2.16) вида

$$u = u(x,y,z,t), \quad v = v(x,y,z,t), \quad w = w(x,y,z,t), \quad p = p(x,y,z,t).$$ □

2.2.2. О решении системы (2.17). Если $(1 + A_1) = 0$, то, продифференцировав уравнение $u'f_1 + u'f_1 + u'f_1 = 0$ из системы (2.17) и подставив в него u'', v'', w'', выраженные из соответствующих уравнений этой системы, получаем с учетом (2.15)

$$p' = -\rho\beta q f_3 T, \quad \nu u'' = -\beta q T f_1 f_3, \quad \nu v'' = -\beta q T f_2 f_3, \quad \nu w'' = -\beta q T f_3^2 + \beta q T(f_1^2+f_2^2+f_3^2).$$

Добавляем к ним из (2.5)

$$T_t = \frac{f_0}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}, \quad T_x = \frac{f_1}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}, \quad T_y = \frac{f_2}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}, \quad T_z = \frac{f_3}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}.$$

Отсюда следует

$$p = -0.5\rho\beta q f_3 T^2 + T_0, \quad u = -\frac{\beta q f_1 f_3}{6\nu}T^3 + M_1 T + u_0, \quad v = -\frac{\beta q f_2 f_3}{6\nu}T^3 + M_2 T + v_0,$$
$$w = \frac{\beta q(f_1^2+f_2^2)}{6\nu}T^3 + M_3 T + w_0, \quad T = \frac{f_0 t + f_1 x + f_2 y + f_3 z}{f_1^2+f_2^2+f_3^2}, \qquad (2.23)$$

где $M_i = \mathrm{const}$, $T_0 = \mathrm{const}$, $u_0 = \mathrm{const}$, $v_0 = \mathrm{const}$, $w_0 = \mathrm{const}$, $f_1^2+f_2^2+f_3^2 \neq 0$.

Итак, выписано точное решение (2.23) для системы (2.17). □

3. О движениях вязкой жидкости при свободной конвекции

Рассмотрим, возможно ли безвихревое движение вязкой жидкости при свободной конвекции. Ограничимся случаем односвязной области движения. Напомним, что движение жидкости относится к безвихревым (см., например, [24]), если в каждой точке области выполняется условие

$$\mathbf{rot}\mathbf{U}(x,y,z,t)\ =0,\quad \text{где}\ \ \mathbf{U}=\mathbf{U}(x,y,z,t)\ \text{ — вектор скорости жидкости.} \tag{3.1}$$

Оно называется потенциальным, если существует функция $Q(x,y,z,t)$ такая , что

$$u=Q_x,\quad v=Q_y,\quad w=Q_z,\quad \text{где } u,v,w\ \text{ — компоненты вектора скорости } \mathbf{U}. \tag{3.2}$$

В случае односвязной области движение является потенциальным тогда и только тогда, когда движение безвихревое.

3.1. О движении при $u=u(T)$, $v=v(T)$, $w=w(T)$

Выберем в качестве ψ функцию T. Выпишем систему, которой удовлетворяет функция T (см. (2.5)):

$$\begin{gathered}\frac{T_t}{T_x^2+T_y^2+T_z^2}=f_0,\quad \frac{T_x}{T_x^2+T_y^2+T_z^2}=f_1,\quad \frac{T_y}{T_x^2+T_y^2+T_z^2}=f_2,\\ \frac{T_z}{T_x^2+T_y^2+T_z^2}=f_3,\quad \frac{T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}}{T_x^2+T_y^2+T_z^2}=f_{11},\quad T_x^2+T_y^2+T_z^2\neq 0,\end{gathered} \tag{3.3}$$

$f_i(T)=\alpha_i f_0(T)$, $\alpha_i=\mathrm{const}$, $i=1,2,3$, $f_{11}=-f_0'/f_0$ при выполнении либо (2.14), либо (2.15).

3.1.1. Случай $T=T(x,y,z,t)$. Исследуем, может ли система (2.20), (2.22) описывать безвихревое движение.

Утверждение 3. *Пусть движение удовлетворяет системе* (2.20), (2.22). *Тогда*

(1) *Если*

$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2\neq 0,\quad \alpha_3\neq 0, \tag{3.4}$$

то система (2.20), (2.22) *описывает вихревое движение.*

(2) *Если $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3\neq 0$, $T=T(z,t)$, то существует решение системы* (2.20), (2.22), *описывающее безвихревое движение с потенциалом $Q=a_1x+a_2y+a_3z+a_4(t)$, где $a_i=\mathrm{const}$, $i=1,2,3$; $a_4(t)$ — произвольная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Предположим противоположное: пусть система (2.20), (2.22) в условиях (3.4) описывает безвихревое движение. Тогда выполняются соотношения (3.1), (3.2) и $Q_x=u(T(x,y,z,t)), Q_y=v(T(x,y,z,t)), Q_z=w(T(x,y,z,t))$. Вычислим производные, напомнив (см. (2.22)), что $\xi=t+x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3$:

$$Q_{xy}=u'T_\xi\alpha_2=(A_{12}\eta-\alpha_1\zeta)T_\xi\alpha_2,\quad Q_{xz}=u'T_\xi\alpha_3=(A_{12}\eta-\alpha_1\zeta)T_\xi\alpha_3,$$

$$Q_{yx}=v'T_\xi\alpha_1=(A_{13}\eta-\alpha_2\zeta)T_\xi\alpha_1,\quad Q_{yz}=v'T_\xi\alpha_3=(A_{13}\eta-\alpha_2\zeta)T_\xi\alpha_3,$$

$$Q_{zx}=w'T_\xi\alpha_1=\Big(-\eta\frac{\alpha_1A_{12}+\alpha_2A_{13}}{\alpha_3}+\zeta\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3}\Big)T_\xi\alpha_1,$$

$$Q_{zy}=w'T_\xi\alpha_2=\Big(-\eta\frac{\alpha_1A_{12}+\alpha_2A_{13}}{\alpha_3}+\zeta\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3}\Big)T_\xi\alpha_2,$$

$$T_\xi=\frac{1}{\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\exp\Big[\frac{(1+A_1)\xi}{\kappa(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}\Big],$$

где
$$\eta(T) = [(1 + A_1)T + \kappa A_0]^{[(\kappa-\nu)/\nu]},$$
$$\zeta(T) = \frac{\beta q \alpha_3 \kappa^2}{(\nu - \kappa)(1 + A_1)^2} + \frac{\beta q \alpha_3 \kappa^2 A_0}{(1 + A_1)^2[(1 + A_1)T + \kappa A_0]}, \quad A_j = \mathrm{const}.$$
В силу (3.1) имеем $Q_{xy} = Q_{yx}$. Откуда получаем $A_{12}\alpha_2 = A_{13}\alpha_1$.

Аналогично из равенства $Q_{xz} = Q_{zx}$ имеем
$$(A_{12}\eta - \alpha_1\zeta)T_\xi\alpha_3 = \Big(-\eta\frac{\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{13}}{\alpha_3} + \zeta\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_3}\Big)T_\xi\alpha_1,$$
$$A_{12}T_\xi\alpha_3 = -\frac{\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{13}}{\alpha_3}T_\xi\alpha_1, \quad -\alpha_1 T_\xi\alpha_3 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_3}T_\xi\alpha_1.$$
Отсюда $\alpha_1 = 0$, $A_{12} = 0$.

Также из предположения о потенциальности движения имеем $Q_{yz} = Q_{zy}$. Тогда
$$(A_{13}\eta - \alpha_2\zeta)T_\xi\alpha_3 = \Big(-\eta\frac{\alpha_2 A_{13}}{\alpha_3} + \zeta\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\Big)T_\xi\alpha_2, \quad A_{13}T_\xi\alpha_3 = -\frac{\alpha_2 A_{13}}{\alpha_3}T_\xi\alpha_2, \quad -\alpha_2 T_\xi\alpha_3 = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}T_\xi\alpha_2.$$
Отсюда $\alpha_2 = 0$, $A_{13} = 0$.

Получили $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, что противоречит рассматриваемому случаю (3.4). Пункт (1) утверждения доказан.

(2) Если $T = T(z,t)$ ($\alpha_1 = 0$, $A_{12} = 0$, $\alpha_2 = 0$, $A_{13} = 0$, $\alpha_3 \neq 0$), то легко проверить (см. (2.2)), что функция $Q(x,y,z,t) = a_1x + a_2y + a_3z + a_4(t)$ (где $a_i = \mathrm{const}$, $i = 1,2,3$; $a_4 = a_4(t)$ — произвольная функция) является потенциалом вектора постоянной в рассматриваемой области скорости, удовлетворяющей системе (2.20) и (2.2) в условиях конвективного движения ($T \neq 0$). Температура и давление при этом удовлетворяют системе (2.2), если $A_0 = 0$ (см. (2.22), (2.19)), и имеют вид
$$T(\xi) = \frac{1}{(1 + A_1)}\exp\Big[\frac{(1 + A_1)\xi}{\kappa(\alpha_3^2)}\Big], \quad \xi = t + z\alpha_3, \quad p = -\frac{\rho\beta q\alpha_3\kappa}{(1 + A_1)}T + A_{10}.$$
Пункт (2) утверждения доказан.

Утверждение доказано. □

З а м е ч а н и е 1. Аналогичное утверждение справедливо и для системы (2.21), (2.22). Кроме этого, легко получить, что если $\psi = T(z,t)$, то система (2.17) описывает безвихревое движение. Это можно показать проверкой выполнения условия (3.1), использовав найденное решение (2.23) при $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $M_i = 0$, $i = 1,2,3$. В этом случае вектор скорости постоянен, $p = -0.5\rho\beta q f_3 T^2 + T_0$, $T = (f_0 t + f_3 z)/f_3^2$, где $T_0 = \mathrm{const}$, $f_3 \neq 0$.

3.1.2. Случай $T = T(x,y,t)$. Рассмотрим течения (см. (3.3)), в которых $f_3 = 0$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ ($\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $T_x \neq 0$, $T_y \neq 0$, $T_z = 0$).

Утверждение 4. *Если $\psi = T(x,y,t)$, то система* (2.16) *описывает вихревое движение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противоположное: пусть выполняется соотношение (3.2). Естественно, в этом случае $u = u(T(x,y,t))$, $v = v(T(x,y,t))$, $w = w(T(x,y,t))$. Значит, поскольку $u(T(x,y,t)) = Q_x$, $v(T(x,y,t)) = Q_y$, $w(T(x,y,t)) = Q_z$, то производные по z $Q_{xz} = u'T_z = 0$ с учетом $T_z = 0$. Но в силу (3.2) и (3.1) имеем $Q_{xz} = Q_{zx}$, т.е. $Q_{zx} = w'T_x = 0$. Поскольку $T_x \neq 0$, то $w' = 0$. Тогда из последнего уравнения системы (2.16) следует $u'\alpha_1 + v'\alpha_2 = 0$. Применяя эти соотношения к первым двум уравнениям системы (2.16), получаем соотношение
$$p'\frac{\kappa(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{(1 + A_1)T + \kappa A_0} = 0.$$

Учитывая, что $w' = 0$, из третьего уравнения системы (2.16) имеем

$$-p'\frac{\kappa\alpha_3}{(1+A_1)T+\kappa A_0} - \rho\beta q(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{\kappa^2 T}{[(1+A_1)T+\kappa A_0]^2} = 0.$$

Из полученных соотношений следует, что либо $p' = 0$ и $\alpha_1^2+\alpha_2^2 = 0$, либо $p' = 0$ и $T = 0$. Пришли к противоречию.

Утверждение доказано.

Замечание 2. Аналогично доказывается, что в случае $T = T(x,y,t)$ для системы (2.17) и в случаях $\psi = T(x,t)$ и $\psi = T(y,t)$ для систем (2.16), (2.17) при соответствующих условиях на производные от T возможны только вихревые движения.

3.2. О движении при $T = F_z$

В подразд. 3.1 исследовалось движение вязкой несжимаемой жидкости для систем, полученных из системы (2.2) в случаях, когда в качестве независимой переменной выбиралась температура. В этом подразделе мы возвращаемся к исследованию течений вязкой жидкости, описываемых системой (2.2), но теперь используем комбинированный подход (см. разд. 1). Рассмотрим, возможно ли безвихревое свободноконвективное движение вязкой жидкости для течений, получаемых в рамках этого подхода.

Пусть $T = F_z$; движение жидкости — безвихревое с потенциалом Q; $u = Q_x$, $v = Q_y$, $w = Q_z$; $F = F(x,y,z,t)$ и $Q = Q(x,y,z,t)$ — некоторые достаточно гладкие функции. Тогда система (2.2) сводится к системе

$$Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz} = 0, \tag{3.5}$$

$$(L+p)_x = 0, \tag{3.6}$$

$$(L+p)_y = 0, \tag{3.7}$$

$$(L+p)_z + q\rho\beta F_z = 0, \tag{3.8}$$

$$F_{zt} + Q_xF_{zx} + Q_yF_{zy} + Q_zF_{zz} - \kappa(F_{zxx}+F_{zyy}+F_{zzz}) = 0. \tag{3.9}$$

Здесь $L = \rho[Q_t + (1/2)(Q_x^2+Q_y^2+Q_z^2)]$, нижние индексы обозначают независимые переменные, по которым вычисляются производные. Из (3.6), (3.7) имеем $L+p = H(z,t)$, а интегрируя (3.8) получаем $L+p+q\rho\beta F = M(x,y,t)$, $M(x,y,t)$ — произвольная функция. Откуда

$$F = \frac{M(x,y,t)-H(z,t)}{q\rho\beta}, \quad q\rho\beta \neq 0, \tag{3.10}$$

функция F_z зависит только от z и t,

$$p = -L + H(z,t) = -L - q\rho\beta F + M(x,y,t). \tag{3.11}$$

Очевидно, что выражение (3.11) обеспечивает выполнение уравнений (3.6)–(3.8) при условии $F_x = M_x/(q\rho\beta)$, $F_y = M_y/(q\rho\beta)$. Уравнения (3.5), (3.9) сводятся к системе

$$Q_{xx}+Q_{yy}+Q_{zz} = 0, \tag{3.12}$$

$$F_{zt} + Q_zF_{zz} - \kappa F_{zzz} = 0 \tag{3.13}$$

для определения функций Q и F. Уравнение (3.13) с учетом (3.10) приводит к уравнению

$$-H_{zt} - Q_zH_{zz} + \kappa H_{zzz} = 0. \tag{3.14}$$

Из (3.14) следует:

$$\text{либо (a)} \;\; Q_z = S(z,t), \;\; \text{либо (b)} \; H_{zz} = 0 \text{ и } H_{zt} = 0. \tag{3.15}$$

Рассмотрим случай (a) из (3.15).

Если $Q_z = S(z,t)$, тогда $Q_{zx} = Q_{xz} = 0$, $Q_x = Q_x(x,y,t)$, $Q_{zy} = Q_{yz} = 0$, $Q_y = Q_y(x,y,t)$ и $Q_{xx} + Q_{yy} = G(x,y,t)$. Но, с другой стороны, $Q_{xx} + Q_{yy} = -Q_{zz} = -S_z(z,t)$, следовательно, $S_z(z,t) = C(t)$, $S = C(t)z + C_1(t)$ и $Q_z = C(t)z + C_1(t)$, где $C(t), C_1(t)$ — произвольные функции. $Q_{xx} + Q_{yy} = -C(t)$, $H_{zt} + (C(t)z + C_1(t))H_{zz} - \kappa H_{zzz} = 0$.

Таким образом, с учетом (3.10) приходим к системе уравнений

$$Q_{xx} + Q_{yy} = -C(t), \tag{3.16}$$

$$F_{zt} + (C(t)z + C_1(t))F_{zz} - \kappa F_{zzz} = 0, \tag{3.17}$$

которой должны удовлетворять потенциал Q и функция F.

Покажем, что можно найти $Q = Q(x,y,z,t)$ и $F = F(x,y,z,t)$, удовлетворяющие системе (3.16), (3.17).

3.2.1. Получение $Q(x,y,z,t)$. Обратимся к уравнению (3.16). Возьмем в качестве Q функцию $C(t)(R(x,y) + 0.5z^2) + C_1(t)z$, $C(t) \neq 0$.

Подставив эту функцию в уравнение (3.16), приходим к уравнению

$$R_{xx} + R_{yy} = -1. \tag{3.18}$$

Для его решения используем метод редукции (см. разд. 1). Положим $R = R(\phi)$, где уравнение $\phi(x,y) = \text{const}$ задает поверхность уровня функции $R(x,y)$. Подставив в уравнение (3.18) производные сложной функции $R = R(\phi(x,y))$: $R_x = R'\phi_x$, $R_y = R'\phi_y$, $R_{xx} = R''\phi_x^2 + R'\phi_{xx}$, $R_{yy} = R''\phi_y^2 + R'\phi_{yy}$, сведем его к уравнениям

$$R''m(\phi) + R'n(\phi) = -1, \tag{3.19}$$

$$m(\phi) = \phi_x^2 + \phi_y^2, \tag{3.20}$$

$$n(\phi) = \phi_{xx} + \phi_{yy}. \tag{3.21}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ϕ, нижние индексы у функции $\phi = \phi(x,y)$ — дифференцирование по соответствующим независимым переменным. Уравнение (3.19) сведется к ОДУ, если найдется такая функция $\phi = \phi(x,y)$, при которой система (3.20), (3.21) совместна. Система будет совместна (см. разд. 1), если уравнение (3.21) будет дифференциальным следствием некоторого базового уравнения в частных производных первого порядка. Для сведения уравнения (3.19) к ОДУ возьмем в качестве базового уравнение (3.20).

Утверждение 5. *Если*

$$\frac{1}{2}m'' + m\Big(\frac{n-m'}{m}\Big)' + m\Big(\frac{n-m'}{m}\Big)^2 + \frac{3}{2}m'\Big(\frac{n-m'}{m}\Big) = 0, \tag{3.22}$$

то система (3.20), (3.21) *совместна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем при $\phi_x \neq 0$, $\phi_y \neq 0$ дифференциальные следствия уравнения (3.20) и присоединим к ним уравнение (3.21). Получим систему алгебраических уравнений для определения вторых производных функции $\phi = \phi(x,y)$:

$$2\phi_x\phi_{xx} + 2\phi_y\phi_{yx} = m'\phi_x, \quad 2\phi_x\phi_{xy} + 2\phi_y\phi_{yy} = m'\phi_y, \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} = n(\phi).$$

Отсюда

$$\phi_{xx} = \frac{m'(\phi_x^2 - \phi_y^2) + 2n\phi_y^2}{2(\phi_x^2 + \phi_y^2)}, \quad \phi_{yy} = \frac{m'(\phi_y^2 - \phi_x^2) + 2n\phi_x^2}{2(\phi_x^2 + \phi_x^2)}, \quad \phi_{xy} = \frac{2\phi_x\phi_y(m' - n)}{2(\phi_x^2 + \phi_x^2)}. \tag{3.23}$$

Вычислив производные ϕ_{xxy}, ϕ_{xyx}, подставив в полученные соотношения значения вторых производных (3.23) и приравняв полученные выражения, имеем

$$\phi_y\Big[\frac{1}{2}m'' + m\Big(\frac{n-m'}{m}\Big)' + m\Big(\frac{n-m'}{m}\Big)^2 + \frac{3}{2}m'\Big(\frac{n-m'}{m}\Big)\Big] = 0. \tag{3.24}$$

Аналогично вычисляем третьи смешанные производные ϕ_{xyy}, ϕ_{yyx} и приравниваем их. Получаем соотношение, отличающееся от (3.24) лишь множителем ϕ_x вместо ϕ_y перед выражением в квадратных скобках. Следовательно, если выполнено (3.22), то имеем, что $\phi_{xyy} = \phi_{yyx}$. Итак, если выполняется (3.22), то $\phi_{xxy} = \phi_{xyx}$ и $\phi_{xyy} = \phi_{yyx}$, что и требовалось доказать.

Утверждение доказано.

Выпишем для базового уравнения (3.20) систему уравнений характеристик [23]:

$$\frac{dx}{ds} = 2\phi_x, \quad \frac{dy}{ds} = 2\phi_y, \quad \frac{d\phi}{ds} = 2m, \quad \frac{d\phi_x}{ds} = m'\phi_x \quad \frac{d\phi_y}{ds} = m'\phi_y.$$

Так как $m \neq 0$, выбираем ϕ в качестве независимого переменного вдоль характеристики. Имеем

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{\phi_x}{m}, \quad \frac{dy}{d\phi} = \frac{\phi_y}{m}, \quad \frac{d\phi_x}{d\phi} = \frac{m'}{2m}\phi_x, \quad \frac{d\phi_y}{d\phi} = \frac{m'}{2m}\phi_y.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\phi_x = \alpha_1\sqrt{m}, \quad \phi_y = \sqrt{(1-\alpha_1^2)m}, \quad x = \alpha_1 r + \alpha_2, \\ y = \sqrt{(1-\alpha_1^2)}r + \alpha_3, \quad r = \int d\phi/\sqrt{m}, \quad \alpha_i = \mathrm{const}, \quad i = 1,2,3.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Если мы зададим функции $m = m(\phi)$, $n = n(\phi)$, удовлетворяющие (3.22), то получим ОДУ (3.19), решив которое будем иметь $R = R(\phi)$. Функцию $\phi = \phi(x, y)$ определим из (3.25). Задав $C(t)$ и $C_1(t)$, найдем $Q(x, y, z, t) = C(t)(R(x, y) + 0.5z^2) + C_1(t)z$, удовлетворяющее уравнениям (3.16), (3.12), (3.5).

3.2.2. Получение $F(x, y, z, t)$. Обратимся к уравнению (3.17). Найдем его частное решение вида

$$F = l(t)z^3 + f(t)z^2 + g(t)z + \frac{M(x,y,t)}{q\rho\beta}, \tag{3.26}$$

подставив в (3.10) выражение $H(z,t)/(q\rho\beta) = -[l(t)z^3 + f(t)z^2 + g(t)z]$.

Вычислив входящие в (3.17) производные $F_{zt} = 3l_t z^2 + 2f_t z + g_t$, $F_{zz} = 6l(t)z + 2f(t)$, $F_{zzz} = 6l(t)$ и подставив их в (3.17), получим

$$3l_t z^2 + 2f_t z + g_t + (C(t)z + C_1(t))(6l(t)z + 2f(t)) - 6l(t)\kappa = 0.$$

Откуда приходим к системе ОДУ

$$l_t + 2l(t)C(t) = 0, \quad f_t + f(t)C(t) + 3l(t)C_1(t) = 0, \quad g_t = 6l(t)\kappa - 2f(t)C_1(t).$$

Ее решение имеет вид

$$l(t) = k\exp\left(-2\int C(t)dt\right), \quad k = \mathrm{const},$$

$$f(t) = \exp\Big(\int C(t)dt\Big)\Big[C_2 - 3\int\Big(C_1(t)\exp\Big(-3\int C(t)dt\Big)\Big)dt\Big], \quad C_2 = \mathrm{const},$$

$$g(t) = 6\kappa \int l(t)dt - 2\int f(t)C(t)dt.$$

Необходимое нам некоторое частное решение уравнения (3.17) получено.

3.2.3. Пример безвихревого движения. Присоединив функцию p из (3.11) к функции $F(x, y, z, t)$, полученной в п. 3.2.2, и к функции $Q(x, y, z, t)$, удовлетворяющей уравнению (3.16), получим решение системы (3.5)–(3.9). Для завершения рассмотрения случая осталось привести пример соответствующей функции Q.

Пример 1. Соотношение (3.22) выполняется, в частности, если $n = m'$, $m'' = 0$. Тогда последовательно получаем $m = k\phi + k_1,\ k = \mathrm{const},\ k_1 = \mathrm{const},\ R''(k\phi + k_1) + R'k = -1,$

$$R' = \frac{1}{k\phi + k_1}(k_2 - \phi), \quad k_2 = \mathrm{const}, \quad R = \frac{k_2 k + k_1}{k^2}\ln(k\phi + k_1) - \frac{1}{k}\phi + k_3, \quad k_3 = \mathrm{const}.$$

И, наконец,

$$Q(x, y, z, t) = C(t)\Big\{\frac{k_2 k + k_1}{k^2}\ln[k\phi(x, y) + k_1] - \frac{1}{k}\phi(x, y) + k_3 + 0.5z^2\Big\} + C_1(t)z. \tag{3.27}$$

При $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ имеем $r = 2\sqrt{k\phi + k_1}/k$, $x = 2\alpha_1\sqrt{k\phi + k_1}/k$, $y = 2\sqrt{(1 - \alpha_1^2)}\sqrt{k\phi + k_1}/k$, $\phi(x, y) = 0.25k(x^2 + y^2) - k_1/k$.

Получили, что в этом частном случае при $T = 3l(t)z^2 + 2f(t)z + g(t)$ (см. (3.26)) реализуется безвихревое движение несжимаемой вязкой жидкости, в котором давление (см. (3.11)) задается выражением $p = -\rho\{Q_t + 0.5[Q_x^2 + Q_y^2 + (C(t)z + C_1(t))^2]\} - q\rho\beta[l(t)z^3 + f(t)z^2 + g(t)z]$, потенциал Q — формулой (3.27).

Итак, показано, что система (2.2) имеет решение u, v, w, p, T, задающее безвихревое движение вязкой несжимаемой жидкости, для которого функция (3.27) является потенциалом скорости.

Замечание 3. Более того, в подразд. 3.2 изложен алгоритм получения решения для системы (3.5)–(3.9) и, следовательно, для системы (2.2), который позволяет получить при выборе других произвольных функций и констант, а также при нахождении других частных решений вспомогательных уравнений, другие движения рассматриваемого типа.

Обратимся к случаю (b) из (3.15).

Если $H_{zz} = 0$ и $H_{zt} = 0$, то $H_z = T = \mathrm{const}$ и система (2.2) сводится к системе уравнений Навье — Стокса (с точки зрения подходов, предложенных авторами, рассматривалась в [19]).

Заключение

Предложенными авторами методами при различных предположениях о движении жидкости получены редукции уравнений Обербека — Буссинеска к системам ОДУ, построены точные решения исходных уравнений. Логичным направлением дальнейшего развития этих исследований является получение и анализ редукций и точных решений в случае, если для рассмотренной системы УЧП в качестве базовых уравнений перебираются все УЧП первого порядка, допускаемые алгоритмом.

Для найденных классов течений проведено исследование возможности осуществления безвихревого или вихревого движения. Показано, когда в рамках рассматриваемой модели конвекция может приводить к безвихревому движению.

Результаты, приведенные в подразд. 2.2, демонстрируют возможность использования функционального произвола, который возникает при редукции системы УЧП к системам ОДУ в рамках подходов, изложенных авторами (пример использования произвола при редукции системы УЧП, отличной от рассмотренной в статье, см. в [20]).

Основным посылом при редукции систем УЧП к системам ОДУ является предположение, что все функции в решении системы УЧП или некоторые другие функции, через которые выражаются решения систем УЧП, имеют одинаковые поверхности уровня. Это позволяет сводить системы УЧП к системам ОДУ (см., например, утверждение 1, а также [19;20]). В подразд. 3.2 при рассмотрении уравнений Обербека — Буссинеска с применением комбинированного подхода получены новые результаты и точные решения (см. пример 1) без вышеупомянутого предположения и построения систем ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сидоров А.Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические решения задач механики сплошной среды: сб. статей / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 101–117.
2. **Сидоров А.Ф.** Аналитические методы построения решений в нелинейных задачах пространственной естественной конвекции (обз. доклад) // Шестая Всесоюзная школа-семинар по моделям механики сплошных сред. Алма-Ата, Новосибирск, 1981. С. 236–250.
3. **Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б.** Применение полиномов Бернштейна для приближенного решения задачи естественной конвекции в горизонтальном слое // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды: сб. статей / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. С. 52–63.
4. **Сидоров А.Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикладная механика и техническая физика. 1989. Т. 2. С. 34–40.
5. **Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б.** Расчет гексагональной конвекции в ячейках Бенара с помощью специальных тригонометрических рядов // Приближенные методы исследования нелинейных задач механики сплошной среды: сб. науч. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1992. С. 35–50.
6. **Boussinesq J.** Theorie analitique de la chaleur. Vol. 2. Paris: GauthierVillars, 1903. 625 p.
7. **Oberbeck A.** Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen in Folge von Temperaturdifferenzen // Annalen der Physik. 1879. Vol. 243, iss. 6. P. 271–292. doi: 10.1002/andp.18792430606
8. **Andreev V.K., Gaponenko Y.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V.** Mathematical models of convection. Berlin; Boston: De Gruyter, 2012. 417 p. doi: 10.1515/9783110258592
9. **Mayeli P., Sheard G.J.** Buoyancy-driven flows beyond the Boussinesq approximation: a brief review // Int. Commun. Heat and Mass Transfer. 2021. Vol. 125, article no. 105316. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105316
10. **Lappa M.** Incompressible flows and the Boussinesq approximation: 50 years of CFD // Comptes Rendus. Mecanique. 2022. Vol. 350. P. 1–22. doi: 10.5802/crmeca.134
11. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
12. **Pukhnachev V.V.** Group-theoretical methods in convection theory // AIP Conf. Proc. 2011. Vol. 1404. P. 27–38. doi: 10.1063/1.3659901
13. **Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N.** Method of differential relations and its application in gas dynamics. Novosibirsk: Nauka Publ., 1984. 272 c.
14. **Остроумов Г.А.** Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гос.изд-во техн.-теорет. лит., 1952. 256 с.
15. **Бирих Р.В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. № 3. С. 69–72.
16. **Andreev V.K., Stepanova I.V.** Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force // Appl. Math. Comp. 2014. Vol. 228. P. 59–67. doi: 10.1016/j.amc.2013.11.002
17. **Barna I.F., Matyas L.** Analytic self-similar solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2015. Vol. 78. P. 249–255. doi:10.1016/j.chaos.2015.08.002
18. **Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y.** Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect // Izv. Irkutskogo Gos. Univ. Ser. Matematika. 2021. T. 37. C. 17–30. doi: 10.26516/1997-7670.2021.37.17
19. **Rubina L.I., Ul'yanov O.N.** One method for solving systems of nonlinear partial differential equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 288, suppl. 1. P. 180–188. doi: 10.1134/S0081543815020182

20. **Ульянов О.Н., Рубина Л.И.** О редукции одной системы уравнений магнитной газодинамики к системам обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. НИЯУ МИФИ. 2022. Т. 11, № 2. С. 122–132. doi: 10.56304/S2304487X22020122
21. **Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J.** The classical, direct, and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations // Methods and Appl. of Anal. 1997. Vol. 4, no. 2. P. 173–195. doi: 10.4310/MAA.1997.v4.n2.a7
22. **Полянин А.Д.** Редукции и новые точные решения уравнений конвективного тепло- и массопереноса с нелинейным источником // Вестник НИЯУ МИФИ. 2018. Том 7, № 6. С. 458–469. doi: 10.1134/S2304487X18060093
23. **Курант Р., Гилберт Д.** Методы математической физики: Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964. 831 с.
24. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.

Поступила 7.03.2023
После доработки 24.04.2023
Принята к публикации 15.05.2023

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: uon@imm.uran.ru

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: rli@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Sidorov A.F. On a class of solutions of the gas dynamics and natural convection equations. In: *Numerical and analytical methods of solving problems of a continuous mechanics*, Collect. Article, Sverdlovsk, 1981, pp. 101–117 (in Russian).
2. Sidorov A.F. Analytical methods for constructing solutions in nonlinear problems of spatial natural convection (survey report). In: *Sixth All-Soviet School–Seminar on models of continuum mechanics*, Collect. Article, Alma-Ata, Novosibirsk, 1981, pp. 236–250 (in Russian).
3. Sidorov A.F., Khairullina O.B. Application of Bernstein polynomials for approximate solution of the problem of natural convection in a horizontal layer. In: *Approximate methods for solving boundary value problems of continuum mechanics*, Collect. Article, Sverdlovsk, 1985, pp. 52–63 (in Russian).
4. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164
5. Sidorov A.F., Khairullina O.B. Calculation of hexagonal convection in Benard cells using special trigonometric series. In: *Approximate methods of investigation of nonlinear problems of continuum mechanics*, Collection of scientific papers, Sverdlovsk, 1992, pp. 35–50 (in Russian).
6. Boussinesq J. *Theorie analitique de la chaleur. Vol. 2.* Paris, GauthierVillars, 1903, 625 p.
7. Oberbeck A. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen in Folge von Temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*, 1879, vol. 243, iss. 6, pp. 271–292. doi: 10.1002/andp.18792430606
8. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical models of convection*, Berlin, Boston, De Gruyter, 2012, 417 p. doi: 10.1515/9783110258592 . Original Russian text was published in Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konvektsii*, Moscow, Phys. Math. Liter Publ., 2008, 368 p. ISBN 978-5-9221-0905-5 .
9. Mayeli P., Sheard G.J. Buoyancy-driven flows beyond the Boussinesq approximation: a brief review. *Int. Commun. Heat and Mass Transfer*, 2021, vol. 125, article no. 105316. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105316

10. Lappa M. Incompressible flows and the Boussinesq approximation: 50 years of CFD. *Comptes Rendus. Mecanique*, 2022, vol. 350, pp. 1–22. doi: 10.5802/crmeca.134
11. Ovsiannikov L.V. *Group analysis of differential equations.* NY, Acad. Press, 1982, 416 p. doi: 10.1016/C2013-0-07470-1 . Original Russian text was published in Ovsiannikov L.V., Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii, Moscow, Nauka Publ., 1978, 399 p.
12. Pukhnachev V.V. Group-theoretical methods in convection theory. *AIP Conf. Proc.*, 2011, vol. 1404, pp. 27–38. doi: 10.1063/1.3659901
13. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozheniya k gazovoi dinamike* [The method of differential constraints and its applications to gas dynamics], Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 272 p.
14. Ostroumov G.A. Free convection under the condition of the internal problem. *Washington, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics*, 1958.
15. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44. doi: 10.1007/BF00914697
16. Andreev V. K., Stepanova I.V. Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force. *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 228, pp. 59–67. doi: 10.1016/j.amc.2013.11.002
17. Barna I.F., Matyas L. Analytic self-similar solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2015, vol. 78, pp. 249–255. doi: 10.1016/j.chaos.2015.08.002
18. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect. *Izvestiya Irkutskogo Gos. Univ. Ser. Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 17–30. doi: 10.26516/1997-7670.2021.37.17
19. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. One method for solving systems of nonlinear partial differential equations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 180–188. doi: 10.1134/S0081543815020182
20. Ulyanov O.N., Rubina L.I. On the reduction of one system of magnetic gas dynamics system of equations to systems of ordinary differential equations. *Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Univ. "MIFI"*, 2022, vol. 11, no. 2, pp. 122–132 (in Russian). doi: 10.56304/S2304487X22020122
21. Clarkson P.A., Ludlow D.K., Priestley T.J. The classical, direct, and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. *Methods and Appl. of Anal.*, 1997, vol. 4, no. 2, pp. 173–195. doi: 10.4310/MAA.1997.v4.n2.a7
22. Polyanin A.D. Reductions and new exact solutions of the convective heat and mass transfer equations with a nonlinear source. *Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2018, vol. 7, no. 6, pp. 458–469 (in Russian). doi: 10.1134/S2304487X18060093
23. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2: Partial differential equations,* NY, Interscience, 1962, 830 p. Translated to Russian under the title *Metody matematicheskoi fiziki: Uravneniya v chastnykh proizvodnykh*, Moscow, Mir Publ., 1964, 831 p.
24. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical Hydromechanics], Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 584 p.

Received March 7, 2023
Revised April 24, 2023
Accepted May 15, 2023

Oleg Nikolaevich Ul'yanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: uon@imm.uran.ru .

Lyudmila Ilyinichna Rubina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: rli@imm.uran.ru .

Cite this article as: O. N. Ul'yanov, L. I. Rubina. On some classes of free convection motions. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 189–206 .