ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.977+517.23

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ УСТОЙЧИВОЙ ОНЛАЙН ИДЕНТИФИКАЦИИ ПОМЕХИ В СИСТЕМЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ГОРИЗОНТЕ[1]

П. Г. Сурков

Рассматривается задача онлайн идентификации неконтролируемого внешнего возмущения (помехи) в системе дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто на бесконечном временном горизонте. Информация о позиции системы доступна для измерений только во время ее функционирования, и только часть координат фазового вектора может быть измерена. Случай измерения всех координат также рассмотрен. Измерения проводятся в дискретные, достаточно частые моменты времени с некоторой погрешностью. Поэтому задача нахождения неизвестного возмущения является некорректной. Для ее решения строится адаптивный алгоритм онлайн идентификации с использованием подхода динамического обращения. Этот подход основан на сочетании методов регуляризации и конструкций из теории позиционного управления. В частности мы используем метод регуляризации Тихонова со сглаживающим функционалом специального вида и метод экстремального прицеливания Красовского. В основе алгоритма лежит выбор подходящей вспомогательной управляемой системы и закон управления в ней по принципу обратной связи. Предложенный алгоритм дает аппроксимацию внешнего возмущения и устойчив к информационным помехам и погрешности вычислений. Рассмотрен модельный пример, демонстрирующий применение разработанной методики.

Ключевые слова: онлайн идентификация, внешнее возмущение, дробная производная Капуто, бесконечный временной промежуток.

P. G. Surkov. An adaptive algorithm for a stable online identification of a disturbance in a fractional-order system on an infinite time horizon.

The problem of online identification of an uncontrolled external disturbance (noise) in a system of differential equations with a fractional Caputo derivative is considered on an infinite time horizon. Information on the position of the system is available for observations only during its functioning, and only a part of the coordinates of the system's phase vector can be measured. The case of measuring all phase coordinates is also considered. The measurements are carried out at discrete, sufficiently frequent times with a certain error. Therefore, the problem of finding the unknown disturbance is ill-posed. To solve it, an adaptive online identification algorithm is constructed using the dynamic inversion approach, which is based on a combination of regularization methods and constructions of positional control theory. In particular, we use the Tikhonov regularization method with a smoothing functional of special form and the Krasovskii extremal aiming method. The algorithm is based on the choice of an appropriate auxiliary control system and a feedback control law in this system. The proposed algorithm approximates the external disturbance and is stable under information noises and computational errors. A model example demonstrating the application of the developed technique is considered.

Keywords: online identification, external disturbance, Caputo fractional derivative, infinite time interval.

MSC: 26A33, 49N45, 93C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-172-188

1. Введение. Постановка задачи

В работе рассматривается задача идентификации помехи (неизвестного внешнего воздействия) в динамической системе дробного порядка при незаданных ограничениях на время ее функционирования. Задачи, рассматриваемые на бесконечном временном горизонте, занимают особое место в математической теории управления ввиду того, что алгоритмы построения управлений, предполагающих практическую реализацию, должны учитывать накапливающиеся со временем как вычислительные, так и измерительные погрешности. Такая специфика

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/.

делает их близкими к задачам теории устойчивости и стабилизации движений, для исследования которых активно используются, например, функции Ляпунова.

Задачи идентификации часто возникают в прикладных исследованиях и играют в них не последние роли. Например, во время развития управляемого процесса естественной является ситуация, когда не все его характеристики доступны для измерения или присутствует некоторое неконтролируемое возмущение, и тогда для обеспечения требуемого эволюционирования этого процесса появляется необходимость восстановления (идентификации) недостающей информации. Данный аспект широко представлен в исследованиях, относящихся к математическому моделированию в информационных технологиях (восстановление изображений), экологии (влияние источника загрязнения на окружающую среду), медицине (распространение вирусных заболеваний и их лечение) и к другим областям. Отметим некоторые монографии по этой тематике, например, [1–4].

Наиболее распространенными являются *a posteriori* постановки задач идентификации, которые имеют богатую историю изучения и значительное разнообразие методов решения, см., например, [5;6]. В настоящей работе рассматривается ситуация, когда информация о системе доступна только во время ее функционирования. Таким образом, алгоритм решения задачи идентификации должен представлять собой адаптивный (включающий принцип обратной связи) алгоритм, функционирующий в режиме онлайн.

Основной мотивацией работы является распространение метода динамического обращения, который подробно будет описан ниже, на более широкий класс динамических систем, представленных дробными дифференциальными уравнениями.

Дробный анализ в настоящее время является активно развивающейся областью математики. С одной стороны, большая работ носит теоретический характер по причине сложности физической интерпретации дробных производных, но многие ученые заполняют этот пробел (см., например, [7–10] и библиографию в них). С другой стороны, теория устойчивости для систем дробного порядка еще проходит свое становление, и многие результаты, справедливые для систем целого порядка, не получили должного обоснования. Все возрастающее число работ посвящено различным задачам управления для дробных систем, включая смежные задачи оптимального и позиционного управления с обратной связью [11;12] и задачи реконструкции [13].

Приведем необходимые определения для постановки задачи. Классическое определение дробного интеграла [14, определение 2.1] можно распространить на полуось $T := [\sigma, +\infty)$.

Определение 1 [14, (5.1)]. *Интеграл дробного интеграл порядка* $\gamma \in (0,1)$ с началом в точке σ на полуоси T от произвольной функции $f\colon T \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$[I^{\gamma}_{\sigma+} f](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int\limits_{\sigma}^{t} \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\gamma}}\, ds, \quad \gamma \in (0,1), \quad t \in T,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера [14, с. 15], и называется *левосторонним дробным интегралом Лиувилля.*

Будем использовать сокращенную запись I^{γ} для дробного интеграла, если начальный момент равен σ. Определение дробной производной Капуто [15, (2.4.4)] также может быть дано на полуоси T (см. [15, с. 97]).

Определение 2. Для функции $x\colon T \to \mathbb{R}^n$ и произвольного действительного числа $\gamma \in (0,1)$, выражение

$$[D^{\gamma}_{*} x](t) = \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}(x - x(\sigma))](t)$$

называется *дробной производной Капуто порядка* γ.

Обозначения для дробных интегралов и производных используются в сокращенном виде: I^{γ}, D^{γ}_{*} вместо $I^{\gamma}_{\sigma+}$, ${}^{C}D^{\gamma}_{\sigma+}$, поскольку мы далее рассматриваем только левосторонние интегралы и производные, начальный момент которых не меняется и равен σ.

Рассматривается действующая на промежутке времени T линейная управляемая система дифференциальных уравнений дробного порядка

$$[D_*^\gamma x](t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

с заданным начальным состоянием

$$x(\sigma) = x_\sigma. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ для $t \in T$, A и B — постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Эта система, назовем ее *эталонной*, подвержена воздействию неизвестной заранее помехи $u(\cdot)$, о которой имеется априорная информация, что $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$, где P — заданное выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Траектория системы (1.1) изначально неизвестна, а доступна для наблюдения одновременно с функционированием системы. Будем рассматривать случай дискретных наблюдений, когда в достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $i \in \mathbb{N}$, измеряются κ_1 ($\kappa_1 \leqslant n$) координат вектора состояний системы (1.1) с некоторой погрешностью. Полученная информация представляет собой векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\bar{x}(\tau_i) - \xi_i^h\|_{\kappa_1} \leqslant \nu_i^h, \tag{1.3}$$

где $\bar{x}(t)$ — вектор, составленный из первых (измеряемых) координат вектора $x(t)$, $\nu_i^h \in (0,1)$ — уровень погрешности в момент τ_i, величина $h \in (0,1)$ характеризует точность измерений и символом $\|\cdot\|_{\kappa_1}$ обозначена Евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^{\kappa_1}$.

В работе ставится следующая задача. С учетом того что траектория $x(\cdot)$ системы (1.1) и внешнее воздействие $u(\cdot)$ изначально не заданы, а информация о положении системы поступает синхронно с ее функционированием в виде измерений ξ_i^h, $i \in \mathbb{N}$, требуется построить адаптивный алгоритм приближенного нахождения возмущения $u(\cdot)$, работающий в онлайн режиме, устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений. Полученное в результате работы алгоритма приближение $v^h(\cdot)$ должно быть близко в среднеквадратичном отклонении к $u(\cdot)$ на любом конечном промежутке времени, т. е.

$$\|v^h(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2([\sigma,\theta],\mathbb{R}^m)} = \left(\int_\sigma^\theta \|v^h(s) - u(s)\|_m^2\, ds\right)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0 \quad \forall \theta \in T.$$

Одна и та же траектория системы (1.1) может быть порождена различными внешними воздействиями, что в присутствии вычислительных и измерительных погрешностей приводит к невозможности точного нахождения воздействия $u(\cdot)$. Таким образом, рассматриваемая задача является некорректной [6; 16; 17]. Для ее решения мы придерживаемся тесно связанного с теорией некорректных задач подхода, основанного на концепции обратных задач для динамических систем [6].

Теоретические основы развиваемого подхода были заложены в [18]. Этот подход представляет собой комбинацию принципа экстремального прицеливания Н. Н. Красовского из теории гарантированного управления [19] с одним или двумя (возможно разными) методами регуляризации. Среди наиболее часто используемых — классический метод регуляризации А. Н. Тихонова (метод сглаживающего функционала) и метод невязки.

Данный подход применялся в работах [20–25], где были рассмотрены системы с запаздыванием, с распределенными параметрами и стохастические системы. Основные направления его развития отражены в обзорной статье [26].

Задача восстановления правой части системы дробного порядка с априорными ограничениями на конечном отрезке с помощью этого метода решалась в [27] и при измерении части координат в [28]. Также этот метод успешно применялся для приближенного вычисления дробной производной Капуто при дискретных измерениях координат фазового вектора в [29] и при непрерывных измерениях (см. работу автора в данном журнале (2021, Т. 27, № 2)). В настоящей работе рассматривается случай дискретных измерений, но отсутствуют ограничения на время функционирования системы, что влечет использование специальной техники обоснования алгоритма восстановления и модификации метода сглаживающего функционала.

Существуют также другие алгоритмы онлайн идентификации входов для различных систем, в основе которых лежат модификации метода регуляризации Тихонова (см., например, [30; 31] и библиографию в них).

2. Случай измерения всех координат

Рассмотрим сначала базовую ситуацию, соответствующую измерению всего вектора фазовых координат системы (1.1). Таким образом, размерность векторов ξ_i^h равна n, т. е. $\kappa_1 = n$, и соотношения (1.3) принимают вид

$$\|x(\tau_i) - \xi_i^h\|_n \leqslant \nu_i^h, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Будем рассматривать класс систем (1.1), удовлетворяющих следующему условию:

Условие 1. Матрица A устойчива.

2.1. Вспомогательные построения

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения задачи, приведем вспомогательные технические построения.

Зафиксируем произвольную положительно определенную матрицу Q размерности $n \times n$. Тогда существует единственная положительно определенная симметричная матрица G той же размерности [32, теорема 9.1] такая, что для функции Ляпунова

$$V(x) = \langle Gx, x\rangle_n, \tag{2.1}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ — скалярное произведение в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, выполнено равенство

$$\Big\langle Ax, \frac{\partial V}{\partial x}\Big\rangle_n = -\langle Qx, x\rangle_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

которое с учетом вида функции V (2.1) представимо в форме

$$2\langle GAx, x\rangle_n = -\langle Qx, x\rangle_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Поскольку матрица Q положительно определена, то можно указать постоянную $q > 0$, для которой выполняется неравенство

$$\langle Qx, x\rangle_n \geqslant q\|x\|_n^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Определение 3 [14, определение 2.3]. Для произвольного $\theta \in T$ обозначим через $AC^\gamma([\sigma,\theta],\mathbb{R}^n)$ класс функций $x\colon [\sigma,\theta] \to \mathbb{R}^n$, представимых дробным интегралом порядка $\gamma \in (0,1)$ от суммируемой функции: $x(t) = [I^\gamma\varphi](t)$, $t \in [\sigma,\theta]$, $\varphi \in L_\infty([\sigma,\theta],\mathbb{R}^n)$.

Определение 4. Функция $x\colon [\sigma,\theta] \to \mathbb{R}^n$ называется решением *задачи Коши* (1.1), (1.2), *начинающимся в точке* (σ, x_σ), если $x(\cdot) \in AC^\gamma([\sigma,\theta],\mathbb{R}^n)$, $x(\sigma) = x_\sigma$ и равенство (1.1) выполнено для п.в. $t \in [\sigma,\theta]$.

Определение 5. Функцию $x\colon T \to \mathbb{R}^n$ будем называть решением *задачи Коши* (1.1), (1.2), *начинающимся в точке* (σ, x_σ), если $x(\cdot)$ — решение в смысле определения 4 на всяком отрезке $[\sigma,\theta]$, $\theta > \sigma$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда существуют постоянные* K_1 *и* M_0 *такие, что справедливы неравенства*

$$\|[D_*^\gamma x](t)\|_n \leqslant K_1, \quad t \in T, \tag{2.4}$$

$$\|x(t_1, u) - x(t_2, u)\|_n \leqslant M_0(t_2 - t_1)^\gamma, \quad t_1, t_2 \in T. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из ограниченности множества P следует, что существует постоянная $p > 0$, для которой выполнено неравенство

$$\|u\|_m \leqslant p \quad \forall u \in P. \tag{2.6}$$

Условие 1 подразумевает отрицательные действительные части собственных чисел матрицы A ($|\arg(\mathrm{spec}(A))| > \pi/2$), а поскольку $\pi/2 > \gamma\pi/2$, $\gamma \in (0, 1)$, следовательно, выполнено соотношение $|\arg(\mathrm{spec}(A))| > \gamma\pi/2$, $\gamma \in (0, 1)$. Последнее неравенство является необходимым и достаточным условием того, что система (1.1) при ограниченном входе дает ограниченный выход [33]. Таким образом, существует постоянная $K_0 > 0$ такая, что

$$\|x(t)\|_n \leqslant K_0 \quad \forall t \in T. \tag{2.7}$$

Обозначим $a := \|A\|$ и $b := \|B\|$. Тогда для системы (1.1) с учетом (2.7) и (2.6) имеем

$$\|[D_*^\gamma x](t)\|_n = \|Ax(t) + Bu(t)\|_n \leqslant a\|x(t)\|_n + b\|u(t)\|_m \leqslant aK_0 + bp.$$

Последнее неравенство приводится к виду (2.4). Оценка (2.5) получается аналогично [27, теорема 1] с использованием (2.4) и (2.7). □

Лемма 2. *Для* $\gamma \in (0, 1)$ *и положительных чисел* c, x *и* ε, *удовлетворяющих соотношению* $c \geqslant x \geqslant \varepsilon > 0$, *справедливо неравенство*

$$(x + c)^\gamma - c^\gamma \leqslant x^\gamma. \tag{2.8}$$

Доказательство. Следуя [29, Appendix A.2], рассмотрим функцию $\psi(y) := (1 + y)^\gamma - y^\gamma$, $y \geqslant 1$. Производная этой функции $\psi'(y) < 0$, и, следовательно, $\psi(y)$ монотонно убывает при $y \geqslant 1$. Вычисляя $\psi(1) = 2^\gamma - 1 \leqslant 1$, имеем $\psi(y) \leqslant \psi(1) \leqslant 1$. Тогда в неравенстве $\psi(y) \leqslant 1$, принимая обозначение $y := c/x$, приходим к формуле (2.8). □

2.2. Алгоритм решения

Используемая в работе методика динамического обращения [20] подразумевает два ключевых момента. Первый из них — это выбор вспомогательной системы *(модели)* до начала работы алгоритма. В данной задаче она имеет вид

$$[D_*^\gamma w^h](t) = Aw^h(t) + Bv^h(t) \tag{2.9}$$

и начальное состояние

$$w(\sigma) = x_\sigma.$$

Второй ключевой момент — это правило формирования управления в модели. В системе (2.9) мы будем формировать управление $v^h(\cdot)$ по принципу обратной связи. Обозначим через Δ^h неравномерное разбиение промежутка T:

$$\Delta^h = \{\tau_i^h\}_{i=0}^\infty, \quad \tau_0^h = \sigma, \quad \tau_{i+1}^h = \tau_i^h + \delta_i^h,$$

где δ_i^h — шаг разбиения, удовлетворяющий равенству

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i^h = +\infty \quad \forall h \in (0,1). \tag{2.10}$$

Последнее соотношение следует из постановки задачи, поскольку интервал T — полуось. Будем считать, что координаты w^h также измеряются с погрешностью ν_i^h в моменты времени τ_i^h и результаты измерений $\psi_i^h \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют аналогичным (1.3) неравенствам

$$\|w^h(\tau_i^h) - \psi_i^h\|_n \leqslant \nu_i^h, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим семейство сглаживающих функционалов

$$M_i^h[v] = 2\beta_i^h \langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)\|v\|_m^2, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

где $\beta_i^h := \Gamma(2-\gamma)(\tau_i^h - \sigma)^{\gamma-1}$. Управление в модели (2.9) будет строиться согласно правилу

$$v^h(t) = v_i^{\alpha(h)}, \quad t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h), \quad v_i^{\alpha(h)} = \operatorname{argmin}\{M_i^h[v] \colon v \in P\}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

У с л о в и е 2. Разбиение Δ^h и величины ошибок измерений ν_i^h таковы, что справедливы соотношения

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (\delta_i^h)^\gamma (\delta_i^h + \nu_i^h) \leqslant \rho(h), \tag{2.13}$$

где $\rho(h)$ — некоторая функция такая, что $\rho(h) \to 0+$ при $h \to 0+$.

З а м е ч а н и е 1. Условие 2 более жесткое, чем в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [25, условие 2]. Так, например, в указанной работе вид шага разбиения

$$\delta_i^h = \nu_i^h = \frac{dh}{(i+1)^\beta} \quad \forall \beta \in (1/2, 1), \quad i \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad d = \mathrm{const} > 0,$$

не удовлетворяет соотношению (2.13) при $\beta = \gamma = 0.6$.

Предложение 1. *Условию 2 удовлетворяют функции*

$$\delta_i^h = \nu_i^h = \frac{dh}{(i+1)^{g(\gamma)}}, \quad g(\gamma) := \frac{1}{1/2 + \gamma^{1/2}}, \quad \gamma \in (1/2, 1), \quad i \in \mathbb{N}_0, \quad d = \mathrm{const} > 0,$$

$$\rho(h) = 2d^{1+\gamma} h^{1+\gamma} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^{(1+\gamma)g(\gamma)}}. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при $\gamma \in (1/2, 1)$ имеем $1/2 + \gamma^{1/2} > 1$ и $g(\gamma) < 1$, поэтому выполнено равенство (2.10). Проверим, что в (2.14) показатель $g(\gamma)(1+\gamma) > 1$. Для этого рассмотрим функцию $\phi(x) := x^2 - x + 1/2$. При $x \geqslant 1/2$ она возрастает и $\phi(1/2) = 1/4$, следовательно, $\phi(x) > 0$. Последнее неравенство обеспечивает выполнение $1/2 + \gamma^{1/2} < 1 + \gamma$ при $x := \gamma^{1/2}$, а значит, и $g(\gamma)(1+\gamma) > 1$. Тогда ряд

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^{(1+\gamma)g(\gamma)}}$$

сходится, и, если $\rho(h)$ определить формулой (2.14), то $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$. $\square$

У с л о в и е 3. Пусть функция $\alpha \colon (0,1) \to (0,1)$ удовлетворяет соотношениям

$$\alpha(h) \to 0, \quad (\alpha(h))^{-1}\rho(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Опишем работу а л г о р и т м а по шагам. До начала его работы зафиксируем уровень погрешности h, функцию $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение Δ^h, диаметр которого характеризуется условием 2.

(i) Для $i = 0$ в момент времени $\tau_0^h = \sigma$ выбираем $v^h(t) = 0$, которое действует в модели на промежутке $t \in [\tau_0^h, \tau_1^h]$. Эталонная система начинает функционировать и приходит в состояние $x(\tau_1^h)$, которое измеряется неточно с погрешностью h, давая при этом вектор ξ_1^h. Одновременно с ней также начинает функционировать модель и в соответствии с выбранным управлением достигает состояния $w^h(\tau_1^h)$, доступного для измерений с той же погрешностью, в результате которых получаем вектор ψ_1^h.

(ii) При $i \geqslant 1$ рассматриваемый временной интервал $[\tau_i^h, \tau_{i+1}^h]$. По измерениям ξ_i^h и ψ_i^h строится сглаживающий функционал

$$M_i^h[v] = 2\beta_i^h \langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)\|v\|_m^2. \tag{2.15}$$

Далее находится минимизирующий элемент $v_i^{\alpha(h)}$ для функционала (2.15), и согласно правилу (2.12) на отрезке $[\tau_i^h, \tau_{i+1}^h]$ в модели будет применяться управление $v^h = v_i^{\alpha(h)}$, которое приводит ее в положение $w^h(\tau_{i+1}^h)$, т. е. получаем соответствующий ему вектор измерений ψ_{i+1}^h. Позиция эталонной системы наблюдается в тот же момент τ_{i+1}^h, и ее измерения дают вектор ξ_{i+1}^h. $\square$

Ниже мы установим, что построенный адаптивный алгоритм, функционирующий в онлайн режиме, позволяет получить устойчивую аппроксимацию действующего на эталонную систему внешнего возмущения. Прежде чем перейти к теореме о сходимости построенных с помощью данного алгоритма аппроксимаций помехи, установим справедливость вспомогательного утверждения и приведем необходимые в его доказательстве определения.

Можно расширить понятие производных, соответствующих дробным производным Римана — Лиувилля [15, (2.1.5)] на полуось T.

О п р е д е л е н и е 6 [15, (2.2.6)]. Для функции $x\colon T \to \mathbb{R}^n$ и произвольного действительного числа $\gamma \in (0,1)$ выражение

$$[D^\gamma x](t) = \frac{d}{dt}[I^{1-\gamma}x](t)$$

называется *дробной производной Лиувилля на полуоси* T.

Для произвольного $\theta \in T$ введем множество

$$U_\theta(x(\cdot)) := \{\, u(\cdot) \in L_2([\sigma,\theta],\mathbb{R}^m)\colon u(t) \in P, \quad Bu(t) = [D_*^\gamma x](t) - Ax(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\sigma,\theta]\}$$

всех допустимых входов, определяющих одну и ту же траекторию $x(\cdot)$ системы (1.1). Нетрудно показать, что множество $U_\theta(x(\cdot))$ является выпуклым, ограниченным и замкнутым ввиду свойств множества P. Принимая во внимание тот факт, что траектория $x(\cdot)$ может порождаться неединственным входом $u(\cdot)$, мы следуем концепции нормальных решений некорректных задач [6, с. 112]. Управление $u = \bar{u}$ называется *нормальным*, если

$$\bar{u} \in U_\theta(x(\cdot)), \quad \|\bar{u}\|_{L_2([\sigma,\theta],\mathbb{R}^m)} := \inf_{u \in U_\theta(x(\cdot))} \|u\|_{L_2([\sigma,\theta],\mathbb{R}^m)}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\gamma \in (0,1)$*, выполнены условия* 1–3*. Тогда можно указать в явном виде постоянные* $C_1, C_2 > 0$*, не зависящие от* h*, такие, что для системы* (1.1) *справедливы неравенства*

$$\|w^h(\tau_i^h) - x(\tau_i^h)\|_n^2 \leqslant C_1(\rho(h) + \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h)), \tag{2.16}$$

$$[I^1\|v^h\|_m^2](\tau_i^h) \leqslant [I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h) + C_2(\alpha(h))^{-1}\rho(h) \quad \forall \tau_i^h \in \Delta^h, \tag{2.17}$$

где $[I^1 f](t) := \int_\sigma^t f(s)\,ds$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала оценку (2.16). Введем обозначения $\mu^h(t) := w^h(t) - x(t)$ и выпишем разность между системами (1.1) и (2.9). Тогда получим

$$[D_*^\gamma \mu^h](t) = A\mu^h(t) + B(v^h(t) - u(t)), \quad t \in T. \tag{2.18}$$

Из условия $\mu^h(\sigma) = 0$ следует равенство дробных производных Капуто и Лиувилля $[D_*^\gamma \mu^h](t) = [D^\gamma \mu^h](t)$ для п.в. $t \in T$. Поскольку функция Ляпунова (2.1) выпукла и $V(0) = 0$, то, используя [34, лемма 4.1], находим

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma V(\mu^h)](t) \leqslant \langle [D_*^\gamma \mu^h](t), G\mu^h(t)\rangle_n \quad \text{для п.в.} \quad t \in T.$$

Для определенности возьмем $t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h]$. Используя (2.18) в последнем выражении, получаем

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma V(\mu^h)](t) \leqslant \langle A\mu^h(t), G\mu^h(t)\rangle_n + \langle B(v^h(t) - u(t)), G\mu^h(t)\rangle_n. \tag{2.19}$$

Оценим слагаемые в правой части неравенства (2.19). Формулы (2.2) и (2.3) приводят к соотношению

$$\langle A\mu^h(t), G\mu^h(t)\rangle_n = \langle GA\mu^h(t), \mu^h(t)\rangle_n = -\langle Q\mu^h(t), \mu^h(t)\rangle_n \leqslant -q\|\mu^h(t)\|_n^2. \tag{2.20}$$

Пусть $g := \|G\|$. Используя лемму 1, выводим

$$\begin{aligned} &\langle B(v^h(t) - u(t)), G\mu^h(t)\rangle_n \\ &= \langle v^h(t) - u(t), B'G(w^h(t) - w^h(\tau_i^h))\rangle_m + \langle v^h(t) - u(t), B'G(w^h(\tau_i) - \psi_i^h)\rangle_m \\ &\quad + \langle v^h(t) - u(t), B'G(\psi_i^h - \xi_i^h)\rangle_m + \langle v^h(t) - u(t), B'G(\xi_i^h - x(\tau_i^h))\rangle_m \\ &\quad + \langle v^h(t) - u(t), B'G(x(\tau_i^h) - x(t))\rangle_m \\ &\leqslant c_1\delta_i^h + \langle v^h(t) - u(t), B'G(w^h(\tau_i^h) - \xi_i^h)\rangle_m + c_2\nu_i^h, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $c_1 := 4bgpM_0$, $c_2 := 4bgp$, и штрих обозначает транспонирование. Принимая во внимание (2.20) и (2.21), неравенство (2.19) перепишем в виде

$$[D_*^\gamma V(\mu^h)](t) \leqslant 2c_1\delta_i^h + 2\langle B(v^h(t) - u(t)), G(w(\tau_i) - \xi_i^h)\rangle_n + 2c_2\nu_i^h. \tag{2.22}$$

Введем функционал типа Ляпунова

$$\Lambda^h(t) := V(\mu^h(t)) + \alpha(h)[I^1\|v^h\|_m^2](t) - \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](t). \tag{2.23}$$

Тогда находим

$$[D_*^\gamma \Lambda^h](t) = [D_*^\gamma V(\mu^h)](t) + \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|v^h\|_m^2](t) - \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|u\|_m^2](t). \tag{2.24}$$

Элемент $v \in P$, минимизирующий функционал (2.11), также минимизирует и сглаживающий функционал

$$\bar{M}_i^h[v] = 2\langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|v\|_m^2](\tau_i^h), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Действительно, поскольку $\beta_i^h \neq 0$, то, преобразуя формулу (2.11), имеем

$$2\beta_i^h\langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)\|v\|_m^2 = \beta_i^h\left(2\langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}(\tau_i^h - \sigma)^{1-\gamma}\|v\|_m^2\right).$$

Используя свойство гамма-функции и определение 1, последнее равенство приводим к виду

$$2\beta_i^h\langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)\|v\|_m^2 = \beta_i^h(2\langle G(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_n + \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|v\|_m^2](\tau_i^h)).$$

Откуда имеем
$$M_i^h[v] = \beta_i^h \bar{M}_i^h[v].$$
Коэффициент в последней формуле $\beta_i^h > 0$ и не зависит от v, поэтому функционалы $\bar{M}_i^h[v]$ и $M_i^h[v]$ достигают минимума на одном элементе $v \in P$. Вследствие этого правило формирования управления (2.12) можно заменить следующим:

$$v^h(t) = v_i^{\alpha(h)}, \quad t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h), \quad v_i^{\alpha(h)} = \operatorname{argmin}\{\bar{M}_i^h[v] \colon v \in P\}, \quad i \in \mathbb{N}. \qquad (2.25)$$

Тогда, учитывая в равенстве (2.24) оценку (2.22) и (2.25), получаем $[D_*^\gamma \Lambda^h](t) \leqslant 2c_1\delta_i^h + 2c_2\nu_i^h$. Последнее неравенство можно представить в виде

$$[D_*^\gamma \Lambda^h](t) = 2c_1\delta_i^h + 2c_2\nu_i^h + \zeta(t), \quad t \in [\tau_i^h, \tau_{i+1}^h], \qquad (2.26)$$

где некоторая функция $\zeta(t) \leqslant 0$. Используя формулу решения [15, с. 231] для уравнения (2.26), при условии $\Lambda^h(\sigma) = 0$ находим

$$\Lambda^h(t) \leqslant c_3(\delta_i^h + \nu_i^h) \int\limits_\sigma^t (t-s)^{\gamma-1}\, ds \leqslant c_4(\delta_i^h + \nu_i^h)(t-\sigma)^\gamma.$$

Из последнего неравенства выводим $\Lambda^h(\tau_{i+1}^h) \leqslant c_4(\delta_i^h + \nu_i^h)(\tau_{i+1}^h - \sigma)^\gamma$. Полученную формулу можно переписать в виде

$$\Lambda(\tau_{i+1}^h) \leqslant \Lambda(\tau_i^h) + c_4(\delta_i^h + \nu_i^h)((\tau_{i+1}^h - \sigma)^\gamma - (\tau_i^h - \sigma)^\gamma). \qquad (2.27)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (2.27) преобразуем

$$(\tau_{i+1}^h - \sigma)^\gamma - (\tau_i^h - \sigma)^\gamma = (\delta_i^h + \tau_i^h - \sigma)^\gamma - (\tau_i^h - \sigma)^\gamma.$$

Условие леммы 2 для $c := \tau_i^h - \sigma$, $x := \delta_i^h$ и $\varepsilon := \delta_i^h$ выполнено, т. е. $c \geqslant x \geqslant \delta_i^h > 0$, тогда получаем
$$(\tau_{i+1}^h - \sigma)^\gamma - (\tau_i^h - \sigma)^\gamma \leqslant (\delta_i^h)^\gamma.$$
Учитывая данное неравенство в (2.27), имеем $\Lambda^h(\tau_{i+1}^h) \leqslant \Lambda^h(\tau_i^h) + c_4(\delta_i^h)^\gamma(\delta_i^h + \nu_i^h)$. Суммируя последние оценки от 0 до i, находим

$$\Lambda^h(\tau_i^h) \leqslant c_4 \sum_{k=0}^{i-1} (\delta_k^h)^\gamma(\delta_k^h + \nu_k^h) \leqslant c_4\rho(h). \qquad (2.28)$$

Из вида функционала (2.23) следуют неравенства

$$\|\mu^h(\tau_i^h)\|_n^2 \leqslant c_5 V(\mu^h(\tau_i^h)) \leqslant c_5\Lambda^h(\tau_i^h) + c_5\alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h).$$

Полученная формула с учетом (2.28) преобразуется к виду (2.16). Перейдем к доказательству неравенства (2.17). Используя (2.23), выпишем значение $\Lambda^h(t)$ при $t = \tau_i^h$:

$$\Lambda^h(\tau_i^h) = V(\mu^h(\tau_i^h)) + \alpha(h)[I^1\|v^h\|_m^2](\tau_i^h) - \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h).$$

Тогда, подставляя последнее выражение в соотношение (2.28), имеем

$$V(\mu^h(\tau_i^h)) + \alpha(h)[I^1\|v^h\|_m^2](\tau_i^h) - \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h) \leqslant c_4\rho(h),$$

откуда, учитывая положительную определенность функции Ляпунова V, находим

$$\alpha(h)[I^1\|v^h\|_m^2](\tau_i^h) \leqslant \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h) + c_4\rho(h).$$

Последнюю оценку можно переписать в виде (2.17). □

Теорема 1. *Пусть* $\gamma \in (0,1)$, *выполнены условия* 1–3. *Тогда для любого* $\theta \in T$ *имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to \bar{u}(\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2([\sigma,\theta],\mathbb{R}^m) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство этой теоремы может быть проведено по схеме из [20, теорема 1.2.3] с уточнением в [23, теорема 1] и при использовании леммы 3. □

Замечание 2. Элементы множества $U_\theta(x(\cdot))$ могут быть записаны в виде $u(t) = B^+([D^\gamma_* x](t) - Ax(t)) \in P$, $t \in [\sigma,\theta]$, где B^+ — псевдообратная матрица. Тогда при $\theta_1 < \theta_2$ в результате работы алгоритма мы имеем по теореме 1: $\|v^h(\cdot|\theta_1) - \bar{u}_1(\cdot)\|_{L_2([\sigma,\theta_1],\mathbb{R}^m)} \to 0$, $\|v^h(\cdot|\theta_2) - \bar{u}_2(\cdot)\|_{L_2([\sigma,\theta_2],\mathbb{R}^m)} \to 0$ при $h \to 0$ и одновременно $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t)$ при п.в. $t \in [\sigma,\theta_1]$.

3. Случай измерения части координат

Теперь перейдем к случаю недостатка информации о положении системы (1.1). Пусть $\kappa_1 < n$. Обозначим символом $x_1 \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$ вектор, состоящий из первых (измеряемых) координат вектора x. Тогда вектор $x_2 \in \mathbb{R}^{\kappa_2}$ $(n = \kappa_1 + \kappa_2)$ состоит из ненаблюдаемых координат. Таким образом, мы имеем $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. В общем случае задача трудноразрешима, поэтому мы сузим рассматриваемый класс функций правой части (1.1), а именно, будем рассматривать систему

$$[D^\gamma_* x_1](t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + Bu(t), \tag{3.1}$$

$$[D^\gamma_* x_2](t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t), \quad t \in T, \tag{3.2}$$

с начальными условиями $x_1(\sigma) = x_{1\sigma}$, $x_2(\sigma) = x_{2\sigma}$. В результате измерений κ_1 координат фазового вектора системы (3.1) получаем векторы $\xi^h_i \in \mathbb{R}^{\kappa_1}$:

$$\|\xi^h_i - x_1(\tau^h_i)\|_{\kappa_1} \leqslant \nu^h_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Предполагается, что начальный момент системы известен точно.

Таким образом, имеется следующая задача. Траектория системы $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ неизвестна заранее и определяется неконтролируемым входом $u(\cdot)$. Требуется определить помеху $u(\cdot)$, порождающую $x(\cdot)$.

Будем считать, что для системы (3.1), (3.2) выполнено

Условие 4. Матрицы A_{11} и A_{22} устойчивы.

В рассматриваемом случае нам понадобятся аналогичные п. 2.1 вспомогательные построения. Фиксируются произвольные положительно определенные матрицы Q_j размерностей $\kappa_j \times \kappa_j$, $j = 1,2$. Тогда для каждой из них существует единственная положительно определенная симметричная матрица G_j той же размерности, такая, что для функций Ляпунова

$$V_j(x) = \langle G_j x, x\rangle_{\kappa_j}, \quad j = 1,2, \tag{3.3}$$

выполнены равенства

$$\left\langle A_{jj}x, \frac{\partial V_j}{\partial x} \right\rangle_{\kappa_j} + \langle Q_j x, x\rangle_{\kappa_j} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\kappa_j}, \quad j = 1,2,$$

которые с учетом формул (3.3) представимы в виде

$$2\langle G_j A_{jj} x, x\rangle_{\kappa_j} + \langle Q_j x, x\rangle_{\kappa_j} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\kappa_j}, \quad j = 1,2. \tag{3.4}$$

Также свойства матриц Q_j позволяют указать постоянные $q_j > 0$, для которых выполняются неравенства

$$\langle Q_j x, x\rangle_{\kappa_j} \geqslant q_j \|x\|^2_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\kappa_j}, \quad j = 1,2. \tag{3.5}$$

3.1. Алгоритм решения

Следуя методике динамического обращения, вводим модель вида

$$[D_*^\gamma w_1^h](t) = A_{11} w_1^h(t) + A_{12} w_2^h(t) + B v^h(t), \tag{3.6}$$

$$[D_*^\gamma w_2^h](t) = A_{21} w_1^h(t) + A_{22} w_2^h(t), \quad t \in T, \tag{3.7}$$

с начальными условиями $w_1^h(\sigma) = x_{1\sigma}$, $w_2^h(\sigma) = x_{2\sigma}$. Будем считать, что координаты модели измеряются с той же погрешностью

$$\|w_1^h(\tau_i^h) - \psi_i^h\|_{\kappa_1} \leqslant \nu_i^h, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Данный случай отличается от рассмотренного в [28], где измерялась часть координат, но в соответствующее их динамике дифференциальное уравнение не входило неизвестное внешнее воздействие.

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи в случае дефицита информации, когда измеряются $x_1(\tau_i^h)$ и $w_1^h(\tau_i^h)$. До начала работы алгоритма фиксируем величину h, семейство $\{\nu_i^h\}_{i=0}^\infty$, выбираем функцию $\alpha\colon (0,1) \to (0,1)$, фиксируем величину $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta^h = \{\tau_i^h\}_{i=0}^\infty$.

Работа алгоритма аналогична описанной в подразд. 2.2 и разбивается на однотипные шаги. Отличие лишь в том, что в течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $[\tau_i^h, \tau_{i+1}^h)$, строится сглаживающий функционал

$$M_i^h[v] = 2\beta_i^h \langle G_1(\psi_i^h - \xi_i^h), Bv\rangle_{\kappa_1} + \alpha(h)\|v\|_m^2, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Так же находится элемент $v_i^{\alpha(h)}$, доставляющий минимум функционалу (3.8), и на вход системы (3.7) подается управление

$$v^h(t) = v_i^{\alpha(h)} = \operatorname{argmin}\{M_i^h[v]\colon v \in P\}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

В результате действия этого управления модель переходит в состояние $w^h(\tau_{i+1}^h)$, а эталонная система под действием неизвестного внешнего воздействия — в состояние $x(\tau_{i+1}^h)$. Далее, на следующих шагах $i+1$ и т. д. аналогичные действия повторяются.

Для доказательства теоремы о сходимости построенных в результате работы алгоритма аппроксимаций внешнего воздействия нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть $\gamma \in (0,1)$, выполнены условия 2–4, а также соотношения*

$$1 + (a_j g_j)^2 < 2q_j, \quad j = 1,2, \tag{3.10}$$

где $a_1 = \|A_{12}\|$, $a_2 = \|A_{21}\|$, $g_j = \|G_j\|$, $q_j = \|Q_j\|$. Тогда можно указать в явном виде постоянные $C_1, C_2, C_3 > 0$, не зависящие от h, такие, что для системы (1.1) *справедливы неравенства*

$$\|w_j^h(\tau_i^h) - x_j(\tau_i^h)\|_{\kappa_j}^2 \leqslant C_j(\rho(h) + \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h)), \quad j = 1,2, \tag{3.11}$$

$$[I^1\|v^h\|_m^2](\tau_i^h) \leqslant [I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h) + C_3(\alpha(h))^{-1}\rho(h) \quad \forall \tau_i^h \in \Delta^h. \tag{3.12}$$

Доказательство. Введем обозначения $\mu_j^h(t) := w_j^h(t) - x_j(t)$, $j = 1,2$, и запишем разность между системами (3.1), (3.2) и (3.6), (3.7). Получим

$$[D_*^\gamma \mu_1^h](t) = A_{11}\mu_1(t) + A_{12}\mu_2(t) + B(v^h(t) - u(t)), \tag{3.13}$$

$$[D_*^\gamma \mu_2^h](t) = A_{21}\mu_1(t) + A_{22}\mu_2(t), \quad t \in T. \tag{3.14}$$

Из условий $\mu_2^h(\sigma)=0$, $V_2(0)=0$ и выпуклости функции Ляпунова V_2 следует

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma V_2(\mu_2^h)](t) \leqslant \langle [D_*^\gamma \mu_2^h](t), G_2\mu_2^h(t)\rangle_{\kappa_2} \quad \text{для п.в.} \quad t\in T.$$

Пусть $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$. Подставляя (3.14) в последнее выражение, получаем

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma V_2(\mu_2^h)](t) \leqslant \langle G_2A_{21}\mu_1^h(t),\mu_2^h(t)\rangle_{\kappa_2} + \langle A_{22}\mu_2^h(t), G_2\mu_2^h(t)\rangle_{\kappa_2}. \tag{3.15}$$

Ввиду (3.4) и (3.5) для второго слагаемого правой части (3.15) имеем

$$\langle A_{22}\mu_2^h(t), G_2\mu_2^h(t)\rangle_{\kappa_2} = -\langle Q_2\mu_2^h(t),\mu_2^h(t)\rangle_{\kappa_2} \leqslant -q_2\|\mu_2^h(t)\|_{\kappa_2}^2. \tag{3.16}$$

Используя (3.16) и неравенство Коши — Буняковского, формулу (3.15) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}[D_*^\gamma V_2(\mu_2^h)](t) &\leqslant 2a_2g_2\|\mu_1^h(t)\|_{\kappa_1}\|\mu_2^h(t)\|_{\kappa_2} - 2q_2\|\mu_2^h(t)\|_{\kappa_2}^2\\ &\leqslant ((a_2g_2)^2-2q_2)\|\mu_2^h(t)\|_{\kappa_2}^2 + \|\mu_1^h(t)\|_{\kappa_1}^2.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Для функции Ляпунова V_1 справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}[D_*^\gamma V_1(\mu_1^h)](t) \leqslant \langle [D_*^\gamma \mu_1^h](t), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1} \quad \text{для п.в.} \quad t\in T.$$

Реализуя методику оценки $[D_*^\gamma V_1(\mu_1^h)](t)$, как в доказательстве леммы 3, для (3.13) получаем

$$\begin{aligned}[D_*^\gamma V_1(\mu_1^h)](t) \leqslant\ & 2\langle A_{11}\mu_1^h(t), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1} + 2\langle A_{12}\mu_2^h(t), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1}\\ &+ 2\langle B(v^h(t)-u(t)), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Проделывая преобразования, аналогичные (2.19)–(2.22), имеем

$$2\langle A_{11}\mu_1^h(t), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1} + 2\langle A_{12}\mu_2^h(t), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1} \leqslant ((a_1g_1)^2-2q_1)\|\mu_1^h(t)\|_{\kappa_1}^2 + \|\mu_2^h(t)\|_{\kappa_2}^2 \tag{3.19}$$

и так же для последнего слагаемого в (3.18) получаем

$$\langle B(v^h(t)-u(t)), G_1\mu_1^h(t)\rangle_{\kappa_1} \leqslant c_1\delta_i^h + \langle v^h(t)-u(t), B'G_1(\psi_i^h-\xi_i^h)\rangle_m + c_2\nu_i^h, \tag{3.20}$$

где $c_1 := 4bg_1pM_0$, $c_2 := 4bg_1p$. Объединяя формулы (3.19) и (3.20) в неравенстве (3.18), выводим

$$[D_*^\gamma V_1(\mu_1^h)](t) \leqslant 2c_1\delta_i^h + 2\langle B(v^h(t)-u(t)), G_1(\psi_i^h-\xi_i^h)\rangle_{\kappa_1} + 2c_2\nu_i^h. \tag{3.21}$$

Введем функционал типа Ляпунова

$$\Lambda^h(t) := V_1(\mu_1^h(t)) + V_2(\mu_2^h(t)) + \alpha(h)[I^1\|v^h\|_m^2](t) - \alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](t).$$

Вычисляя дробную производную, находим

$$[D_*^\gamma\Lambda^h](t) = [D_*^\gamma V_1(\mu_1^h)](t) + [D_*^\gamma V_2(\mu_2^h)](t) + \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|v^h\|_m^2](t) - \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|u\|_m^2](t). \tag{3.22}$$

Для правила формирования управления (3.9) аналогично доказательству леммы 3 используем сглаживающий функционал

$$\bar{M}_i^h[v] = 2\langle G_1(\psi_i^h-\xi_i^h), Bv\rangle_{\kappa_1} + \alpha(h)[I^{1-\gamma}\|v\|_m^2](\tau_i^h), \quad i\in\mathbb{N}.$$

Тогда, учитывая в формуле (3.22) неравенства (3.21) и (3.17), а также соотношения (3.10), получаем

$$[D_*^\gamma\Lambda^h](t) \leqslant 2c_1\delta_i^h + 2c_2\nu_i^h.$$

Выполняя те же преобразования, что и в доказательстве леммы 3 (см. (2.26)–(2.28)), приходим к неравенствам

$$\|\mu_j^h(\tau_i^h)\|_{\kappa_j}^2 \leqslant c_5V_j(\mu_j^h(\tau_i^h)) \leqslant c_5\Lambda^h(\tau_i^h) + c_5\alpha(h)[I^1\|u\|_m^2](\tau_i^h), \quad j=1,2.$$

Продолжая доказательство аналогично лемме 3, получаем оценки (3.11), (3.12). □

Теорема 2. *Пусть $\gamma \in (0,1)$, выполнены условия 2–4 и соотношения (3.10). Тогда для любого $\theta \in T$ имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \to \bar{u}(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2([\sigma,\theta],\mathbb{R}^m) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Доказательство этой теоремы также может быть проведено по схеме из [20, теорема 1.2.3] при использовании леммы 4. □

Пример. Рассмотрим применение разработанной методики на модельном примере. Имеется эталонная система дифференциальных уравнений дробного порядка

$$[D_*^{0.8}x_1](t) = -x_1(t) - \frac{1}{4}x_2(t) + u(t),$$

$$[D_*^{0.8}x_2](t) = -\frac{1}{2}x_2(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с начальными условиями $x_1(0) = 0.2$, $x_2(0) = 1$. Управление в эталонной системе задано формулой $u(t) = \cos(5\,t)$, и $P = [-5,5]$.

Пусть для измерений доступна только первая координата x_1. Коэффициенты $A_{11} = -1 < 0$, $A_{22} = -1/2 < 0$ удовлетворяют условию 4. Выбираем $G_1 = 1$, $G_2 = 2$ и из равенств (3.4) получаем $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$. Погрешность измерений для векторов ξ_i^h будем моделировать по формулам $\xi_i^h = x_1(\tau_i^h) + \nu_i^h \sin(128\pi\tau_i^h)$.

Будем восстанавливать $u(t)$ по заданным значениям ξ_i^h и зафиксируем $\theta = 2$. Можно рассматривать отрезок времени произвольной длины, но предложенный алгоритм имеет свойство адаптивности, выражающееся в том, что с течением времени восстановление происходит все точнее, т. е. наибольшее расхождение между эталонным управлением и восстановленным наблюдается на первых шагах работы алгоритма.

Проверим условия (3.10). Находим $a_1 = |A_{12}| = 1/4$, $a_2 = |A_{21}| = 0$, $g_1 = |G_1| = 1$, $g_2 = |G_2| = 2$, $q_1 = |Q_1| = 1$, $q_2 = |Q_2| = 1$. Тогда получаем

$$1 + (a_1 g_1)^2 = 1.625, \quad 2q_1 = 2, \quad 1.625 < 2; \quad 1 + (a_2 g_2)^2 = 1, \quad 2q_2 = 2, \quad 1 < 2.$$

Параметры алгоритма выбираем согласно предложению 1, где $d = 1$. Полагаем функцию $\alpha(h) = h^{3/4}$, что удовлетворяет условию 3. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 1 и 2, где график помехи $u(t)$ показан пунктирной линией, а график построенного приближения $v^h(t)$ — сплошной.

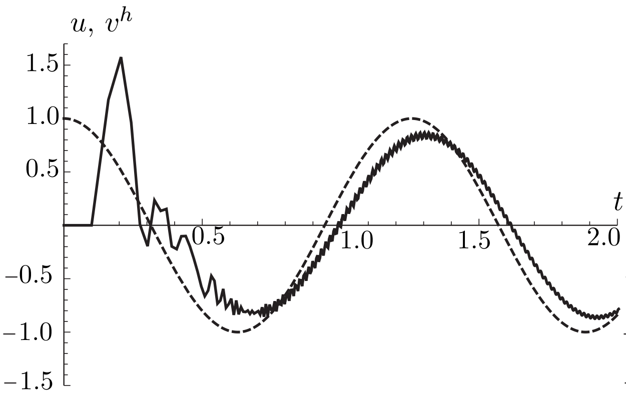

Рис. 1. Идентификация помехи при $h = 0.1$.

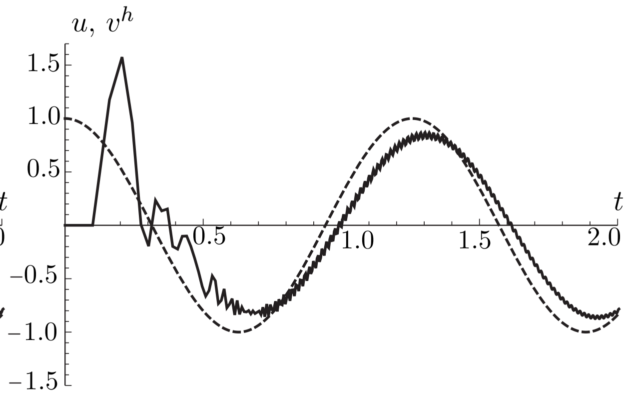

Рис. 2. Идентификация помехи при $h = 0.001$.

Заключение

Рассмотрена задача онлайн идентификации помехи в системе дифференциальных уравнений дробного порядка с дробной производной Капуто на бесконечном временном горизонте. Для ее решения предложен адаптивный устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм, в основе которого лежит метод экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и метод регуляризации А. Н. Тихонова со сглаживающим функционалом специального вида. Рассмотрен модельный пример, в котором для конкретной частично наблюдаемой системы дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто продемонстрирована работа предложенного алгоритма по нахождению неизвестного внешнего возмущения. На рис. 1 и 2 показано, что с уменьшением уровня погрешности точность восстановления помехи возрастает. Дальнейшее развитие используемого подхода видится, с одной стороны, в использовании стабилизаторов различных видов в методе регуляризации А. Н. Тихонова, с другой — для эффективной компьютерной реализации алгоритма необходимо применение технологий параллельных вычислений ввиду большого количества вычислительных операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T.** Estimation with applications to tracking and navigation: Theory algorithms and software. NY: John Wiley & Sons, 2004. 592 p.
2. **Keesman K.J.** System identification. An introduction. London: Springer-Verlag, 2011. 323 p.
3. **Norton J.P.** An Introduction to identification. NY: Dover Publ. Inc., 2009. 310 p.
4. **Pandolfi L.** Systems with persistent memory: Controllability, stability, identification. Cham: Springer, 2021. 356 p.
5. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 285 с.
6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: УРСС, 2022. 288 с.
7. **Butera S., Di Paola M.** A physically based connection between fractional calculus and fractal geometry // Annals. of Physics. 2014. Vol. 350. P. 146–158. doi: 10.1016/j.aop.2014.07.008
8. **Podlubny I.** Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 367–386.
9. **Станиславский А.А.** Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // Теорет. и мат. физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 491–507. doi: 10.4213/tmf34
10. **Tarasov V.E.** Geometric interpretation of fractional-order derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19, no. 5. P. 1200–1221. doi: 10.1515/fca-2016-0062
11. **Gomoyunov M.I.** Differential games for fractional-order systems: Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation and optimal feedback strategies // Mathematics. 2021. Vol. 9, no. 14, article no. 1667. doi: 10.3390/math9141667
12. **Matychyn I., Onyshchenko V.** Time-optimal control of linear fractional systems with variable coefficients // Internat. J. Appl. Math. & Comp. Sci. 2021. Vol. 31, no. 3. P. 375–386. doi: 10.34768/amcs-2021-0025
13. **Boumenir A., Kim Tuan V., Al-Khulaifi W.** Reconstructing a fractional integro-differential equation // Math. Methods Appl. Sci. 2021. Vol. 44, no. 4. P. 3159–3166. doi: 10.1002/mma.6648
14. **Самко С.Г. Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
15. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. NY: Elsevier Science, 2006. 540 p.
16. **Васин В.В.** Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 313 с.
17. **Kabanikhin S.I.** Inverse and Ill-posed problems: Theory and application. Berlin: De Gruyter, 2012. 459 p.
18. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
19. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

20. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2011. 292 с.
21. **Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 1. С. 16–28.
22. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** О реконструкции входного воздействия параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Изв. вузов. Математика. 2014. № 8. С. 30–41.
23. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме динамического восстановления входного воздействия // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 1. С. 88–100. doi: 10.1134/S0374064113010093
24. **Розенберг В.Л.** Динамическая реконструкция возмущений в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 7. С. 1121–1131. doi: 10.31857/S004446690001461-8
25. **Максимов В.И.** О реконструкции управлений в экспоненциально устойчивых линейных системах, подверженных малым возмущениям // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, № 6. С. 945–955.
26. **Maksimov V.I.** The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations // J. Inverse and Ill-posed Problems. 2021. Vol. 29, no. 1. P. 125–156. doi: 10.1515/jiip-2020-0040
27. **Сурков П.Г.** Задача динамического восстановления правой части системы дифференциальных уравнений нецелого порядка // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 865–874. doi: 10.1134/S0374064119060128
28. **Surkov P.G.** Real-time reconstruction of external impact on fractional order system under measuring a part of coordinates // J. Comp. Appl. Math. 2021. Vol. 381, no. 3, article no. 113039. doi: 10.1016/j.cam.2020.113039
29. **Surkov P.G.** Approximate calculation of the Caputo-type fractional derivative from inaccurate data. Dynamical approach // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2021. Vol. 24, no. 3. P. 895–922. doi: 10.1515/fca-2021-0038
30. **Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L.** A recursive deconvolution approach to disturbance reduction // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. Vol. 49, no. 6. P. 907–921. doi: 10.1109/TAC.2004.829596
31. **Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.** Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. С. 247–260. doi: 10.4213/tm4220
32. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: УРСС, 2022. 230 с.
33. **Matignon D.** Stability results for fractional differential equations with applications to control processing // Computational engineering in systems applications. 1996. Vol. 2, no. 1. P. 963–968.
34. **Gomoyunov M.I.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. Vol. 21, no. 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .

Поступила 12.03.2023
После доработки 10.05.2023
Принята к публикации 15.05.2023

Сурков Платон Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
кафедра прикладной математики и механики
Институт естественных наук и математики
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: spg@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bar-Shalom Y., Li X.R., Kirubarajan T. *Estimation with applications to tracking and navigation: Theory algorithms and software.* NY: John Wiley & Sons, 2004, 592 p.
2. Keesman K.J. *System identification. An introduction.* London: Springer-Verlag, 2011, 323 p.

3. Norton J.P. *An introduction to identification.* NY: Dover Publ. Inc., 2009, 310 p.
4. Pandolfi L. *Systems with persistent memory: Controllability, stability, identification.* Cham: Springer, 2021, 356 p.
5. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* Providence: AMS, 1986, 290 p. ISBN: 0821898140. Original Russian text published in Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza, Novosibirsk: Nauka Publ., 1980, 285 p.
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for solutions of ill-posed problems.* NY: Wiley, 1981, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach, Moscow: Nauka Publ., 1922, 288 p.
7. Butera S., Di Paola M. A physically based connection between fractional calculus and fractal geometry. *Annals of Physics*, 2014, vol. 350, pp. 146–158. doi: 10.1016/j.aop.2014.07.008
8. Podlubny I. Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2002. Vol. 5, no. 4, pp. 367–386.
9. Stanislavsky A.A. Probability interpretation of the integral of fractional order. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, pp. 418–431. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018457.70786.36
10. Tarasov V.E. Geometric interpretation of fractional-order derivative. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2016, vol. 19, no. 5, pp. 1200–1221. doi: 10.1515/fca-2016-0062
11. Gomoyunov M.I. Differential games for fractional-order systems: Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation and optimal feedback strategies. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 14, article no. 1667. doi: 10.3390/math9141667
12. Matychyn I., Onyshchenko V. Time-optimal control of linear fractional systems with variable coefficients. *Internat. J. Appl. Math. & Comp. Sci.*, 2021, vol. 31, no. 3. pp. 375–386. doi: 10.34768/amcs-2021-0025
13. Boumenir A., Kim Tuan V., Al-Khulaifi W. Reconstructing a fractional integro-differential equation. *Math. Methods in the Appl. Sci.*, 2021, vol. 44, no. 4, pp. 3159–3166. doi: 10.1002/mma.6648
14. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach Science Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya, Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. NY: Elsevier Science, 2006, 540 p.
16. Vasin V.V. *Basics of the theory of Ill-posed problems* [Osnovy teorii nekorrektnykh zadach]. Novosibirsk: Sibir. Otd. Ross. Akad. Nauk Publ., 2020. 313 p. (in Russian).
17. Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems: Theory and application.* Berlin: De Gruyter, 2012, 459 p.
18. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Best approximation of the differentiation operator in the class of nonanticipatory operators. *Mathematical notes of the Academy of sciences of the USSR*, 1985, vol. 37, pp. 109–114. doi: 10.1007/B01156754
19. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I., Pozitsionnye differentsial'nye igry, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
20. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem* [Methods of Dynamic Reconstruction of Inputs of Control Systems]. Ekaterinburg, Ural'sk. Otd. Ross. Akad. Nauk Publ., 2011, 292 p.
21. Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 14–25. doi: 10.1134/S0965542516010139
22. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On reconstruction of an input of a parabolic equation on an infinite time interval. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 8. pp. 24–34. doi: 10.3103/S1066369X14080039
23. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On an algorithm for dynamic reconstruction of the input. *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 88–100. doi: 10.1134/S0012266113010096
24. Rozenberg V.L. Dynamic reconstruction of disturbances in a quasilinear stochastic differential equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 7, pp. 1071–1080. doi:10.1134/S096554251807014X
25. Maksimov V.I. Reconstruction of controls in exponentially stable linear systems subjected to small perturbations. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, no. 6. pp. 851–861. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2007.12.004
26. Maksimov V.I. The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations. *J. Inverse and Ill-posed Problems*, 2021, vol. 29, no. 1, pp. 125–156. doi: 10.1515/jiip-2020-0040

27. Surkov P.G. Dynamic right-hand side reconstruction problem for a system of fractional differential equations. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 849–858. doi: 10.1134/S0012266119060120
28. Surkov P.G. Real-time reconstruction of external impact on fractional order system under measuring a part of coordinates. *J. Comp. Appl. Math.*, 2021, vol. 381, no. 3, article no. 113039. doi: 10.1016/j.cam.2020.113039
29. Surkov P.G. Approximate calculation of the Caputo-type fractional derivative from inaccurate data. Dynamical approach. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2021, vol. 24, no. 3, pp. 895–922. doi: 10.1515/fca-2021-0038
30. Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L. A recursive deconvolution approach to disturbance reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 2004, vol. 49, no. 6, pp. 907–921. doi: 10.1109/TAC.2004.829596
31. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Weak* solution to a dynamic reconstruction problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 315, pp. 233–246. doi: 10.1134/S0081543821050187
32. Barbashin E.A. *Introduction to the Theory of Stability.* Groningen: Wolters-Noordhoff Publ., 1970, 223 p. Original Russian text published in Barbashin E.A. Vvedenie v teoriyu ustoichivosti, Moscow, URSS Publ., 2022, 230 c.
33. Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in Systems Applications*, 1996, vol. 2, no. 1, pp. 963–968.
34. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066

Received March 12, 2023
Revised May 10, 2023
Accepted May 15, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-71-10070, https://rscf.ru/project/21-71-10070/)

Platon Gennad'evich Surkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, 620000 Russia, e-mail: spg@imm.uran.ru .

Cite this article as: P. G. Surkov. An adaptive algorithm for a stable online identification of a disturbance in a fractional-order system on an infinite time horizon. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 172–188.