ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.926

О СУЩЕСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А. Х. Сташ

В настоящей работе исследуются различные разновидности показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными ограниченными коэффициентами. Подсчет показателей колеблемости происходит путем усреднения числа нулей (или знаков, или корней, или гиперкорней) проекции решения x дифференциальной системы на какую-либо прямую, причем эта прямая выбирается так, чтобы полученное среднее значение оказалось минимальным: если указанная минимизация производится перед усреднением, то получаются слабые показатели колеблемости, а если после, то сильные показатели колеблемости. При вычислении показателей колеблемости решения y линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка осуществляется переход к вектор-функции $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$. В первой части работы для любого наперед заданного натурального числа N конструктивно построена двумерная периодическая линейная дифференциальная система, обладающая тем свойством, что ее спектры всех верхних и нижних сильных и слабых показателей колеблемости строгих и нестрогих знаков, нулей, корней и гиперкорней содержат один и тот же набор, состоящий из N различных существенных значений, причем как метрически, так и топологически. Более того, все эти значения реализованы на одном и том же наборе решений построенной системы, т. е. для каждого решения из этого набора все перечисленные выше показатели колеблемости совпадают между собой. Во второй части работы доказана аналогичная теорема о существовании двумерной дифференциальной системы со счетным множеством существенных (и метрически, и топологически) значений показателей колеблемости. При построении указанных систем и доказательстве требуемых результатов использованы аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений и методы теории возмущений решений линейных дифференциальных систем, в частности, авторская методика управления фундаментальной матрицей решений таких систем в одном частном случае.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, колеблемость, число нулей, показатели колеблемости, частота Сергеева.

A. Kh. Stash. On essential values of exponents of oscillation for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system.

In this paper, we study various types of exponents of oscillations for solutions of linear homogeneous differential systems with continuous bounded coefficients. The calculation of the exponents of oscillation is carried out by averaging the number of zeros (or signs, or roots, or hyper roots) of the projection of a solution x of a differential system onto any straight line, and this line is chosen so that the resulting average value is minimal: if the minimization is performed before (after) the averaging, then weak (strong, respectively) exponents of oscillation are obtained. In the calculation of the exponents of oscillation for a solution y of a linear homogeneous n-th order differential equation, a transition to the vector function $x = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ is carried out. In the first part of the paper, for any preassigned natural number N, a two-dimensional periodic linear differential system is constructed, which has the property that its spectra of all upper and lower strong and weak exponents of oscillation of strict and nonstrict signs, zeros, roots, and hyper roots contain the same set, consisting of N different essential values, both metrically and topologically. Moreover, all these values are implemented on the same set of solutions of the constructed system, that is, for each solution from this set, all the exponents of oscillations coincide with each other. In the second part of the paper, a similar theorem on the existence of a two-dimensional differential system with a countable set of essential (both metrically and topologically) values of exponents of oscillation is proved. In constructing the mentioned systems and proving the required results, we use analytical methods of the qualitative theory of differential equations and methods of the theory of perturbations of solutions of linear differential systems, in particular, the author's technique for controlling the fundamental matrix of solutions of such systems in one special case.

Keywords: differential equation, linear system, oscillation, number of zeros, exponents of oscillation, Sergeev's frequency.

MSC: 34A30, 34C10, 34D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-157-171

Введение

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с *непрерывными ограниченными* оператор-функциями $A:\ \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Множество всех ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$, а звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}^n_* = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

В работах И. Н. Сергеева [1–5] вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений на полупрямой линейных дифференциальных уравнений и систем. Эти характеристики отвечают за колеблемость и блуждаемость решения. В статье [6] были систематизированы все введенные И. Н. Сергеевым к настоящему моменту характеристики ляпуновского типа, что привело к изменению названий некоторых из них. В частности, полные и векторные частоты переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости. В работах [7–11] характеристические частоты [1] стали называться частотами Сергеева.

В настоящей работе будем рассматривать следующие разновидности показателей:

– показатели колеблемости *строгих знаков*, *нестрогих знаков*, *нулей*, *корней* и *гиперкорней*;

– *верхние* и *нижние* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *точные*);

– *сильные* и *слабые* показатели колеблемости (в случае их совпадения — *абсолютные*).

Сначала дадим основные определения.

О п р е д е л е н и е 1. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (соответственно неотрицательные), так и отрицательные (соответственно неположительные) значения (см. [1]).

О п р е д е л е н и е 2. Для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}^n_*$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}^n_*$ через $\nu^\alpha(x, m, t)$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно обозначим (см. [1–3]):

– число точек *строгой смены знака* скалярного произведения $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число точек *нестрогой смены знака* скалярного произведения $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число нулей функции $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число корней (т. е. нулей с учетом их *кратности*) функции $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$;

– число гиперкорней функции $\langle x, m\rangle$ на промежутке $(0, t]$, где в процессе подсчета этого количества каждый некратный корень считается ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз независимо от его фактической кратности.

О п р е д е л е н и е 3. *Верхние* (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}^n_*$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами (см. [2–4])

$$\hat{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m, t) \quad \Big(\check{\nu}^\alpha_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m, t)\Big),$$
$$\hat{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \varlimsup_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m, t) \quad \Big(\check{\nu}^\alpha_\circ(x) \equiv \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x, m, t)\Big).$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какого-либо из показателей колеблемости будем называть его *точным*, убирая в его обозначении крышечку и галочку.

О п р е д е л е н и е 4. Множество значений показателя $\varkappa\colon \mathcal{S}_*(A) \to \mathbb{R}$ назовем спектром этого показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$, а значение показателя $\varkappa$, принадлежащее спектру системы A, назовем

а) метрически существенным (см. [12]), если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, начальные значения $x(0) \in \mathbb{R}^n$ которых заполняют множество положительной меры в $\mathbb{R}^n$;

б) топологически существенным (см. [13]), если оно принимается на решениях $x \in \mathcal{S}_*(A)$, множество начальных значений $x(0) \in \mathbb{R}^n$ которых, пересеченное с некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^n$, служит дополнением в U к множеству первой категории Бэра.

Сильные показатели, в отличие от слабых, не являются остаточными, т. е. инвариантными относительно изменения решения на любом конечном отрезке [14].

Решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности не имеют вовсе нулей, а значит, все показатели колеблемости равны нулю. Известно [2], что спектры показателей колеблемости линейного однородного уравнения второго порядка состоят ровно из одного элемента, но зато спектры показателей двумерных систем могут достигать мощности континуума [15]. В последнем случае принципиально невозможно добиться того, чтобы сразу все значения какого-либо показателя оказались существенными.

Исследование спектров показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [2; 16] и полностью завершено в [17]. В докладах И. Н. Сергеева [12; 13] было установлено, что спектры показателей колеблемости нулей любой автономной системы содержат одно типичное значение.

В работе [18] доказано существование двумерной линейной системы с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости нулей которой содержат любое наперед заданное конечное число метрически и топологически существенных значений. В [19] доказано существование линейной двумерной дифференциальной системы со счетным множеством существенных (и метрически, и топологически) значений показателей колеблемости нулей.

Настоящая работа логически продолжает и обобщает результаты работ [18; 19] на большее число разновидностей показателей колеблемости.

1. Вычисление показателей колеблемости решений линейных однородных дифференциальных систем

Вычисление показателей колеблемости упрощает следующая

Лемма 1. *Пусть возрастающая последовательность положительных чисел $\{t_k\}$ удовлетворяет условиям*

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1. \tag{1.1}$$

Тогда для любых $x \in \mathcal{S}_*^n$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы равенства

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k) \quad \Big(\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varliminf_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k)\Big),$$
$$\hat{\nu}_\circ^\alpha(x) = \varlimsup_{k\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k) \quad \Big(\check{\nu}_\circ^\alpha(x) = \varliminf_{k\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k)\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольные $x \in \mathcal{S}_*^n$ и $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ и введем обозначения

$$\inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k) = \hat{\nu}_\bullet^\alpha, \qquad \varlimsup_{k\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k) = \hat{\nu}_\circ^\alpha.$$

Благодаря условиям (1.1) можно каждое значение $t > t_1$ заключить в свои границы $t_k < t \le t_{k+1}$ и записать оценки снизу

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \ge \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_{k+1}}\nu^\alpha(x,m,t_k)$$
$$= \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k)\cdot \lim_{k\to\infty}\frac{t_k}{t_{k+1}} = \hat\nu^\alpha_\bullet,$$

$$\hat\nu^\alpha_\circ(x) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \ge \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t_{k+1}}\nu^\alpha(x,m,t_k)$$
$$= \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_k)\cdot \lim_{k\to\infty}\frac{t_k}{t_{k+1}} = \hat\nu^\alpha_\circ$$

и сверху

$$\hat\nu^\alpha_\bullet(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \le \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_{k+1})$$
$$= \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\pi}{t_{k+1}}\nu^\alpha(x,m,t_{k+1})\cdot \lim_{k\to\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k} = \hat\nu^\alpha_\bullet,$$

$$\hat\nu^\alpha_\circ(x) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\alpha(x,m,t) \le \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t_k}\nu^\alpha(x,m,t_{k+1})$$
$$= \overline{\lim_{k\to+\infty}} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t_{k+1}}\nu^\alpha(x,m,t_{k+1})\cdot \lim_{k\to\infty}\frac{t_{k+1}}{t_k} = \hat\nu^\alpha_\circ,$$

из которых следуют равенства $\hat\nu^\alpha_\bullet(x) = \hat\nu^\alpha_\bullet$, $\quad \hat\nu^\alpha_\circ(x) = \hat\nu^\alpha_\circ$.

Для нижних показателей колеблемости все утверждения настоящей леммы доказываются аналогично.

Лемма 1 доказана.

2. Двумерная периодическая система с конечным спектром

В этом разделе докажем теорему о существовании двумерной системы с периодическими коэффициентами, обладающей любым наперед заданным конечным числом точных, абсолютных и существенных значений показателей колеблемости.

Теорема 1. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ существует система $A \in \mathcal{M}^2$ с периодическими коэффициентами, имеющая набор решений $x_1,\ldots,x_N \in \mathcal{S}_*(A)$, удовлетворяющий при каждом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ условиям*

$$\nu^\alpha_\circ(x_i) = \nu^\alpha_\bullet(x_i) = \frac{i}{N}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

причем все эти значения показателей колеблемости являются существенными (и метрически, и топологически).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. По заданному $N \in \mathbb{N}$ выберем ϵ и последовательности $\{r_i\}_{i=1}^N$, $\{s_{i-1}\}_{i=1}^N$, $\{\delta_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} 1/6 > \epsilon > \delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_N > 0, \quad r_0 = 0, \quad r_i = 2\pi i, \quad s_{i-1} = 2\pi i - \pi, \quad i = \overline{1,N}, \\ 1/4 < \epsilon + \delta_i < 1/3, \quad i = 1,\ldots,N. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Зададим 2π-периодическую непрерывно дифференцируемую функцию $\psi(\cdot)$, возрастающую на отрезке $[0,\,\pi]$, убывающую на отрезке $[\pi,\,2\pi]$ и принимающую на концах отрезков значения

$$\psi(0) = \psi(2\pi) = 0, \quad \psi(\pi) = \pi, \quad \dot\psi(0) = \dot\psi(\pi) = \dot\psi(2\pi) = 0.$$

Сначала на промежутке $[0,\,2\pi N] = [r_0,\,r_1] \cup [r_1,\,r_2] \cup \cdots \cup [r_{N-1},\,r_N]$ построим двумерную систему $\dot x = A^1(t)x$ с непрерывными коэффициентами.

Для этого на промежутках
$$[r_{i-1},\, r_i], \quad i = 1, \dots, N,$$
определим соответственно фундаментальные матрицы
$$X(t, \delta_i) = \left(x^1(t), x^2(t, \delta_i)\right), \quad i = 1, \dots, N,$$
где
$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos((1-\epsilon)\psi(t)) \\ \sin((1-\epsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad x^2(t, \delta_i) = \begin{pmatrix} -\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ \cos((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

Действительно, в силу (2.1) при каждом $i = \overline{1, N}$ имеем
$$\det X(t, \delta_i) = \cos((\epsilon + \delta_i)\psi(t)) \geq 1/2.$$

Через E_2 и O_2 обозначим соответственно единичную и нулевую матрицы второго порядка. Построенные фундаментальные матрицы в точках стыка удовлетворяют равенствам
$$X(r_i, \delta_i) = X(r_i, \delta_{i+1}) = E_2, \quad \dot X(r_i, \delta_i) = \dot X(r_i, \delta_{i+1}) = O_2, \quad i = \overline{1, N-1},$$
благодаря которым фундаментальная матрица
$$X^1(t) = \begin{cases} X(t, \delta_1), & t \in [r_0,\, r_1], \\ X(t, \delta_2), & t \in [r_1,\, r_2], \\ \dots, \\ X(t, \delta_N), & t \in [r_{N-1},\, r_N] \end{cases}$$
является непрерывно дифференцируемой на $[0,\, 2\pi N]$, а значит, коэффициенты системы
$$A^1(t) = \begin{cases} A_1(t), & t \in [r_0,\, r_1], \\ A_2(t), & t \in [r_1,\, r_2], \\ \dots, \\ A_N(t), & t \in [r_{N-1},\, r_N] \end{cases}$$
являются непрерывными на указанном отрезке.

Теперь построим систему $A \in \mathcal{M}^2$ с периодическими коэффициентами. В силу равенств
$$X^1(0) = X^1(2\pi N) = E_2, \quad \dot X^1(0) = \dot X^1(2\pi N) = O_2$$
фундаментальная матрица
$$X(t) = \begin{cases} X^1(t), & t \in [0,\, 2\pi N], \\ X^1(t - 2\pi N), & t \in [2\pi N,\, 4\pi N], \\ X^1(t - 4\pi N), & t \in [4\pi,\, 6\pi], \\ \dots \end{cases}$$
является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}_+$, следовательно, система
$$A(t) = \begin{cases} A^1(t), & t \in [0,\, 2\pi N], \\ A^1(t - 2\pi N), & t \in [2\pi N,\, 4\pi N], \\ A^1(t - 4\pi N), & t \in [4\pi N,\, 6\pi N], \\ \dots \end{cases}$$

на $\mathbb{R}_+$ является непрерывной $2\pi N$-периодической, а значит, ограниченной.

2. Из множества $\mathcal{S}_*(A)$ при каждом $i = 1, \ldots, N$ выберем решение

$$y^i = c_1^i x^1 + c_2^i x^2, \quad c_1^i, c_2^i > 0,$$

удовлетворяющее при некотором $k^i > 0$ условию

$$-k^i y^i(r_{i-1}) = y^i(s_{i-1}). \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение функцию φ, которая каждому ненулевому двумерному вектору ставит в соответствие угол между этим вектором и положительным направлением оси $0x_1$, отсчитываемый против часовой стрелки.

Заметим, что решения x^1 и x^2 удовлетворяют равенствам

$$\varphi(x^1(s_{i-1})) - \varphi(x^1(r_{i-1})) = \angle\left(x^1(s_{i-1}),\, x^1(r_{i-1})\right) = (1-\epsilon)\pi, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\varphi(x^2(s_{i-1})) - \varphi(x^2(r_{i-1})) = \angle\left(x^2(s_{i-1}),\, x^2(r_{i-1})\right) = (1+\delta_i)\pi, \quad i = 1, \ldots, N,$$

из которых (с учетом неравенств $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_N$) следует, что

$$\varphi_0(y^j) > \varphi_1(y^j) > \cdots > \varphi_{N-1}(y^j), \quad j = 1, \ldots, N,$$

где

$$\varphi_{i-1}(y^j) = \varphi(y^j(s_{i-1})) - \varphi(y^j(r_{i-1})) = \angle\left(y^j(s_{i-1}),\, y^j(r_{i-1})\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Поэтому будут справедливы неравенства $\varphi(y^1(0)) < \varphi(y^2(0)) < \cdots < \varphi(y^N(0)) < \varphi(x^2(0))$.

Проследим за поведением любого фиксированного решения $y^i \in \mathcal{S}_*(A)$ на промежутке

$$(0,\, 2N\pi] = (r_0,\, s_0] \cup (s_0,\, r_1] \cup \cdots \cup (s_{N-1},\, r_N].$$

На участке $(r_{i-1},\, s_{i-1}]$ решение y^i в силу условия (2.2) коллинеарности векторов $y^i(s_{i-1})$ и $y^i(r_{i-1})$ (точнее их противоположной направленности) поворачивается против часовой стрелки ровно на $\varphi(y^i(s_{i-1})) - \varphi(y^i(r_{i-1})) = \angle\left(y^i(s_{i-1}),\, y^i(r_{i-1})\right) = \pi$, а на участке $(s_{i-1},\, r_i]$ решение y^i, поворачиваясь по часовой стрелке, возвращается в исходное положение

$$y^i(r_{i-1}) = (c_1^i,\, c_2^i). \tag{2.3}$$

На каждом из промежутков

$$(r_j,\, s_j], \quad j = 0, \ldots, i-2, \tag{2.4}$$

решение y^i поворачивается против часовой стрелки более чем на π, т. е.

$$\varphi(y^i(s_{j-1})) - \varphi(y^i(r_{j-1})) = \angle\left(y^i(s_{j-1}),\, y^i(r_{j-1})\right) > \pi, \quad j = 1, \ldots, i-1,$$

а на промежутках

$$(s_{j-1},\, r_j], \quad j = 1, \ldots, i-1, \tag{2.5}$$

совершает такие же, что и на предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное положение (2.3).

На каждом из промежутков

$$(r_j,\, s_j], \quad j = i, \ldots, N-1, \tag{2.6}$$

решение y^i поворачивается против часовой стрелки менее чем на π, т. е.

$$\varphi(y^i(s_{j-1})) - \varphi(y^i(r_{j-1})) = \angle\left(y^i(s_{j-1}),\, y^i(r_{j-1})\right) < \pi, \quad j = i+1, \ldots, N,$$

а на промежутках

$$(s_j,\, r_{j+1}], \quad j = i, \ldots, N-1, \tag{2.7}$$

совершает такие же, что и на предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное положение (2.3).

Решение, совершающее поворот не менее чем на π, будет ортогонально в одной или двух точках наперед заданному ненулевому вектору. Если же решение совершает поворот менее чем на π, то скалярное произведение этого решения и некоторого ненулевого вектора может быть отлично от нуля. Следовательно, можно указать такой вектор $m^i \in \mathbb{R}^2$, что на каждом из промежутков (2.4), (2.5), $(r_{i-1},\, s_{i-1}]$, $(s_{i-1},\, r_i]$ решение y^i будет ортогонально этому вектору в одной точке, а на каждом из промежутков (2.6), (2.7) ни разу не будет ортогонально. При этом все нули каждой функции $\langle y^i, m^i\rangle$ являются строгими сменами знака.

Следовательно, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \nu^\alpha(y^i, m, r_N) = \nu^\alpha(y^i, m^i, r_N) = 2i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.8}$$

3. Для вычисления нижних показателей колеблемости произвольного периодического решения $y^i \in \mathcal{S}_*(a)$ зададим последовательность $t_k = t_{k-1} + 2\pi N,\ t_0 \equiv 0,\ k \in \mathbb{N}$, обладающую свойствами

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_k}{t_{k-1}} = \lim_{k\to+\infty}\left(1 + \frac{2\pi N}{t_{k-1}}\right) = 1.$$

Тогда по лемме 1 с учетом равенств (2.8) при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ имеем

$$\begin{aligned}\check\nu^\alpha_\bullet(y^i) &= \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{\pi \sum\limits_{l=1}^{j} \nu^\alpha(y^i, m, t_{l-1}, t_l)}{t_j} \\ &= \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \varliminf_{j\to+\infty} \frac{\pi j \nu^\alpha(y^i, m, t_1)}{2\pi N j} = \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\nu^\alpha(y^i, m, t_1)}{2N} = \frac{i}{N},\end{aligned}$$

$$\check\nu^\alpha_\circ(y^i) = \varliminf_{j\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi \sum\limits_{l=1}^{j} \nu^\alpha(y^i, m, t_{l-1}, t_l)}{t_j} = \varliminf_{j\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi j \nu^\alpha(y^i, m, t_1)}{2\pi N j} = \frac{i}{N}.$$

Аналогичные равенства справедливы и для верхних частот, поэтому

$$\nu^\alpha_\bullet(y^i) = \nu^\alpha_\circ(y^i) = \frac{i}{N}, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.9}$$

4. Положим $y^{N+1} = x^2$. Для фиксированного $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ произвольное решение z с начальными условиями

$$\varphi(z(0)) \in \big[\varphi(y^i(0)),\, \varphi(y^{i+1}(0))\big)$$

обладает следующими свойствами:

- на каждом из промежутков $(r_j,\, s_j]$, $j = 0, \ldots, i-1$, поворачивается против часовой стрелки более чем на π;
- на промежутках $(s_{j-1},\, r_j]$, $j = 1, \ldots, i$, совершает такие же, что и на предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное положение;
- на каждом из промежутков (2.6) поворачивается против часовой стрелки менее чем на π;
- на промежутках (2.7) совершает такие же, что и на предыдущих промежутках, повороты по часовой стрелке и занимает каждый раз исходное положение.

Следовательно, на основании рассуждений, проведенных в пп. 2 и 3 настоящего доказательства, решение z удовлетворяет равенствам $\nu^\alpha_\bullet(z) = \nu^\alpha_\circ(z) = \dfrac{i}{N}$, $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$.

Таким образом, значения, задаваемые равенствами (2.9), являются метрически и топологически существенными.

Теорема 1 доказана.

3. Счетные спектры показателей колеблемости двумерных систем

В этом разделе докажем теорему о существовании двумерной системы со счетным множеством точных, абсолютных и существенных значений показателей колеблемости.

Теорема 2. *Существует система $A \in \mathcal{M}^2$, имеющая такую последовательность решений $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{S}_*(A)$, что при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнено*

$$\nu_\circ^\alpha(x_i) = \nu_\bullet^\alpha(x_i) = 1 - 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N},$$

причем все эти значения являются существенными (и метрически, и топологически).

Доказательство. 1. Выберем $\epsilon > 0$ и положительную строго убывающую последовательность $\{\delta_k\}$ так, чтобы

$$1/6 > \epsilon > \delta_k, \quad 1/4 < \epsilon + \delta_k < 1/3, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ существуют линейные однородные двумерные дифференциальные системы с фундаментальными матрицами

$$X(t, \delta_i) = \left(x^1(t),\, x^2(t, \delta_i)\right),$$

где

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos((1-\epsilon)\psi(t)) \\ \sin((1-\epsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}, \quad x^2(t, \delta_i) = \begin{pmatrix} -\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ \cos((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix},$$

$\psi(\cdot)$ — функция, определенная в п. 1 доказательства теоремы 1.

Производные по t имеют вид

$$\dot{X}(t, \delta_i) = \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} -(1-\epsilon)\sin((1-\epsilon)\psi(t)) & -(1+\delta_i)\cos((1+\delta_i)\psi(t)) \\ (1-\epsilon)\cos((1-\epsilon)\psi(t)) & -(1+\delta_i)\sin((1+\delta_i)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

В силу (3.1) выполнена оценка снизу

$$\det X(t, \delta_i) = \cos((\epsilon + \delta_i)\psi(t)) \geq 1/2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i \in \mathbb{N},$$

откуда следует непрерывность и ограниченность матрицы

$$X^{-1}(t, \delta_i) = \frac{1}{\cos((\epsilon+\delta_i)\psi(t))} \begin{pmatrix} \cos((1+\delta_i)\psi(t)) & \sin((1+\delta_i)\psi(t)) \\ -\sin((1-\epsilon)\psi(t)) & \cos((1-\epsilon)\psi(t)) \end{pmatrix}.$$

Известно [20, с. 75], что фундаментальная матрица удовлетворяет исходной матричной системе $\dot{X}(t, \delta_i) = A_i(t)X(t, \delta_i),\ t \geq 0,\ i \in \mathbb{N}$, а значит, без труда восстанавливаются системы

$$A_i(t) = \dot{X}(t, \delta_i)X^{-1}(t, \delta_i) \in \mathcal{M}^2, \quad i \in \mathbb{N}.$$

2. При каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $\Delta_k \equiv 2^{k+1}\pi$ и возьмем любую строго убывающую последовательность положительных чисел $\{\epsilon_k\}$, стремящуюся к нулю. Зададим последовательность

$$t_0 \equiv 0, \quad t_1 \equiv \Delta_1, \quad t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Начиная с некоторого k_1 выполняются неравенства

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_1}{t_k} < 1 + \epsilon_1, \quad k \geq k_1.$$

Меняем элементы этой последовательности начиная с некоторого $k_2 > k_1$

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_2, \quad k \geq k_2,$$

так, чтобы $\dfrac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \dfrac{\Delta_2}{t_k} < 1 + \epsilon_2, \quad k \geq k_2$.

Далее, по индукции продолжаем менять полученную последовательность. Если для некоторого $i \in \mathbb{N}$ построена последовательность, элементы которой начиная с номера k_i удовлетворяют условиям

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_i, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_i}{t_k} < 1 + \epsilon_i, \quad k \geq k_i,$$

то выбираем $k_{i+1} > k_i$ так, чтобы при любом $k \geq k_{i+1}$ были выполнены условия

$$t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i+1}, \quad \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1 + \frac{\Delta_{i+1}}{t_k} < 1 + \epsilon_{i+1}.$$

В результате получим последовательность $t_{k+1} \equiv t_k + \Delta_{i(k)}$, обладающую свойствами

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = 1.$$

Разобьем промежуток $[0, t_1]$, образованный первыми двумя элементами построенной последовательности, точкой $t_0^1 \equiv 2\pi$ на части $[0; t_0^1]$, $[t_0^1; t_1]$.

Остальные промежутки $[t_k, t_{k+1}]$, образуемые соседними элементами этой последовательности с шагом Δ_1, также разбиваем на части $[t_k; t_k^1]$, $[t_k^1; t_{k+1}]$, где $t_k^1 \equiv t_k + 2\pi$. Заметим, что $t_{k+1} = t_k^1 + 2\pi$.

Промежутки вида $[t_k, t_{k+1}]$, образованные соседними элементами построенной последовательности с шагом Δ_2, разбиваем точками $t_k^1 \equiv t_k + 2^2\pi$, $t_k^2 \equiv t_k^1 + 2\pi$ на промежутки $[t_k; t_k^1]$, $[t_k^1; t_k^2]$, $[t_k^2; t_{k+1}]$. Здесь $t_{k+1} = t_k^2 + 2\pi$.

Любые два соседних элемента построенной последовательности связаны соотношением

$$t_{k+1} = t_k + \Delta_i, \quad k_i \leq k < k_{i+1}.$$

Промежутки вида $[t_k, t_{k+1}]$(заметим, что $t_{k+1} = t_k^i + 2\pi$), образованные соседними элементами построенной последовательности с шагом Δ_i, с помощью точек

$$t_k^1 \equiv t_k + 2^i\pi, \quad t_k^2 \equiv t_k^1 + 2^{i-1}\pi, \quad t_k^3 \equiv t_k^2 + 2^{i-2}\pi, \ldots, t_k^{i-1} \equiv t_k^{i-2} + 2^2\pi, \quad t_k^i \equiv t_k^{i-1} + 2\pi$$

разбиваем на $i+1$ частей

$$[t_k; t_k^1],\ [t_k^1; t_k^2],\ [t_k^2; t_k^3], \ldots, [t_k^i; t_{k+1}]. \tag{3.2}$$

3. Построим двумерную линейную систему дифференциальных уравнений с непрерывными ограниченными коэффициентами, фундаментальная система решений которой на каждом из промежутков (3.2) при любом фиксированном значении k будет совпадать с наперед выбранными вектор-функциями с положительным определителем Вронского, подобно тому как это делалось в п. 1 доказательства теоремы 1:

- на участке $[t_k; t_k^1]$ возьмем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k, t_k^1)$ которой совпадает с $X(t, \delta_1)$, $t \in [t_k,\ t_k^1]$;
- на участке $[t_k^1; t_k^2]$ возьмем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^1, t_k^2)$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_2)$, $t \in [t_k^1,\ t_k^2]$;
- ... и т. д.;
- на участке $[t_k^{i-2}; t_k^{i-1}]$ возьмем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^{i-2}, t_k^{i-1})$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_{i-1})$, $t \in [t_k^{i-2},\ t_k^{i-1}]$;
- на участке $[t_k^{i-1}; t_k^i]$ возьмем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^{i-1}, t_k^i)$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_i)$, $t \in [t_k^{i-1}; t_k^i]$;
- на участке $[t_k^i; t_{k+1}]$ возьмем систему, фундаментальная матрица $X(t, t_k^i; t_{k+1})$ которой совпадает с матрицей $X(t, \delta_{i+1})$, $t \in [t_k^i; t_{k+1}]$.

Теперь на участке $[t_k; t_{k+1}]$ возьмем систему с фундаментальной матрицей

$$X(t,t_k,t_{k+1}) = \begin{cases} X(t,t_k,t_k^1), & t\in[t_k,\, t_k^1],\\ X(t,t_k^1,t_k^2), & t\in[t_k^1,\, t_k^2],\\ \ldots\ldots, & \\ X(t,t_k^{i-1},t_k^i), & t\in[t_k^{i-1},\, t_k^i],\\ X(t,t_k^i,t_{k+1}), & t\in[t_k^i,\, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Заметим, что в точках стыка выполняются равенства

$$X(t_k^{j-1},t_k^{j-2},t_k^{j-1}) = X(t_k^{j-1},t_k^{j-1},t_k^j) = E_2, \quad \dot X(t_k^{j-1},t_k^{j-2},t_k^{j-1}) = \dot X(t_k^{j-1},t_k^{j-1},t_k^j) = O_2,$$

где $j = 2,3,\ldots,i+1$, $t_k^0 \equiv t_k$, $t_k^{i+1} \equiv t_{k+1}$.

Повторяя эту процедуру построения на каждом промежутке вида $[t_k; t_{k+1}]$ при любом $k\in\mathbb{N}$, получим непрерывно дифференцируемую на $\mathbb{R}_+$ фундаментальную матрицу

$$X(t) = \begin{cases} X(t,0,t_1), & t\in[0,\, t_1],\\ X(t,t_1,t_2), & t\in[t_1,\, t_2],\\ \ldots\ldots, & \\ X(t,t_k,t_{k+1}), & t\in[t_k,\, t_{k+1}],\\ \ldots\ldots, & \end{cases}$$

так как выполняются равенства

$$X(t_k,t_{k-1},t_k) = X(t_k,t_k,t_{k+1}) = E_2, \quad \dot X(t_k,t_{k-1},t_k) = \dot X(t_k,t_k,t_{k+1}) = O_2,$$

а значит, коэффициенты восстановленной двумерной системы A дифференциальных уравнений являются непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}_+$.

4. Выберем из множества $\mathcal{S}_*(A)$ решения $y^j = c_1^j x_1 + c_2^j x_2$, c_1^j, $c_2^j > 0$, $j\in\mathbb{N}$, обладающие при любом $j\in\mathbb{N}$ свойствами

$$y^j(t_{k_j}^{j-1}) = -w^j\cdot y^j(t_{k_j}^{j-1}+\pi), \quad w^j > 0, \tag{3.3}$$

где t_{k_j} — элемент построенной последовательности, с которого начинается шаг Δ_j, а $t_{k_j}^{j-1}$ — левый конец j-го промежутка в разбиении отрезка $[t_{k_j},\, t_{k_j+1}]$ на составляющие.

Для выбранных решений определим величины

$$\kappa_k(y^j) \equiv \frac{\nu^\alpha(y^j,m^j,t_k,t_{k+1})}{2^{i(k)+1}} = \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*}\frac{\nu^\alpha(y^j,m,t_k,t_{k+1})}{2^{i(k)+1}},$$

где $i(k)$ совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}.

Введем в рассмотрение функцию φ, определенную в п. 2 доказательства теоремы 1.

Зафиксируем произвольные значения j, $k\in\mathbb{N}$. Решение $y^j\in\mathcal{S}_*(A)$ на участке $(t_k,\, t_k+2\pi]$ за промежуток времени π совершает поворот на определенный угол

$$\varphi_0(y^j) = \varphi(y^j(t_k+\pi)) - \varphi(y^j(t_k)) = \angle\big(y^j(t_k+\pi),\, y^j(t_k)\big)$$

против часовой стрелки и за такое же время успевает занять исходное положение

$$y(t_k+2\pi) = (c_1^j,\, c_2^j). \tag{3.4}$$

На промежутках $(t_k + 2\pi,\, t_k + 4\pi]$, $(t_k + 4\pi,\, t_k + 6\pi], \ldots, (t_k^1 - 2\pi,\, t_k^1]$ решение y^j ведет себя точно так же.

На промежутке $(t_k^1,\, t_k^1 + 2\pi]$ решение y^j за время π поворачивается на угол

$$\varphi_1(y^j) = \varphi(y^j(t_k^1 + \pi)) - \varphi(y^j(t_k^1)) = \angle\left(y^j(t_k^1 + \pi),\, y^j(t_k^1)\right),$$

а затем, возвращаясь по часовой стрелке, занимает исходное положение (3.4). На промежутках $(t_k^1 + 2\pi,\, t_k^1 + 4\pi]$, $(t_k^1 + 4\pi,\, t_k^1 + 6\pi]$, $\ldots (t_k^2 - 2\pi,\, t_k^2]$ все полностью повторяется.

На следующих промежутках

$$\begin{gathered}
(t_k^2,\, t_k^3] = (t_k^2,\, t_k^2 + 2\pi] \cup (t_k^2 + 2\pi,\, t_k^2 + 4\pi] \cup \cdots \cup (t_k^3 - 2\pi,\, t_k^3],\\
(t_k^3,\, t_k^4] = (t_k^3,\, t_k^3 + 2\pi] \cup (t_k^3 + 2\pi,\, t_k^3 + 4\pi] \cup \cdots \cup (t_k^4 - 2\pi,\, t_k^4],\\
\ldots,\\
(t_k^i,\, t_{k+1}] = (t_k^i,\, t_k^i + 2\pi] \cup (t_k^i + 2\pi,\, t_k^i + 4\pi] \cup \cdots \cup (t_{k+1} - 2\pi,\, t_{k+1}]
\end{gathered}$$

все повторяется, но с каждым разом, при переходе с одного промежутка на другой, угол поворота решения y^j за время π уменьшается, т. е. выполнены неравенства

$$\varphi_0(y^j) > \varphi_1(y^j) > \cdots > \varphi_{i-1}(y^j) > \varphi_i(y^j), \tag{3.5}$$

где $\varphi_l(y^j) = \varphi(y^j(t_k^l + \pi)) - \varphi(y^j(t_k^l)) = \angle\left(y^j(t_k^l + \pi),\, y^j(t_k^l)\right)$, $l = \overline{2, i}$ (i совпадает с номером шага между t_k и t_{k+1}), откуда следует справедливость неравенств

$$\varphi(y^1(0)) < \varphi(y^2(0)) < \cdots < \varphi(y^j(0)) < \cdots < \varphi(x^2(0)).$$

Получается, что при подсчете знаков, нулей, корней и гиперкорней функции $\langle y^j,\, m\rangle$, $m \in \mathbb{R}^2_*$, на промежутке $(t_k,\, t_{k+1}]$ достаточно знать поведение решения y^j на участках

$$(t_k,\, t_k + \pi],\, (t_k^1,\, t_k^1 + \pi], \ldots, (t_k^i,\, t_k^i + \pi]. \tag{3.6}$$

В силу (3.3), (3.5) решение $y^1 \in \mathcal{S}_*(A)$ при любом фиксированном значении $k \in \mathbb{N}$ на участках (3.6) удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(y^1(t_k + \pi)) - \varphi(y^1(t_k)) = \pi, \quad \varphi(y^1(t_k^1 + \pi)) - \varphi(y^1(t_k^1)) < \pi, \ldots, \varphi(y^1(t_k^i + \pi)) - \varphi(y^1(t_k^i)) < \pi.$$

Если решение y^1 на промежутке $(t_k^1,\, t_k^1 + \pi]$ ни разу не будет ортогонально некоторому вектору m^1, то $\nu^\alpha(y^1, m^1, t_k, t_k + \pi) = 1$, $\nu^\alpha(y^1, m^1, t_k^1, t_{k+1}) = 0$, $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, поэтому выполнено

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(y^1, m, t_k, t_{k+1}) = \nu^\alpha(y^1, m^1, t_k, t_{k+1}) = 2^{i(k)}.$$

Откуда получаем равенство $\kappa_k(y^1) = 2^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

При любом фиксированном $k \geq k_2$ на промежутках (3.6) решение $y^2 \in \mathcal{S}_*(A)$ в силу (3.3), (3.5) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}
5\pi/4 > \varphi(y^2(t_k + \pi)) - \varphi(y^2(t_k)) > \pi, \quad \varphi(y^2(t_k^1 + \pi)) - \varphi(y^2(t_k^1)) = \pi,\\
\varphi(y^2(t_k^2 + \pi)) - \varphi(y^2(t_k^2)) < \pi, \ldots, \varphi(y^2(t_k^i + \pi)) - \varphi(y^2(t_k^i)) < \pi.
\end{gathered}$$

Поэтому для решения y^2 выбираем такой вектор m^2, чтобы при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнялись $\nu^\alpha(y^2, m^2, t_k, t_k + \pi) = \nu^\alpha(y^2, m^2, t_k^1, t_k^1 + \pi) = 1$, $\nu^\alpha(y^2, m^2, t_k^2, t_{k+1}) = 0$, а значит,

$$\inf_{m \in \mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(y^2, m, t_k, t_{k+1}) = \nu^\alpha(y^2, m^2, t_k, t_{k+1}) = 3 \cdot 2^{i(k)-1},$$

следовательно, $\kappa_k(y^2) = 3/4$ при всех $k \geq k_2$.

Начиная с первого момента k_q появления шага Δ_q при любом фиксированном $k \geq k_q$ на участках (3.6) решение $y^q \in \mathcal{S}_*(A)$ в силу (3.3), (3.5) удовлетворяет соотношениям

$$5\pi/4 > \varphi(y^q(t_k+\pi)) - \varphi(y^q(t_k)) > \pi, \quad \varphi(y^q(t_k^1+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^1)) > \pi, \ldots,$$
$$\varphi(y^q(t_k^{q-2}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{q-2})) > \pi, \quad \varphi(y^q(t_k^{q-1}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{q-1})) = \pi,$$
$$\varphi(y^q(t_k^{q}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{q})) < \pi, \ldots, \varphi(y^q(t_k^{i}+\pi)) - \varphi(y^q(t_k^{i})) < \pi.$$

Поэтому для решения y^q выбираем такой вектор m^q, чтобы функция $\langle y^q, m^q\rangle$ не имела гиперкорней на промежутке $(t_k^q,\, t_{k+1}]$. При этом для каждого $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ будут выполняться равенства $\nu^\alpha(y^q, m^q, t_k, t_k+\pi) = \nu^\alpha(y^q, m^q, t_k^1, t_k^1+\pi) = \cdots = \nu^\alpha(y^q, m^q, t_k^{q-1}, t_k^{q-1}+\pi) = 1$, откуда следует

$$\inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \nu^\alpha(y^q, m, t_k, t_{k+1}) = \nu^\alpha(y^q, m^q, t_k, t_{k+1}) = 2^{i(k)-q+1}(2^q-1), \quad k \geq k_q,$$

значит,

$$\kappa_k(y^q) = 1 - 2^{-q}, \quad k \geq k_q. \tag{3.7}$$

5. При вычислении нижних слабых показателей колеблемости выбранного решения y^q будем использовать их свойство остаточности, согласно которому можно не учитывать полуинтервал $(0,\, t_{k_q}]$ (т. е. не учитывать его вклад ни в длину промежутка, на котором подсчитывается число нулей решения, ни в само это число). Следовательно, при любом $q \in \mathbb{N}$ для решения y_q с учетом равенств (3.7) при любом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ получим

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(y^q) = \varliminf_{p\to+\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(y^q, m, t_p) = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(y^q, m^q, t_p)$$

$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi\nu^\alpha(y^q, m^q, t_{k_q}) + \pi\sum\limits_{i=k_q}^{p}(\nu^\alpha(y^q, m^q, t_i, t_{i+1}))}{t_{p+1}} = \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi\sum\limits_{i=k_q}^{p}\nu^\alpha(y^q, m^q, t_i, t_{i+1})}{t_{p+1}-t_{k_q}}$$
$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{\pi\left(2^{j(k_q)+1}\kappa_{k_q}(y^q) + 2^{j(k_q+1)+1}\kappa_{k_q+1}(y^q) + \cdots + 2^{j(p)+1}\kappa_p(y^q)\right)}{(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1})\pi}$$
$$= \varliminf_{p\to+\infty} \frac{(1-2^{-q})(2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1})}{2^{j(k_q)+1} + 2^{j(k_q+1)+1} + \cdots + 2^{j(p)+1}} = 1 - 2^{-q},$$

где $j(i)$ совпадает с номером шага между t_i, t_{i+1}.

Аналогичные равенства справедливы и для верхних слабых показателей, поэтому при любом $\alpha \in \{-,\sim,0,+,*\}$ имеем

$$\nu^\alpha_\circ(y^q) = 1 - 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Для сильных показателей колеблемости решения y^q имеем двустороннюю оценку

$$\check{\nu}^\alpha_\circ(y^q) \leq \check{\nu}^\alpha_\bullet(y^q) \leq \hat{\nu}^\alpha_\bullet(y^q) = \inf_{m\in\mathbb{R}^2_*} \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(y^q, m, t_p) \leq \varlimsup_{p\to+\infty} \frac{\pi}{t_p}\nu^\alpha(y^q, m^q, t_p) = 1 - 2^{-q},$$

из которой следует

$$\nu^\alpha_\bullet(y^q) = 1 - 2^{-q}, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ произвольное решение $z \in \mathcal{S}_*(A)$ с начальными условиями

$$\varphi(z(0)) \in \left[\varphi(y^q(0)),\, \varphi(y^{q+1}(0))\right)$$

при любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет соотношениям

$$5\pi/4 > \varphi(z(t_k+\pi)) - \varphi(z(t_k)) > \pi, \quad \varphi(z(t_k^1+\pi)) - \varphi(z(t_k^1)) > \pi, \ldots,$$
$$\varphi(z(t_k^{q-2}+\pi)) - \varphi(z(t_k^{q-2})) > \pi, \quad \varphi(z(t_k^{q-1}+\pi)) - \varphi(z(t_k^{q-1})) > \pi,$$
$$\varphi(z(t_k^{q}+\pi)) - \varphi(z(t_k^{q})) < \pi, \ldots, \varphi(z(t_k^{i}+\pi)) - \varphi(z(t_k^{i})) < \pi,$$

а значит, при любом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ выполнены равенства

$$\nu_{\circ}^{\alpha}(z) = \nu_{\bullet}^{\alpha}(z) = 1 - 2^{-q}.$$

Таким образом, значения, задаваемые равенствами (3.8), (3.9), являются метрически и топологически существенными.

Теорема 2 полностью доказана.

Заключение

В данной работе доказано существование двумерных дифференциалных систем, спектры показателей колеблемости которых содержат соответственно конечное и счетное множества существенных значений. Известно, что для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует двумерная линейная ограниченная система, у которой спектр показателей блуждаемости совпадает с этим множеством, причем все значения существенны [21]. Интересным остается вопрос о возможности перенесения этого свойства и на показатели колеблемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сергеев И.Н.** Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.
2. **Сергеев И.Н.** Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172. doi: 10.4213/im5035
3. **Сергеев И.Н.** Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. doi: 10.4213/sm7928
4. **Сергеев И.Н.** Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Вып. 2 (46). С. 171–183.
5. **Сергеев И.Н.** Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219.
6. **Сергеев И.Н.** Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 5. С. 732–751. doi: 10.4213/mzm10555
7. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I //Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320. doi: 10.1134/S0374064116100034
8. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1595–1609. doi: 10.1134/S0374064116120013
9. **Быков В.В.** О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425. doi: 10.1134/S0374064116040026
10. **Барабанов Е.А., Войделевич А.С.** Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 1. С. 24–31.
11. **Войделевич А.С.** О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 28–32. doi: 10.33581/2520-6508-2019-1-28-32
12. **Сергеев И.Н.** Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1661–1662.
13. **Сергеев И.Н.** Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1567–1568.
14. **Сташ А.Х.** Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости линейных систем // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, вып. 1. С. 59–69. doi: 10.35634/vm210105 .

15. **Сташ А.Х.** Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 143–144. doi: 10.1134/S0374064115010161
16. **Бурлаков Д.С., Цой С.В.** Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2014. Вып. 30. С. 75–93.
17. **Сташ А.Х.** Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, вып. 4. С. 558–568. doi: 10.20537/vm190407
18. **Сташ А.Х.** О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы // Вестн. Адыгейс. гос. ун-та. Сер. 4. 2014. Вып. 1 (133). С. 30–36.
19. **Сташ А.Х.** О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы // Вестн. Адыгейс. гос. ун-та. Сер. 4. 2014. Вып. 2 (137). С. 23–32.
20. **Филиппов А.Ф.** Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
21. **Шишлянников Е.М.** Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости// Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Математика Механика. 2017. № 5. С. 14–21.

Поступила 27.02.2023
После доработки 17.04.2023
Принята к публикации 24.04.2023

Сташ Айдамир Хазретович
канд. физ.-мат. наук, доцент
декан фак. математики и компьютерных наук
Адыгейский государственный университет
г. Майкоп
e-mail: aidamir.stash@gmail.com

REFERENCES

1. Sergeev I.N. Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation. J. Math. Sci., 2006, vol. 135, no. 1, pp. 2764–2793. doi: 10.1007/s10958-006-0142-6
2. Sergeev I.N. Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 139–162. doi: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002578
3. Sergeev I.N. The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems. *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 1, pp. 114–132. doi: 10.1070/SM2013v204n01ABEH004293
4. Sergeev I.N. The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, iss. 2 (46), pp. 171–183 (in Russian).
5. Sergeev I.N. Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 234, no. 4, pp. 497–522. doi: 10.1007/s10958-018-4025-4
6. Sergeev I.N.Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems. *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 5, pp. 729–746. doi: 10.1134/S0001434616050114
7. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation: I. *Diff. eq.*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1249–1267. doi: 10.1134/S0012266116100013
8. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation:II, *Diff. eq.*, 2016, vol. 52. no. 12, pp. 1523–1538. doi:10.1134/S0012266116120016
9. Bykov V.V. On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation, *Diff. eq.*, 2016, vol. 52. no. 4, pp. 413–420. doi: 10.1134/S0012266116040029
10. Barabanov E.A., Voidelevich A.S. Spectra of the upper Sergeev frequencies of zeros and signs of linear differential equation, *Doklady NAN Belarusi*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 24–31 (in Russian).

11. Voidelevich A.S. On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation, *Zhurnal Belarusskogo Gosudarstvennogo Instituta. Matematika. Informatika*, 2019, no. 1, pp. 28–32 (in Russian).
12. Sergeev I.N. Metrically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differencialnie uravneniya.* 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1661–1662 (in Russian).
13. Sergeev I.N. Topologically typical and essential values of exponents of linear systems, *Differencialnie uravneniya.* 2012, vol. 48, no. 11. pp. 1567–1568 (in Russian).
14. Stash A.Kh. The absence of residual property for strong exponents of oscillation of linear systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, iss. 1, pp. 59–69 (in Russian).
15. Stash A. Kh. Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies. *Diff. eq.*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 146–148. doi:10.1134/S0374064115010161
16. Burlakov D.S., Tsoii S.V. Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 210, no. 2, pp. 155–167. doi: 10.1007/s10958-015-2554-7
17. Stash A.Kh. Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, iss. 4, pp. 558–568 (in Russian). doi: 10.20537/vm190407
18. Stash A.Kh. On finite spectra of full and vector frequencies of linear two-dimensional differential periodic system. *Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno–matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2014, iss. 1 (133), pp. 30–36 (in Russian).
19. Stash A.Kh. About calculating ranges of full and vector frequencies of the linear two-dimensional differential system. *Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno–matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2014, iss. 2 (137), pp. 23–32 (in Russian).
20. Filippov A.F. *Vvedenie v teoriju differencial'nyh uravnenij* [Introduction to the theory of differential equations]. Moscow: Editorial URSS, 2004. 240 p.
21. Shishlyannikov E.M. Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2017, vol 72, no. 5, pp. 192–198. doi: 10.3103/S0027132217050023

Received February 2, 2023
Revised April 17, 2023
Accepted April 24, 2023

Aydamir Khazretovich Stash, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science, Adyghe state University, Maykop, 385000 Russia,
e-mail: aidamir.stash@gmail.com .

Cite this article as: A. Kh. Stash. On essential values of exponents of oscillation for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 157–171.