ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НЕМАГНИТНЫХ СРЕД

Л. И. Рубина

Рассматривается волновое уравнение для диэлектрических немагнитных сред, полученное из системы уравнений Максвелла в рамках нелинейной оптики при классическом подходе. Уравнение описывает динамику поля излучения в стеклах, жидкостях, газах, многих кристаллах. Анализ динамики электрического поля излучения можно провести, только зная вид поляризационного отклика среды на силовое воздействие этого поля. Поэтому волновое уравнение можно считать недоопределенным. Оно содержит члены, зависящие от $E = E(x, y, z, t)$ — напряженности электрического поля излучения, и член, зависящий от поляризационного отклика среды $P = P(x, y, z, t)$. В работе предлагается метод решения такого недоопределенного уравнения. Поскольку поляризационный отклик среды происходит на силовое воздействие электрического поля излучения, в работе предполагается, что $P = P(E)$, $E(x, y, z, t) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня функции P. При таком предположении волновое уравнение сводится к ОДУ. Независимой переменной в ОДУ является функция E. Функция $E = E(x, y, z, t)$ определяется после решения уравнения в частных производных первого порядка (базового уравнения) $E_t = f_0(E)$. Решение ОДУ и вид $E = E(x, y, z, t)$ (следовательно, динамика поля излучения) зависят от выбора произвольной функции $f_0(E)$. В работе выписан вид $E = E(x, y, z, t)$ и $P = P(E)$ для четырех функций $f_0(E)$. Эти решения имеют константный произвол.

Ключевые слова: волновое уравнение, поляризация, система ОДУ, функциональный произвол.

L. I. Rubina. One approach to the solution of the wave equation for dielectric nonmagnetic media.

For dielectric nonmagnetic media, we consider a wave equation obtained from the system of Maxwell's equations in the framework of nonlinear optics with the classical approach. The equation describes the dynamics of the radiation field in glasses, liquids, gases, and many crystals. The dynamics of the electric field of radiation can be analyzed only with the knowledge of the polarization response of the medium to the force action of this field. Therefore, the wave equation can be considered underdetermined. It contains terms depending on the intensity $E = E(x, y, z, t)$ of the electric field of the radiation and a term depending on the polarization response of the medium $P = P(x, y, z, t)$. We propose a method for solving this underdetermined equation. Since the polarization response of the medium is caused by the force action of the electric field of radiation, we assume that the equation $P = P(E)$, $E(x, y, z, t) = \mathrm{const}$, defines a level surface of the function P. Under this assumption, the wave equation reduces to an ODE. The independent variable in the ODE is the function E. The function $E = E(x, y, z, t)$ is found by solving the first-order partial differential equation (the basic equation) $E_t = f_0(E)$. The solution of the ODE and the form of $E = E(x, y, z, t)$ (hence, the dynamics of the radiation field) depend on the choice of an arbitrary function $f_0(E)$. The form of $E = E(x, y, z, t)$ and $P = P(E)$ is written for four functions $f_0(E)$. These solutions are found up to an arbitrary constant.

Keywords: wave equation, polarization, ODE system, functional arbitrariness.

MSC: 35Cxx

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-145-156

Памяти академика Анатолия Федоровича Сидорова

1. Введение

В работе рассматривается одна из математических моделей для диэлектрических немагнитных сред, описывающая взаимодействие интенсивного излучения с веществом в стеклах, жидкостях, газах, многих кристаллах [1–3]. Особенно интенсивно эта область моделирования начала развиваться с появлением лазерной техники, вызвавшей большой интерес к изучению нелинейных эффектов, связанных с моделированием взаимодействия интенсивного излучения с веществом (см., например, [4–8]). Появление и развитие такой техники требовало новых постановок и решения новых задач. К этому времени уже широко использовались для решения нелинейных уравнений в частных производных такие подходы, как методы группового анализа и поиска симметрий [9], метод характеристик для сведения уравнений в частных производных первого порядка к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (системе ОДУ) [10], прямые методы построения редукций [11]. Немало работ Анатолия Федоровича Сидорова также посвящены решению нелинейных уравнений в частных производных (см., например, [12–15]).

Опишем *общие подходы*, используемые сотрудниками отдела прикладных задач Института математики и механики имени Н. Н. Красовсокго УрО РАН для редукции линейных и нелинейных уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных имеет вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, u_{11}^{(2)}, u_{12}^{(2)}, \dots, u_{nn}^{(2)}, \dots, u_{i_1\dots i_m}^{(m)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (1.1)$$

где $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — первоначальные независимые переменные уравнения, $u \in \mathbb{C}^m$ — неизвестная функция (решение уравнения); $u_{i_1 i_2 \dots i_l}^{(l)}$ — частные производные функции u (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная); m — порядок уравнения.

Первый подход к сведению уравнения (1.1) к системе ОДУ основан на предположении, что решение уравнения или выбранное соотношение, через которое решение выражается, зависит от одной переменной (например, $u = u(\psi)$); $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — поверхность уровня решения уравнения (1.1), которую предстоит определить.

Если $u = u(\psi)$, то, вычислив производные сложной функции $u = u(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n))$ и подставив полученные выражения в (1.1), получим

$$\sum_{k=1}^{K} A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (1.2)$$

Здесь штрихом обозначена производная по ψ, нижние индексы указывают на номер независимой переменной, по которой вычисляется производная от функции ψ; $K \neq \infty$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; $u_\psi^{(m)} = \partial^m u / \partial \psi^m$, $B_{k_1} \not\equiv B_{k_2}$, если $k_1 \neq k_2$.

Соотношения (1.2) можно переписать в виде системы равенств

$$\sum_{k=1}^{K} A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) g_k(\psi) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi), \quad (1.3)$$

где $g_k(\psi)$ — пока произвольные функции. Первый способ применим тогда, когда в системе (1.3) хотя бы одно соотношение B_k зависит только от первых производных функции $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $B_1 = B_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$.

Обратим внимание на часть системы соотношений (1.3)

$$B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Здесь число неизвестных функций $\psi, g_1(\psi), g_2(\psi), \dots, g_K(\psi)$ на единицу больше, чем число уравнений. Следовательно, одну функцию $g_k(\psi)$ можно задать произвольно. В частности, можно положить, что $g_1(\psi) = C$, $C = \text{const}$, $C \neq 0$.

Выпишем расширенную систему уравнений характеристик [16] для уравнения

$$B_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = C \quad \text{(базовое уравнение)}$$

и потребуем, чтобы соотношения

$$B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 2, 3, \dots, K,$$

были первыми интегралами такой системы. Таким образом, получим систему ОДУ для определения функций: x_i, ψ, ψ_i, ψ_{ij},..., $\psi_{i_1 i_2 \dots i_m}$, g_k, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 2, 3, \dots, K$.

Отметим, что сведение уравнения (1.1) к системе ОДУ первым способом неоднозначно.

1. Одна из функций $g_k(\psi)$ выбирается произвольно (выше мы положили $g_1(\psi) = C$, $C = \mathrm{const}$). В частности, можно рассматривать случаи, когда одна из функций g_k, например, $g_2 = 0$, если $B_2 = g_2$ — не единственное уравнение в частных производных первого порядка в системе (1.3).

2. В системе (1.3) может оказаться несколько выражений вида $B_k = B_k(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$, и любое из этих выражений можем считать базовым уравнением, что приведет к разным расширенным системам уравнений характеристик и как итог к разным системам ОДУ.

3. Если выбрано базовое уравнение и задана одна произвольная функция g_k (выше $g_1 = C$, $B_1 = C$), то, выписав для этого уравнения систему уравнений характеристик [10], получим
$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{dB_1}{d\psi_i}, \quad \frac{d\psi}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{dB_1}{d\psi_i}\Big), \quad \frac{d\psi_i}{ds} = -\frac{dB_1}{dx_i}.$$
В этой системе возможны два случая: (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{dB_1}{d\psi_i}\Big) = 0$, (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i d\frac{dB_1}{d\psi_i}\Big) \neq 0$.
Если выполняется условие (b), то, выбрав в полученной системе ОДУ за независимое переменное ψ и присоединив к системе ОДУ уравнение
$$\sum_{k=1}^{K} A_k(u, u', u'', \dots, u_{\psi}^{(m)}) g_k(\psi) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1.4}$$
получим систему ОДУ для решения уравнения (1.1).
Если $B_{k_1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = C$ — базовое уравнение и выполняется условие (b), то система уравнений характеристик для данного уравнения, записанная в виде
$$\frac{dx_i}{d\psi} = \frac{dB_{k_1}}{d\psi_i} / \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{dB_{k_1}}{d\psi_i}\Big), \quad \frac{d\psi_i}{d\psi} = -\frac{dB_{k_1}}{dx_i} / \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{dB_{k_1}}{d\psi_i}\Big), \quad \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{dB_{k_1}}{d\psi_i}\Big) \neq 0, \tag{1.5}$$
задает преобразование координат $x_i = x_i(\psi, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, когда тождественно выполняется зависимость [16]
$$\psi = \psi\big(x_1(\psi, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n), x_2(\psi, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n), \dots x_n(\psi, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)\big); \tag{1.6}$$
это имеет место, если
$$1 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{\partial x_i}{\partial \psi}\Big), \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\psi_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}\Big), \quad j = 2, 3, \dots, n. \tag{1.7}$$
Здесь первое соотношение (1.7) выполняется тождественно в силу (1.5), а остальные соотношения (1.7) могут выполняться при разных зависимостях переменных x_i от α_j. Их выбор может обеспечивать выполнение начальных, краевых или других условий, заданных для исходного уравнения. В итоге, исключив переменные $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ из таких соотношений $x_i = x_i(\psi, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, для которых выполняется тождество (1.6), имеем $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Если для базового уравнения выполняется условие (a), то на характеристике $\psi = \mathrm{const}$, $g_k(\psi) = \mathrm{const}$ $(k = 1, 2, \dots, K)$. В этом случае имеем $x_i = x_i(s, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, $\psi =$

$\psi(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, и при переходе к новым независимым переменным должно тождественно выполняться условие

$$\psi(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \psi\big(x_1(s, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n), x_2(s, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n), \dots, x_n(s, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)\big).$$

Второй подход применим, если уравнение (1.1) имеет слагаемые, зависящие только от первых производных функции u, например,

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, u_{11}^{(2)}, u_{12}^{(2)}, \dots, u_{nn}^{(2)}, \dots, u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}) \\ = L_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) \\ + L_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, \dots, u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.8}$$

В этом случае можно не искать вид поверхности уровня, а считать, что $\psi = u$, и рассматривать вместо (1.8) систему уравнений

$$\begin{aligned} &L_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) = g(u), \\ &L_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, \dots, u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}) + g(u) = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Тогда, выписав для уравнения $L_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) = g(u)$ (базовое уравнение) расширенную систему уравнений характеристик, выбрав в качестве независимой переменной вдоль характеристики функцию u и потребовав, чтобы второе уравнение системы (1.9) было первым интегралом этой системы, получим систему ОДУ для определения функций $x_i(u)$, $g(u)$, $u_i^{(1)}(u)$, $u_{ij}^{(2)}(u)$,..., $u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}(u)$ $(i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n)$. При этом решение уравнения (1.8) сведется к решению базового уравнения $L_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) = g(u)$ с известным $g(u)$.

Изложим *третий подход* сведения решения уравнения (1.1) к системе ОДУ.

Зададим функцию $F = F(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)})$. Выпишем уравнение первого порядка вида

$$F(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) = g(u) \quad \text{(базовое уравнение)},$$

где $g = g(u)$ — пока произвольная функция. Выпишем для этого уравнения расширенную систему уравнений характеристик и потребуем, чтобы уравнение (1.1) было первым интегралом этой системы. Таким образом, получим нужную нам систему ОДУ, которая позволит выбрать подходящую функцию $g(u)$ и свести решение уравнения (1.1) к решению уравнения $F(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) = g(u)$. Для этого способа редукции не требуется, чтобы в уравнении (1.1) были члены, зависящие только от первых производных функции u (см. (1.8)), или чтобы среди соотношений (1.3) были B_k, которые содержат производные функции ψ только первого порядка.

Описанные выше подходы к сведению нелинейных и линейных уравнений в частных производных к симтемам ОДУ не связаны с типом рассматриваемого уравнения (гиперболическое, эллиптическое, параболическое или смешанного типа), но применимы к уравнениям, содержащим одну неизвестную функцию — решение исходного уравнения.

Как отмечено выше, развитие лазерной техники требует решать и другие задачи. В свое время именно А. Ф. Сидоров обратил внимание автора на круг задач для нелинейной оптики. Рассмотрение таких задач ранее и в настоящее время (см. [1–3]) приводит, в частности, к необходимости решать недоопределенную [17] систему уравнений

$$-\mathbf{\Delta E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \tag{1.10}$$

которая описывает воздействие интенсивного светового излучения на диэлектрические среды. Как следует из (1.10), анализ динамики электрического поля излучения $\mathbf{E}$ можно провести, только зная вид поляризационного отклика среды $\mathbf{P}$ на силовое воздействие этого поля.

Во многих случаях (см. [1–3]) для решения этих уравнений применяются разные подходы, при которых заранее (см., например, [18–21]) выбирается вид поляризационного отклика среды $\mathbf{P}(E)$. После подстановки разных приближений этого вектора в (1.10) решается волновое уравнение для каждой компоненты вектора $\mathbf{E}$ известными способами (см., например, [1; 8]). Но имеются примеры, когда приближенное описание процесса искажает его реальную картину (см., например, [22]), поэтому желательно точное, а не приближенное решение такого типа уравнений, как (1.10).

Еще раз отметим, что система уравнений (1.10) недоопределенная. Она включает в себя три недоопределенных уравнения, каждое из которых содержит две неизвестные функции. В работе предлагается подход к решению таких систем уравнений. Подход, как и прежние работы, в которых рассматривались нелинейные уравнения в частных производных (см., например, [16;22–24]), использует описанные выше редукции (см. три способа редукции) каждого уравнения системы (1.10) к системе ОДУ, основанные на выборе базового уравнения в частных производных первого порядка, но имеет особенности, вызванные тем, что каждое исходное уравнение в системе (1.10) недоопределенное. Отметим эти особенности.

2. Подход к решению одного класса недоопределенных уравнений

Остановимся на особенностях использования редукций, основанных на выборе базового уравнения в частных производных первого порядка, для сведения недоопределенных уравнений к системе ОДУ.

Пусть задано уравнение в частных производных, содержащее две неизвестные функции

$$\begin{aligned}&L\,(\,x_1,\dots,x_n,U,U_1^{(1)},\dots,U_n^{(1)},U_{11}^{(2)},U_{12}^{(2)},\dots,U_{nn}^{(2)},\dots,U_{i_1\dots i_m}^{(m)},\\&V,V_1^{(1)},V_2^{(1)},\dots,V_n^{(1)},V_{11}^{(2)},V_{12}^{(2)},\dots,V_{nn}^{(2)},\dots,V_{i_1\dots i_k}^{(k)}\,)=0,\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\{x_1,\dots,x_n\}$ — первоначальные независимые переменные; U,V — неизвестные функции в уравнении (2.1); $U_{i_1\dots i_l}^{(l)}$ — частные производные функции U; $V_{i_1\dots i_j}^{(j)}$ — частные производные функции V (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная, $l=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,k\,$).

Первая особенность. Считаем, что одна из неизвестных функций задает поверхность уровня для другой функции. В уравнении (2.1) полагаем, что $U = U(V(x_1,\dots,x_n))$, где $V(x_1,\dots,x_n)=\mathrm{const}$ — поверхность уровня функции U.

Вторая особенность. Вычислим производные сложной функции $U = U(V(x_1,\dots,x_n))$ и подставим их в уравнение (2.1), производные функции $V(x_1,\dots,x_n)$ остаются неизменными. В результате получаем равенство вида

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{S}A_s(\,U,U',U'',\dots,U_V^{(m)}\,)\;B_s(\,x_i,V_i^{(1)},V_{i1}^{(2)},\dots,V_{im}^{(2)},\dots,V_{i_1\dots i_k}^{(k)}\,)\\&=F\,(\,V,V_1^{(1)},\dots,V_n^{(1)},V_{11}^{(2)},\dots,V_{nn}^{(2)},\dots,V_{i_1\dots i_k}^{(k)}),\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$U_V^{(m)}=\frac{\partial^m U}{\partial V^m};\quad B_{s_1}\not\equiv B_{s_2},\ \ \text{если}\quad s_1\neq s_2;\quad S\leqslant m;\quad i=1,\dots,n.$$

Здесь штрихом обозначена производная по V, нижние индексы указывают на номера независимых переменных, по которым вычисляется производная от функции V.

Как и ранее (см. [16; 22–24], (1.3)), равенство (2.2) перепишем в виде системы

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{S} A_s(U,U',U'',\dots,U_V^{(m)})g_s(V)\\&= F(V,V_1^{(1)},\dots,V_n^{(1)},V_{11}^{(2)},\dots,V_{nn}^{(2)},\dots,V_{i_1\dots i_k}^{(k)}),\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$B_s(x_i,V_i^{(1)},V_{i1}^{(2)},\dots,V_{im}^{(2)},\dots,V_{i_1\dots i_k}^{(k)}) = g_s(V), \quad s=1,\dots,S,\tag{2.4}$$

где $g_s(V)$ — пока произвольные функции.

Как и ранее (см. три подхода), тем или иным способом выделяем базовое уравнение в частных производных первого порядка. Оно выделяется из уравнений системы (2.4), либо такое уравнение задаем: $B_0(x_i,V_i^{(1)}) = g_0(V)$. Если такое уравнение есть в системе (2.4), то, не умаляя общности рассуждений. можно считать, что это уравнение $B_1(x_i,V,V_i^{(1)}) = g_1(V)$. Выделив базовое уравнение, находим тем или иным способом такие функции $g_s(V)$, при которых система (2.4) совместна (см., например, [16; 22–24]). Один из таких способов описан в разд. 3.

Третья особенность. Вместо недоопределенного уравнения (2.1) приходим к системе ОДУ для определения функций $U(V)$ и $V(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$$\begin{aligned}&B_1(x_i,V,V_i^{(1)}) = g_1(V), \quad (i=1,2,\dots,n),\\&\sum_{s=1}^{S} A_s(U,U',U'',\dots,U_\psi^{(m)})G(g_1,g_1',g_1'',\dots,g_1^{''\dots'}) = F(V,g_1,g_1',g_1'',\dots,g_1^{''\dots'}).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Для некоторых исходных уравнений (2.1) итоговая система может иметь вид

$$\begin{aligned}&B_0(x_i,V_i^{(1)}) = g_0(V), \quad (i=1,2,\dots,n),\\&\sum_{s=1}^{S} A_s(U,U',U'',\dots,U_\psi^{(m)})G(g_0,g_0',g_0'',\dots,g_0^{''\dots'}) = F(V,g_0,g_0',g_0'',\dots,g_0^{''\dots'}).\end{aligned}\tag{2.6}$$

В любом случае итоговая система содержит одну произвольную функцию. Это $g_0(V)$, если приходим к системе (2.6), или $g_1(V)$, если приходим к системе (2.5).

Модификация описанных выше общих подходов для редукции нелинейных уравнений в частных производных к системам ОДУ, изложенная в этом разделе, позволяет сводить к системам ОДУ недоопределенные линейные и нелинейные уравнения в частных производных. В разд. 3 используем эту модификацию для решения системы уравнений (1.10).

3. Решение волнового уравнения для диэлектрических немагнитных сред

Запишем систему (1.10) в виде (см., например, [2; 3])

$$-\mathbf{\Delta} E + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad E = E_i, \quad P = P_i, \quad i = 1,2,3.\tag{3.1}$$

В (3.1) полагаем, что $P(x,y,z,t) = P(E(x,y,z,t))$, $E(x,y,z,t) = \mathrm{const}$ задает поверхность уровня функции $P = P(x,y,z,t)$. Вычислим производную сложной функции: $P_{tt} = P''E_t^2 + P'E_{tt}$. Здесь штрих обозначает дифференцирование по E, а нижние индексы у функции $E(x,y,z,t)$ — дифференцирование по соответствующим независимым переменным.

Подставив производную P_{tt} в уравнение (3.1), получаем

$$P''f_0(E)^2 + P'f_1(E) + \frac{c^2}{4\pi}\Big(\frac{1}{c^2}f_1(E) - f_2(E)\Big) = 0,\tag{3.2}$$

$$f_0(E) = E_t, \quad f_1(E) = E_{tt}, \quad f_2(E) = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}.\tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) можно считать ОДУ, если найдутся такие функции E, $f_0(E)$, $f_1(E)$, $f_2(E)$, при которых система (3.3) совместна. Уравнение $E_t = f_0(E)$ считаем базовым уравнением. Для совместности системы (3.3) все равенства в этой системе должны быть дифференциальными следствиями базового уравнения.

Утверждение 1. *Если* $E_t = f_0(E)$, $f_1 = f_0' f_0$, $f_2 = f_0(\eta + \alpha f_0')$ $(\alpha = \mathrm{const}, \eta = \mathrm{const})$, *то система* (3.3) *совместна и ее решение сводится к решению базового уравнения* $E_t = f_0(E)$, *содержащего произвольную функцию* $f_0(E)$.

Доказательство. Если $E_t = f_0(E)$, то $E_{tt} = f_0' f_0$,

$$E_{tx} = f_0' E_x, \quad E_{ty} = f_0' E_y, \quad E_{tz} = f_0' E_z, \quad E_{txx} = f_0'' E_x^2 + f_0' E_{xx}, \quad E_{tyy} = f_0'' E_y^2 + f_0' E_{yy},$$

$$E_{tzz} = f_0'' E_z^2 + f_0' E_{zz}, \quad E_{txx} + E_{tyy} + E_{tzz} = f_0''(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + f_0'(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}).$$

С другой стороны, $E_{tt} = f_1$, поэтому для совместности должно выполняться условие $f_1 = f_0' f_0$. Далее, $E_{xxt} + E_{yyt} + E_{zzt} = f_2' f_0$, и поэтому система совместна, если смешанные производные в следующих двух выражениях равны:

$$E_{txx} + E_{tyy} + E_{tzz} = f_0''(\, E_x^2 + E_y 2 + E_z^2 \,) + f_0'(\, E_{xx} + E_{yy} + E_{zz} \,),$$

$$E_{xxt} + E_{yyt} + E_{zzt} = f_2' f_0.$$

Следовательно, должно выполняться условие $f_0''(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + f_0' f_2 = f_2' f_0$.

Обозначим $(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = f_3(E)$, тогда для совместности системы должно выполняться условие $2E_x E_{xt} + 2E_y E_{yt} + 2E_z E_{zt} = f_3' f_0 = 2f_0' f_3$, отсюда получаем $f_3 = \alpha f_0^2$, если $f_0 \neq 0$, $f_3 \neq 0$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$.

Ясно также, что $E_{txx} + E_{tyy} + E_{tzz} = f_0'' \alpha f_0^2 + f_0' f_2$. Тогда $E_{txx} + E_{tyy} + E_{tzz} = E_{xxt} + E_{yyt} + E_{zzt}$, если $f_0'' \alpha f_0^2 + f_0' f_2 = f_2' f_0$.

Итак, для совместности системы (3.2) достаточно выполнения двух равенств

$$f_1 = f_0' f_0\,, \quad \alpha f_0'' f_0^2 + f_0' f_2 = f_2' f_0.$$

Из второго равенства (линейное уравнение относительно функции $f_2(E)$) находим, что $f_2 = f_0(\eta + \alpha f_0')$, $(\alpha = \mathrm{const})$, $(\eta = \mathrm{const})$. Так как получены условия совместности системы (3.2), ее решение сводится к решению базового уравнения. Из базового уравнения $E_t = f_0(E)$ получаем

$$\int \frac{dE}{f_0(E)} = t + A(x, y, z).$$

Как показано выше, $E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = \alpha f_0^2$, но

$$\frac{1}{f_0(E)} E_x = A_x, \quad \frac{1}{f_0(E)} E_y = A_y, \quad \frac{1}{f_0(E)} E_z = A_z, \quad \text{отсюда}, \quad A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \alpha.$$

Чтобы определить вид функции $A(x, y, z)$, решаем уравнение в частных производных первого порядка: $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \alpha$. Выписываем систему уравнений характеристик [10]

$$\frac{dx}{ds} = 2A_x, \quad \frac{dy}{ds} = 2A_y, \quad \frac{dz}{ds} = 2A_z, \quad \frac{dA}{ds} = 2\alpha, \quad \frac{dA_x}{ds} = 0, \quad \frac{dA_y}{ds} = 0, \quad \frac{dA_z}{ds} = 0.$$

Выбираем A в качестве переменной, изменяющейся вдоль характеристики. Получаем

$$\frac{dx}{dA} = \frac{A_x}{\alpha}, \quad \frac{dy}{dA} = \frac{A_y}{\alpha}, \quad \frac{dz}{dA} = \frac{A_z}{\alpha}, \quad A_x = \mathrm{const}, \quad A_y = \mathrm{const}, \quad A_z = \pm\sqrt{\alpha - A_x^2 - A_y^2}\,.$$

Отсюда, проводя характеристики через некоторое начальное многообразие с переменными ν_1, ν_2, имеем [10]

$$
\begin{aligned}
&x = \frac{A_x(\nu_1,\nu_2)}{\alpha}A + b_1(\nu_1,\nu_2), \quad y = \frac{A_y(\nu_1,\nu_2)}{\alpha}A + b_2(\nu_1,\nu_2),\\
&z = \pm\frac{\sqrt{\alpha - A_x(\nu_1,\nu_2)^2 - A_y(\nu_1,\nu_2)^2}}{\alpha}A + b_3(\nu_1,\nu_2).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Равенства (3.4) задают преобразование координат, если

$$
A = A\left(\frac{A_x(\nu_1,\nu_2)}{\alpha}A + b_1(\nu_1,\nu_2), \frac{A_y(\nu_1,\nu_2)}{\alpha}A + b_2(\nu_1,\nu_2), \pm\frac{\sqrt{\alpha - A_x^2 - A_y^2}}{\alpha}A + b_3(\nu_1,\nu_2)\right)
$$

— тождество. А именно,

$$
\begin{aligned}
&1 = A_x\frac{A_x}{\alpha} + A_y\frac{A_y}{\alpha} + \sqrt{\alpha - A_x^2 - A_y^2}\ \frac{\sqrt{\alpha - A_x^2 - A_y^2}}{\alpha},\\
&0 = A_x\Big[\frac{A}{\alpha}\frac{dA_x}{d\nu_j} + \frac{db_1}{d\nu_j}\Big] + A_y\Big[\frac{A}{\alpha}\frac{dA_y}{d\nu_j} + \frac{db_2}{d\nu_j}\Big] + B_j, \quad j = 1,2,\\
&B_j = \pm\sqrt{\alpha - A_x^2 - A_y^2}\Big[\frac{db_3}{d\nu_j} \mp \frac{A}{\alpha\sqrt{\alpha - A_x^2 - A_y^2}}\Big(A_x\frac{dA_x}{d\nu_j} + A_y\frac{dA_y}{d\nu_j}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Первое равенство в (3.5) выполняется тождественно, второе равенство в (3.5) выполняется, если, например, $b_i = \text{const}$, $(i = 1,2,3)$. В этом случае из (3.4) получаем, что

$$
\begin{aligned}
&A = \pm\sqrt{\alpha\,[\,(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2\,]},\\
&\int\frac{dE}{f_0(E)} = t \pm \sqrt{\alpha\,[\,(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2\,]}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Как следует из (3.6), окончательный вид функции $E = E(x,y,z,t)$ зависит от произвольной функции $f_0(E)$. Что и требовалось доказать. □

Подставив в (3.2) выражения $f_1(E)$, $f_2(E)$, при которых система (3.3) совместна, приходим к ОДУ для функции $P(E)$, решение которого зависит от произвольной функции $f_0(E) \neq 0$:

$$
(P'f_0)' = -\frac{c^2}{4\pi}\Big(\frac{1-c^2\alpha}{c^2}f_0' - \eta\Big), \quad P'f_0 = -\frac{c^2}{4\pi}\Big(\frac{1-c^2\alpha}{c^2}f_0 - \eta E\Big) + \beta, \quad \beta = \text{const}. \tag{3.7}
$$

Продемонстрируем на примерах, как получать вид поля излучения и отклик среды на такое поле.

Общее правило. Задаем $f_0(E)$. Вычисляем интеграл $\displaystyle\int dE/f_0(E)$. Из формулы (3.6) находим $E(x,y,z,t)$. Далее подставляем в (3.7) или (3.2) заданное $f_0(E)$. Получаем уравнение для определения $P(E)$, не содержащее произвольных функций. Решаем это уравнение.

П р и м е р 1. Пусть $f_0(E) = E$, $b_i = 0$. Подставляем такое f_0 в (3.7), (3.6), получаем

$$
E = C\exp\Big\{t \pm \sqrt{\alpha(x^2+y^2+z^2)}\Big\}, \quad P = -\frac{c^2}{4\pi}\Big(\frac{1-c^2\alpha}{c^2} - \eta\Big)E + \beta\ln E + \gamma,
$$

$$
\lim_{t\to\infty} E = \infty, \quad \lim_{E\to\infty} P = \infty, \quad \gamma = \text{const}, \quad \mathrm{C} = \text{const}.
$$

П р и м е р 2. Пусть $f_0 = \text{const}$, $b_i = 0$, тогда $f_2 = \text{const}$, $f_1 = 0$ (см. утверждение). Подставляем $f_0 = \text{const}$, $f_2 = \text{const}$, $f_1 = 0$ в (3.6), (3.2), получаем

$$E = f_0\left(t \pm \sqrt{\alpha(x^2+y^2+z^2)}\right) + C_1, \quad P = \frac{c^2 f_2}{8\pi f_0^2}E^2 + C_2E + C_3,$$

$$\lim_{t\to\infty} E = \infty, \quad \lim_{E\to\infty} P = \infty, \quad f_2 = \text{const}, \quad C_k = \text{const}, \quad k = 1,2,3.$$

П р и м е р 3. Пусть $f_0 = 1/E$, $b_i = 0$. Подставляем такое f_0 в (3.7), (3.6), получаем

$$E = \sqrt{2\left[t \pm \sqrt{\alpha(x^2+y^2+z^2)}\right]}, \quad P = -\frac{c^2}{4\pi}\left(\frac{1-c^2\alpha}{c^2}E - \frac{\eta}{3}E^3\right) + 0.5\beta E^2 + \beta_1,$$

$$\lim_{t\to\infty} E = \infty, \quad \lim_{E\to\infty} P = \infty, \quad \beta_1 = \text{const}.$$

П р и м е р 4. Пусть $f_0 = -E^2$. Подставляем такое f_0 в (3.7), (3.6), получаем

$$E = \frac{1}{t \pm \sqrt{\alpha[(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2]}}, \quad P = -\frac{c^2}{4\pi}\Big(\frac{1-c^2\alpha}{c^2}E + \eta\ln E\Big) - \frac{\beta}{E} + \gamma,$$

$$\lim_{t\to\infty} E = 0, \quad \lim_{E\to 0} P = \infty, \quad \text{если} \quad \beta \neq 0, \quad \eta = 0, \quad \gamma = \text{const}.$$

Заключение

Предложен алгоритм редукции недоопределенных уравнений в частных производных к системе ОДУ. Для недоопределенного уравнения в частных производных (3.1) получена система ОДУ, содержащая одну произвольную функцию и произвольные постоянные (см. $E_t = f_0(E)$, (3.7)). Предложенный выше подход к изучению взаимодействия интенсивного излучения с веществом в диэлектрических немагнитных средах, когда $P = P(E)$, привел к получению результатов, имеющих широкий произвол (см. (3.7), (3.6), примеры). Как следует из полученных результатов, время действия излучения зависит от вида произвольной функции (см. примеры). Фиксируется направление ответа на воздействие, когда интенсивность излучения меняется линейно ($A_x = \text{const}$, $A_y = \text{const}$, $A_z = \text{const}$, $A \neq \text{const}$). При этом такой ответ может исходить из разных множеств (см. возможность выбора начального многообразия). Даже при затухании излучения может сохраняться ответная реакция (см. пример 4).

Полученные результаты могут служить тестами при исследовании опытным путем динамики поля интенсивного излучения в стеклах, жидкостях, газах, кристаллах или тестами при численных расчетах. Произвольные постоянные в полученных результатах могут использоваться для описания нелинейных восприимчивостей (см. [2; 3]).

Возможен еще иной путь применения предлагаемого подхода. Задается какой-то вид $P(E)$, который, как ожидается из опыта, подходит при исследовании. Такое $P(E)$ подставляется в (3.7), и получается уравнение для определения произвольной функции $f_0(E)$. При любой поляризации после определения $f_0(E)$ динамика электрического поля излучения легко просматривается из уравнения $E_t = f_0(E)$, но, применяя еще какие-то опытные данные и используя константный произвол, можно выписать и вид $E = E(x, y, z, t)$.

Автор благодарит А. И. Короткого и А. Р. Данилина за большую помощь при подготовке статьи к печати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich.** *Fundamentals of Photonics*: 1st ed., Wiley, 1991, 992 p. ISBN: 9780471839651; 2nd ed. Wiley, 2007, 1200 p. ISBN: 0471358320; 3 rd. ed., Wiley, 2019, 1359 p. ISBN: 9781119506874.

2. **Сазонов С.В.** Об оптических солитонах различных длительностей // Ученые записки Казан. гос. ун-та. Физ.-мат. науки. 2008. Т. 150, кн. 2. С. 29–37.
3. **Сазонов С.В.** К нелинейной оптике предельно коротких импульсов // Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130, вып. 12. С. 1846–1855.
4. **Агранат М.Б., Анисимов С.И. , Макшанцев Б.И.** Аномальное тепловое излучение металлов, создаваемое ультракороткими лазерными импульсами // Прикл. физика, фотофизика и лазерная химия. 1988. Т. 47, вып. 3. С. 209–221. doi: 10.1007/BF00697339
5. **Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В. Ю.** Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках, новые типы нелинейных волн, возникновение оптической турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47, вып. 12. С. 611–614.
6. **Акаев А.А., Майоров С.А.** Оптические методы обработки информации. М.: Высш. шк., 1988. 238 с.
7. **Акимова И.Г., Разгулин А.В.** Ротационные волны в оптической системе с дифракцией и поворотом пространственных аргументов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 1999. № 2. С. 20–25.
8. **Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.** Нелинейные волны. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Наука. Физматлит, 2000. 272 с.
9. **Ovsiannikov L.V.** Group analysis of differential equations. NY: Acad. Press, 1982. 416 p.
10. **Courant R., Hilbert D.** Methods of mathematical physics. Vol. 2: Partial differential equations. NY: Interscience, 1962. 830 p.
11. **Clarkson P.A., Kruskal M.D.** New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30, no. 10. P. 2201–2213. doi: 10.1063/1.528613
12. **Сидоров А.Ф., Гаврилушкин И. Б.** Об одном классе решений нелинейного уравнения для потенциала скоростей // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 2. С. 264–270.
13. **Сидоров А.Ф.** О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // Численные методы механики сплошной среды. Т. 6 , №4. Новосибирск, 1975. С. 106–115.
14. **Сидоров А.Ф.** О некоторых классах решений уравнений нестационарной фильтрации // Численные методы механики сплошной среды. Т. 15, №2. Новосибирск, 1984. С. 121–133.
15. **Сидоров А.Ф.** Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, №1. С. 47–51.
16. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, №2. С. 265–286.
17. **Сидоров А.Ф., Шапеев В.П, Яненко Н.Н.** Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Нововосибирск: Наука, 1984. 272 с.
18. **Bruce M., Hua X.** An approximate link equation for the direct–detected optical PPM link // IPN Progress Report. Nov. 2014. No. 42-199A. 14 p.
19. **Boroson D.M., Robinson B.S., Murphy D.V., Burianek D.A., Khatri F., Kovalik J. M., Sodnik Z., Cornwell D. M.** Overview and results of the lunar laser communication demonstration // Proc. of the SPIE. 2014. Vol. 8971. Article no. 89710S. P. 8971OS–8971OS-11.
20. **Лосев Д.В., Бардашов Д.С., Быков А.Г.** Возбуждение полупроводникового диода коротким импульсом // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58, №8-2. С. 147–150.
21. **Алименков И.В., Пчёлкина Ю.Ж.** Интегрирование в элементарных функциях двунаправленного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах для степенной нелинейности // Компьютерная оптика. 2014. Vol. 38, no. 3. С. 377–379.
22. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** К вопросу об отличиях в поведении решений линейного и нелинейного уравнений теплопроводности // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5, №2. С. 52–59.
23. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, №5. С. 1093–1101.
24. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном подходе к решению неоднородных уравнений в частных производных // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 3. С. 355–364. doi 10.20537/vm170306

Поступила 23.12.2022
После доработки 9.03.2023
Принята к публикации 20.03.2023

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rli@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bahaa E.A. Saleh, Teich M.C. *Fundamentals of Photonics*, 3 rd. ed. Wiley, 2019, 1520 p. ISBN: 9781119506874.
2. Sazonov S.V. On optical solitones of different durations. *Bulletin of Kazan State Univ., Phys. Math. Sci.,* 2008, vol. 150, no. 2, pp. 29–37 (in Russian).
3. Sazonov S.V. On nonlinear optics of ultimately short impulses. *Optics and Spectroscopy*, 2022, vol. 130, no. 12, pp. 1846–1855 (in Russian). doi: 10.21883/OS.2022.12.54090.45-22
4. Agranat M.B., Anisimov S.I., Makshantsev B.I. The anomalous thermal radiation from metals produced by ultrashort laser pulses. I, *Appl. Phys. B*, 1988, vol. 47, no. 3, pp. 209–221. doi: 10.1007/BF00697339
5. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu. Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams, new types of nonlinear waves, onset of “optical turbulence”. *Letters to JETP,* 1988, vol. 47, no. 12, pp. 707–711.
6. Akaev A.A., Mayorov S.A. *Opticheskie metody obrabotki informatsii* [Optical methods of information processing], Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1988, 238 p.
7. Akimova I.G., Razgulin A.V. Rotational waves in an optical system with diffraction and rotation of spatial arguments. *Vestnik of Moscow State Univ., Ser. 15: Comput. Math. and Cybernetics,* 1999, no. 2, pp. 20–25 (in Russian).
8. Ryskin N. M., Trubetskov D. I. *Nelineinye volny* [Nonlinear waves]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 272 p.
9. Ovsiannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations.* NY, Acad. Press, 1982, 416 p. doi: 10.1016/C2013-0-07470-1 Original Russian text was published in Ovsiannikov L.V., Gruppovoi analiz differentsial’nykh uravnenii, Moscow, Nauka Publ., 1978, 399 pp.
10. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2: Partial differential equations,* NY, Interscience, 1962, 830 p. Translated to Russian under the title Metody matematicheskoi fiziki: Uravneniya v chastnykh proizvodnykh, Moscow, Mir Publ., 1964, 831 p.
11. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.,* 1989, vol. 30, no. 10, pp. 2201–2213. doi: 10.1063/1.528613
12. Sidorov A.F., Gavrilushkin I.B. On a class of solutions of a nonlinear equation for the velocity potential *J. Appl. Math. Mech.,* 1974, vol. 38, no. 2, pp. 237–244. doi: 10.1016/0021-8928(74)90063-X
13. Sidorov A.F. On some representations of solutions of quasilinear hyperbolic equations. In: *Computational Methods of Continuum Mechanics*, 1975, vol. 6, no. 4, pp. 106–115 (in Russian).
14. Sidorov A.F. On some classes of solutions to equations of unsteady filtration. In: *Computational Methods of Continuum Mechanics*, 1984, vol. 15, no. 2, pp. 121–133 (in Russian).
15. Sidorov A.F. Analytic representations of solutions of nonlinear parabolic equations of time-dependent filtration *Dokl. Academy of Sciences of the USSR,* 1985, vol. 31, pp. 40–44.
16. Rubina L.I.,Ulyanov O.N. Solving nonlinear partial differential equations by the geometric method. *Trudy Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 265–280 (in Russian).
17. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial’nykh svyazei i ego prilozheniya k gazovoi dinamike* [The method of differential constraints and its applications to gas dynamics], Novosibirsk, Nauka Publ., 1984, 272 p.
18. Bruce M., Hua X. An approximate link equation for the direct-detected optical PPM link. *IPN Progress Report,* 2014, No. 42-199A. 14 p.
19. Boroson D.M., Robinson B.S., Murphy D.V., Burianek D.A., Khatri F., Kovalik J. M., Sodnik Z., Cornwell D. M. Overview and results of the lunar laser communication demonstration. In: *Proc. of the SPIE*, 2014, vol. 8971, article no. 8971OS, pp. 8971OS–8971OS-11. doi: 10.1117/12.2045508
20. Losev D.V., Bardashov D.S., Bykov A.G. Excitation of a semiconductor diode by a short pulse *Izvestiya Vuzov. Physics*, 2015, vol. 58, no. 8-2, pp. 147–150 (in Russian).
21. Alimenkov I.V., Pchelkina Yu.Zh. Integration in elementary funktions of two-way pulse–propagation equation in optical fibers for power nonlinearity. *Computer Optics*, 2014, vol. 38, no. 3, pp. 377–379 (in Russian).

22. Rubina L I., Ulyanov O.N. On the question of differences in the behavior of solutions of linear and nonlinear heat equations *Bulletin of South Ural State Univ. Series Maths. Mechanics. Physics,* 2013, vol. 5, no. 2, pp. 52–59 (in Russian).
23. Rubina L. I., Ulyanov O. N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 872–881. doi: 10.1134/S0037446612050126
24. Rubina L. I., Ulyanov O. N. On one approach to solving inhomogeneous partial differential equations *Bulletin of the Udmurt University. Math. Mechanics. Computer science,* 2017, vol. 27, no. 3, pp. 355–364 (in Russian). doi: 10.20537vm170306

Received December 23, 2022
Revised March 9, 2023
Accepted March 20, 2023

Ljudmila Il'inichna Rubina, Cand. Sci (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: rli@imm.uran.ru .

Cite this article as: L. I. Rubina. One approach to the solution of the wave equation for dielectric nonmagnetic media. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 145–156.