ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 519.633

МЕТОД РИЧАРДСОНА ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В. Г. Пименов, А. Б. Ложников

Рассматривается диффузионное уравнение с функциональным эффектом запаздывания. Производится дискретизация задачи. Приводятся конструкции разностного метода Кранка — Николсон с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением, который имеет второй порядок малости относительно шагов дискретизации по времени Δ и пространству h. Конструируется базовый метод Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением. Изучается порядок невязки без интерполяции базового метода и выписываются коэффициенты разложения невязки относительно Δ и h. Выписывается уравнение для главного члена асимптотического разложения глобальной погрешности. При определенных предположениях обосновывается законность применение процедуры экстраполяции по Ричардсону, и строится соответствующий метод. Главное из этих предположений — согласованность порядков малости Δ и h. Доказывается, что метод имеет порядок $O(\Delta^4 + h^4)$. Приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

Ключевые слова: уравнение диффузии, функциональное запаздывание, метод Кранка — Николсон, кусочно-кубическая интерполяция, экстраполяция продолжением, метод Ричардсона.

V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov. Richardson method for a diffusion equation with functional delay.

A diffusion equation with a functional delay effect is considered. The problem is discretized. Constructions of the Crank–Nicolson difference method with piecewise linear interpolation and extrapolation by continuation are given; the method here has the second order of smallness with respect to the sampling steps in time Δ and space h. The basic Crank–Nicolson method with piecewise cubic interpolation and extrapolation by continuation is constructed. The order of the residual without interpolation of the base method is studied, and the expansion coefficients of the residual with respect to Δ and h are written. An equation for the leading term of the asymptotic expansion of the global error is written. Under certain assumptions, the validity of the application of the Richardson extrapolation procedure is substantiated and an appropriate method is constructed. The main of these assumptions is the consistency of the orders of smallness of Δ and h. It is proved that the method has order $O(\Delta^4 + h^4)$. The results of numerical experiments on test examples are presented.

Keywords: diffusion equation, functional delay, Crank–Nicolson method, piecewise cubic interpolation, extrapolation by continuation, Richardson method.

MSC: 65N06, 65Q20

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-133-144

Введение

Уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом широко применяются в математическом моделировании (см., например, [1]). Быстро развиваются различные численные методы решения таких задач, особенно разностные, правда, в основном для уравнений с постоянным запаздыванием. Так, в работе [2] для общего класса задач пришлось использовать идеи интерполяции и применять неявные методы. В [3] за счет идеи линейной интерполяции и экстраполяции продолжением были построены эффективные численные методы для решения уравнения диффузии с запаздыванием общего вида, затем эти методы были перенесены на другие уравнения [4]. В работах [5; 6] для уравнения с постоянным запаздыванием была построена компактная разностная схема, имеющая четвертый порядок малости по пространственному шагу. Различные аспекты построения разностных методов высокого порядка для

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00075).

уравнений с запаздыванием обсуждались также в [7; 8]. Однако в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием пока нет таких универсальных алгоритмов, которые можно было бы положить в основу пакетов прикладных программ для решения подобных задач. На наш взгляд, одна из причин этого — отсутствие процедур автоматического выбора шагов по времени и пространству с использованием заданной точности. В данной работе предлагается процедура экстраполяции Ричардсона, которая не только позволяет построить новый метод порядка $\Delta^4 + h^4$ на основе базового метода порядка $\Delta^2 + h^2$, но и применять процедуру Рунге практической оценки погрешности, что в перспективе может быть использовано для организации методов с автоматическим выбором шага. Основной результат статьи состоит в обосновании порядка асимптотического разложения глобальной погрешности для базового метода Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией для решения уравнения диффузии с функциональным запаздыванием. Несмотря на то что идеи метода экстраполяции Ричардсона (см, например, [9; 10]) являются старыми и классическими, интерес к его конструкциям в последнее время возрастает. Например, он разработан для разных задач: параболических без запаздывания [11], нейтральных параболических [12], уравнений соболевского типа с постоянным запаздыванием [13], волновых уравнений [14] с постоянным запаздыванием. В отличие от этих и других работ для уравнений с постоянным запаздыванием, в данной статье наличие функционального запаздывания при выводе уравнения для асимптотического разложения глобальной погрешности приводит к функциональному уравнению в частных производных.

1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение теплопроводности с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u_t(x,\cdot)), \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X$ — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция решения, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), \tau \leqslant s \leqslant 0\}$ — история искомой функции к моменту t, $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Заданы граничные условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(X,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

и начальные условия

$$u(x,s) = \varphi(x,s), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad -\tau \leqslant s \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. Кроме того, при доказательстве сходимости численных методов будем предполагать необходимую гладкость решения $u(x,t)$.

Обозначим через $C = C[-\tau, 0]$ множество функций $q(s)$, непрерывных на отрезке $[-\tau, 0]$ с нормой $\|q(\cdot)\| = \max\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}|q(s)|$. Дополнительно предположим, что функционал $f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big)$ липшицев с константой L_f по последнему аргументу, т. е. существует постоянная L_f такая, что для всех $x \in [0,X]$, $t \leqslant 0$, $v^1(\cdot) \in C$, $v^2(\cdot) \in C$ выполняется

$$|f(x,t,v^1(\cdot)) - f(x,t,v^2(\cdot))| \leqslant L_f \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_C.$$

2. Дискретизация. Метод Кранка — Николсон с кусочно-линейной интерполяцией

Введем шаг по времени $\Delta = \tau/M_0$, где M_0 — натуральное число, и пусть $M = [T/\Delta]$. Введем точки (узлы по времени) $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \ldots, M$. Полуцелые узлы будем обозначать

$t_{j+1/2} = t_j + \Delta/2$. Разобьем отрезок $[0, X]$ на части, введя шаг по пространству $h = X/N$, где N — целое число, введем точки (узлы по пространству) $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$. Аппроксимацию функции $u(x_i, t_j)$ в узлах будем обозначать U_j^i.

При всяком фиксированном $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j, $j = 0, \ldots, M$: $\{U_k^i\}_j = \{U_k^i, j - M_0 \leqslant k \leqslant j\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение I: $\{U_k^i\}_j \to U_j^i(\cdot) \in C[t_j - \tau, t_{j+1/2}]$.

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех i, j и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1/2}]$ выполняется неравенство

$$|U_j^i(t) - u(x_i, t)| \leqslant C_1 \cdot \max_{j-M_0 \leqslant k \leqslant j} |U_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p.$$

Рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию $I(\{U_k^i\}_j) = U_j^i(\cdot)$, задаваемую соотношениями

$$U_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t_j - s)U_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})U_k^i), \quad t_{k-1} \leqslant t_j + s \leqslant t_k, \tag{2.1}$$

с экстраполяцией продолжением

$$U_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((-s)U_{j-1}^i + (\Delta + s)U_j^i), \quad t_j \leqslant t_j + s \leqslant t_{j+\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет порядок 2, если точное решение $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau, T]$ (см. [15, с. 97]).

Методом Кранка — Николсон назовем неявную разностную схему

$$\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{\Delta} = \frac{U_{j+1}^{i-1} - 2U_{j+1}^i + U_{j+1}^{i+1}}{2h^2} + \frac{U_j^{i-1} - 2U_j^i + U_j^{i+1}}{2h^2} + f(x_i, t_{j+1/2}, (U_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)), \tag{2.3}$$

$$i = 1, \ldots, N - 1, \quad j = 0, \ldots, M - 1,$$

с начальными условиями

$$U_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad i = 0, \ldots, N,$$

и граничными условиями

$$U_j^0 = 0, \quad u_j^N = 0, \ j = 0, \ldots, M,$$

где $(U_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ — предыстория к моменту $t_{j+1/2}$ результата действия оператора кусочно-линейной интерполяции (2.1) с экстраполяцией (2.2).

Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если найдется такая константа C, что выполняется $|u(x_i, t_j) - U_j^i| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \ldots, N$ и $j = 0, \ldots, M$.

Метод Кранка — Николсон с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением является частным случаем схемы с весами [3] при весе $s = 1/2$, поэтому, как следует из [3], он устойчив и сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$. Наша цель — на основании этого метода построить метод более высокого порядка сходимости.

3. Базовый метод Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией

Построим базовый метод Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением.

Будем разбивать отрезок запаздывания так, чтобы число точек делилось на 3: $M_0 = 3m$, где m — натуральное число. Пусть по-прежнему $\Delta = \tau/M_0$, $M = [T/\Delta]$, точки разбиения по времени $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \ldots, M$. Разбиение по пространству не меняется.

Опишем кусочно-кубическую интерполяцию. При всяком фиксированном $i = 0, \ldots, N$ и фиксированном $i = 0, \ldots, M-1$ разобьем отрезок $[t_j - \tau, t_j]$ справа на подотрезки $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $l = 0, \ldots, m-1$, длиной 3Δ таким образом, что $t_{j,0} = t_j$, $t_{j,1} = t_{j-3}$, $\cdots, t_{j,m} = t_{j-3m}$. Получается, $t_{j,l} = t_{j-3l}$, $l = 0, \ldots, m$.

На каждом подотрезке $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $i = 0, \ldots, N$, построим кубическую параболу — интерполяционный многочлен $L_3^l(t)$ в форме Лагранжа по узлам t_{j-3l-3}, t_{j-3l-2}, t_{j-3l-1}, t_{j-2l} и значениям в узлах U^i_{j-3l-3}, U^i_{j-3l-2}, U^i_{j-3l-1}, U^i_{j-3l}:

$$L_3^l(t) = -U^i_{j-3l-3}\frac{(t-t_{j-3l-2})(t-t_{j-3l-1})(t-t_{j-3l})}{6\Delta^3} + U^i_{j-3l-2}\frac{(t-t_{j-3l-3})(t-t_{j-3l-1})(t-t_{j-3l})}{2\Delta^3}$$
$$- U^i_{j-3l-1}\frac{(t-t_{j-3l-3})(t-t_{j-3l-2})(t-t_{j-3l})}{2\Delta^3} + U^i_{j-3l}\frac{(t-t_{j-3l-3})(t-t_{j-3l-2})(t-t_{j-3l-1})}{6\Delta^3}.$$

В случае, если для узла, например, для $t_{j,l+1} = t_{j-3l-3}$ выполняется неравенство $t_{j-3l-3} < 0$, т. е. $j - 3l - 3 < 0$, значение в узле берется из начальных условий $U^i_{j-3l-3} = \varphi(x_i, t_{j-3l-3})$.

Кусочно-кубическая интерполяция $I(\{U^i_k\}_j) = U^i_j(\cdot)$ задается равенствами

$$U^i_j(t_j + s) = L_3^l(t_j + s), \quad t_{j-3l-3} \leqslant t_j + s \leqslant t_{j-3l}, \tag{3.1}$$

экстраполяция продолжением

$$U^i_j(t_j + s) = L_3^0(t_j + s), \quad t_j \leqslant t_j + s \leqslant t_{j+\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Кусочно-кубическая интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет порядок 4, если точное решение $u(x, t)$ четырежды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau, T]$ (см. [15, с. 97]).

Методом Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией назовем разностную схему (2.3), где $(U^i_j)_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ — предыстория к моменту $t_{j+1/2}$ результата действия оператора кусочно-кубической интерполяции (3.1) с экстраполяцией (3.2). Хотя этот метод также имеет порядок $h^2 + \Delta^2$, схема экстраполяции Ричардсона, примененная к этому методу, позволяет повысить порядок до $h^4 + \Delta^4$.

4. Невязка без интерполяции метода Кранка — Николсон

Невязкой без интерполяции метода (2.3) назовем

$$\psi^i_j = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{2h^2}$$
$$- \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{2h^2} - f(x_i, t_{j+1/2}, u_{t_{j+1/2}}(x, \cdot)). \tag{4.1}$$

Лемма 1. *Если точное решение $u(x, t)$ шесть раз непрерывно дифференцируемо по x и по t, причем смешанные частные до шестого порядка непрерывны, то невязка без интерполяции* (4.1) *представима в виде*

$$\psi^i_j = R_1(x_i, t_j)\Delta^2 + R_2(x_i, t_j)h^2 + R_3(x_i, t_j)\Delta^4 + R_4(x_i, t_j)h^4.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для значений функции $u(x, t)$, входящих в определение невязки, имеем следующие равенства:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1/2}) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2})\frac{\Delta}{2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2})\Delta^2$$
$$+ \frac{1}{48}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_{j+1/2})\Delta^3 + \frac{1}{384}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, t_{j+1/2})\Delta^4 + \frac{1}{1840}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i, \xi_1)\Delta^5;$$

$$u(x_i,t_j)=u(x_i,t_{j+1/2})-\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_{j+1/2})\frac{\Delta}{2}+\frac{1}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^2$$

$$-\frac{1}{48}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^3+\frac{1}{384}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^4-\frac{1}{1840}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i,\xi_2)\Delta^5;$$

$$u(x_{i+1},t_{j+1})=u(x_i,t_{j+1})+\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{j+1})h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1})h^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_{j+1})h^3$$

$$+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})h^4+\frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_{j+1})h^5+\frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_1,t_{j+1})h^6;$$

$$u(x_{i-1},t_{j+1})=u(x_i,t_{j+1})-\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{j+1})h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1})h^2-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_{j+1})h^3$$

$$+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})h^4-\frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_{j+1})h^5+\frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_2,t_{j+1})h^6;$$

$$u(x_{i+1},t_j)=u(x_i,t_j)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j)h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)h^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j)h^3$$

$$+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j)h^4+\frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_j)h^5+\frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_3,t_j)h^6;$$

$$u(x_{i-1},t_j)=u(x_i,t_j)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j)h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)h^2-\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i,t_j)h^3$$

$$+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j)h^4-\frac{1}{120}\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(x_i,t_j)h^5+\frac{1}{720}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_4,t_j)h^6;$$

$$\xi_1\in[t_{j+1/2},t_{j+1}],\quad \xi_2\in[t_j,t_{j+1/2}],\quad \eta_1,\eta_3\in[x_i,x_{i+1}],\quad \eta_2,\eta_4\in[x_{i-1},x_i],$$

поэтому

$$\psi_j^i=\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t_{j+1/2})-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1})-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)-f(x_i,t_{j+1/2},u_{t_{j+1/2}}(x,\cdot))$$

$$+\frac{1}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^2+\frac{1}{1840}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i,\xi_1)\Delta^4-\frac{1}{1840}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i,\xi_2)\Delta^4$$

$$-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})h^2-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j)h^2-\frac{1}{1440}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_1,t_{j+1})h^4$$

$$-\frac{1}{1440}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_2,t_{j+1})h^4-\frac{1}{1440}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_3,t_j)h^4-\frac{1}{1440}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_4,t_j)h^4.$$

Учитывая разложения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1})=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1/2})+\frac{\Delta}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}(x_i,t_{j+1/2})+\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^2$$

$$+\frac{1}{48}\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial t^3}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^3+\frac{1}{192}\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial t^4}(x_i,\xi_3)\Delta^4,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{j+1/2})-\frac{\Delta}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}(x_i,t_{j+1/2})+\frac{1}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^2$$

$$-\frac{1}{48}\frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial t^3}(x_i,t_{j+1/2})\Delta^3+\frac{1}{192}\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial t^4}(x_i,\xi_4)\Delta^4,$$

$$\xi_3\in[t_{j+1/2},t_{j+1}],\quad \xi_4\in[t_j,t_{j+1/2}],$$

а также то, что $u(x_i,t_{j+1/2})$ является решением задачи (1.1), получаем

$$\psi_j^i=R_1(x_i,t_j)\Delta^2+R_2(x_i,t_j)h^2+R_3(x_i,t_j)\Delta^4+R_4(x_i,t_j)h^4,$$

где

$$R_1(x_i,t_j)=\frac{1}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t_{j+1/2})-\frac{1}{16}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}(x_i,t_{j+1/2}),$$

$$R_2(x_i,t_j)=-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_{j+1})-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i,t_j),$$

$$R_3(x_i,t_j)=\frac{1}{1840}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i,\xi_1)-\frac{1}{1840}\frac{\partial^5 u}{\partial t^5}(x_i,\xi_2)-\frac{1}{384}\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial t^4}(x_i,\xi_3)-\frac{1}{384}\frac{\partial^6 u}{\partial x^2\partial t^4}(x_i,\xi_4),$$

$$R_4(x_i,t_j)=-\frac{1}{1440}\Big[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_1,t_{j+1})+\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_2,t_{j+1})+\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_3,t_j)+\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(\eta_4,t_j)\Big].$$

Лемма доказана.

5. Явная векторная форма базового метода и его невязки с интерполяцией

При каждом j определим значения дискретной модели (2.3), (3.1), (3.2) вектором $U_j=(U_j^1,U_j^2,\dots,U_j^{N-1})'\in Y$; здесь Y — векторное пространство размерности $N-1$, $'$ — знак транспонирования. Определим норму в пространстве Y соотношением

$$\|U_j\|=\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|U_j^i|.$$

Пусть $\{U_k^i\}_j$ — предыстория векторной дискретной модели к моменту t_j.

В пространстве Y введем оператор A:

$$Au_j^i=-\frac{u_j^{i-1}-2u_j^i+u_j^{i+1}}{h^2},$$

тогда систему (2.3), (3.1), (3.2) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{U_{j+1}-U_j}{\Delta}+\frac{1}{2}AU_{j+1}+\frac{1}{2}AU_j=F_j, \tag{5.1}$$

где $F_j=F_j(I(\{U_k\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i,t_{j+1/2},(U_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot))$, $i=1,\dots,N-1$, где $(U_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ – предыстория к моменту $t_{j+1/2}$ результата действия оператора кусочно-кубической интерполяции (3.1) с экстраполяцией (3.2).

Введем также операторы

$$B=E+\frac{\Delta}{2}A,\quad S=E-\Delta B^{-1}A,$$

где E – единичный оператор, тогда уравнение (5.1) можно привести [4, с. 23] к явной форме

$$U_{j+1}=SU_j+\Delta B^{-1}F_j. \tag{5.2}$$

Введем вектор невязки без интерполяции $\psi_j=(\psi_j^1,\psi_j^2,\dots,\psi_j^{N-1})'$, который определяется соотношением

$$\psi_j=\frac{u_{j+1}-u_j}{\Delta}+\frac{1}{2}Au_{j+1}+\frac{1}{2}Au_j-\tilde F_j,$$

где $u_j=(u(x_1,t_j),u(x_2,t_j),\dots,u(x_{N-1},t_j))'$ — вектор точного решения, $\tilde F_j=F_j(u_{t_{j+1/2}}(\cdot))$ — вектор с координатами $f(x_i,t_{j+1/2},u_{t_{j+1/2}}(x_i,\cdot))$, $u_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ — векторная предыстория точного решения к моменту $t_{j+1/2}$. Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{u_{j+1}-Su_j}{\Delta}=B^{-1}(\tilde F_j+\psi_j).$$

Определим кусочно-кубическую интерполяцию точного решения $u(x_i, t_j)$ с экстраполяцией продолжением. На каждом подотрезке $[t_{j,l+1}, t_{j,l}]$, $i = 0, \ldots, N$, построим кубическую параболу — интерполяционный многочлен $\hat{L}_3^l(t)$ в форме Лагранжа по узлам t_{j-3l-3}, t_{j-3l-2}, t_{j-3l-1}, t_{j-2l} и значениям в узлах $u(x_i, t_{j-3l-3})$, $u(x_i, t_{j-3l-2})$, $u(x_i, t_{j-3l-1})$, $u(x_i, t_{j-3l})$:

$$\begin{aligned}\hat{L}_3^l(t) = -u(x_i, t_{j-3l-3})&\frac{(t-t_{j-3l-2})(t-t_{j-3l-1})(t-t_{j-3l})}{6\Delta^3}\\ + u(x_i, t_{j-3l-2})&\frac{(t-t_{j-3l-3})(t-t_{j-3l-1})(t-t_{j-3l})}{2\Delta^3}\\ - u(x_i, t_{j-3l-1})&\frac{(t-t_{j-3l-3})(t-t_{j-3l-2})(t-t_{j-3l})}{2\Delta^3}\\ + u(x_i, t_{j-3l})&\frac{(t-t_{j-3l-3})(t-t_{j-3l-2})(t-t_{j-3l-1})}{6\Delta^3}.\end{aligned}$$

Кусочно-кубическая интерполяция точного решения задается равенствами

$$\hat{u}_j^i(t_j + s) = \hat{L}_3^l(t_j + s), \quad t_{j-3l-3} \leqslant t_j + s \leqslant t_{j-3l}, \tag{5.3}$$

экстраполяция продолжением —

$$\hat{u}_j^i(t_j + s) = \hat{L}_3^0(t_j + s), \quad t_j \leqslant t_j + s \leqslant t_{j+1/2}. \tag{5.4}$$

Невязка с интерполяцией определяется для данного метода в виде

$$d_j = \frac{u_{j+1} - Su_j}{\Delta} - B^{-1}\hat{F}_j,$$

$\hat{F}_j = F_j(I(\{u_k\}_j))$ — вектор с координатами $f(x_i, t_{j+1/2}, (\hat{u}_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot))$, $(\hat{u}_j^i)_{t_{j+1/2}}(\cdot)$ — предыстория к моменту $t_{j+1/2}$ кусочно-кубической интерполяции (5.3) с экстраполяцией продолжением (5.4) точного решения.

Таким образом, имеем соотношения между невязкой с интерполяцией и невязкой без интерполяции

$$d_j = B^{-1}\psi_j + B^{-1}\tilde{F}_j - \hat{F}_j.$$

Из этого соотношения и из того, что оператор кусочно-кубической интерполяции с экстраполяцией продолжением имеет порядок 4, вытекает утверждение.

Лемма 2. *Если выполняются условия леммы* 1, *то невязка с интерполяцией представима в виде*

$$d_j = \hat{R}_j\Delta^2 + \tilde{R}_j h^2 + O(\Delta^4 + h^4). \tag{5.5}$$

$$\hat{R}_j = B^{-1}R_{1,j}, \quad \tilde{R}_j = B^{-1}R_{2,j},$$

$R_{1,j}$ *— вектор с координатами* $R_1(x_i, t_j)$, $R_{2,j}$ *— вектор с координатами* $R_2(x_i, t_j)$.

6. Асимптотическое представление глобальной погрешности базового метода

Определим векторную погрешность метода (5.1) как вектор ε_j с координатами ε_j^i, $i = 1, \ldots, N-1$, где $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - U_j^i$.

В этом разделе будем предполагать выполнение следующих условий.

Предположение 1. *Функционал* $f\big(x, t, u_t(x, \cdot)\big)$ *по последнему аргументу дважды дифференцируем по Фреше (см., например,* [16, с. 154]*), причем вторая производная Фреше ограничена.*

Предположение 2. *Выполнено условие согласования шагов*: $h = H\Delta$, H — *постоянная.*

З а м е ч а н и е. Предположение 2 можно ослабить до следующего: найдутся постоянные $0 < H_1 \leqslant H_2$ такие, что $H_1\Delta \leqslant h \leqslant H_2\Delta$.

С учетом предположения 2 соотношение (5.5) перепишется в виде

$$d_j = \gamma(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4), \quad \gamma(t_j) = \hat{R}_j + H\tilde{R}_j. \tag{6.1}$$

Обозначим координаты вектора $\gamma(t_j)$ через $\gamma(x_i, t_j)$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x^2} + \langle G, e_t(x,\cdot)\rangle - \gamma(x,t) \tag{6.2}$$

с начальными условиями $e(x,t) = 0, -\tau \leqslant t \leqslant 0$ и граничными условиями $e(0,t) = e(X,t) = 0$.

Здесь G — производная Фреше функционала $f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big)$ по последнему аргументу, $\langle G, e_t(x,\cdot)\rangle$ — результат действия G на предысторию $e_t(x,\cdot)$.

Предположение 3. *Уравнение* (6.2) *имеет единственное решение.*

Лемма 3. *Если выполняются условия леммы* 1, *а также предположения* 1–3, *то погрешность метода* (5.2) *представима в виде*

$$\varepsilon_j = e(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4),$$

где вектор-функция $e(t_j)$ *имеет координаты* $e(x_i,t_j)$, *функция* $e(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (6.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим векторную величину

$$\hat{U}_j = U_j - e(t_j)\Delta^2, \quad j = 0,1,\ldots,M, \tag{6.3}$$

как результат нового метода. Тогда для всех $j = 0,1,\ldots,M-1$ получаем

$$\hat{U}_{j+1} = U_{j+1} - e(t_{j+1})\Delta^2 = SU_j + \Delta B^{-1}F_j - e(t_{j+1})\Delta^2$$
$$= S\hat{U}_j + Se(t_j)\Delta^2 + \Delta B^{-1}F_j(I(\{\hat{U}_k + e(t_k)\Delta^2\}_j)) - e(t_{j+1})\Delta^2.$$

Вычислим невязку с интерполяцией этого метода

$$\hat{d}_j = \frac{u_{j+1} - Su_j}{\Delta} - B^{-1}\hat{F}_j + e(t_{j+1})\Delta - Se(t_j)\Delta - B^{-1}\check{F}_j + B^{-1}\hat{F}_j, \tag{6.4}$$

где $\check{F}_j = F_j(I(\{u_k + e(t_k)\Delta^2\}_j))$.

В силу предположения 1 (с использованием разложения Тейлора для функционала [16, с. 154]) и линейности оператора интерполяции выполняется:

$$\check{F}_j - \hat{F}_j = F_j(I(\{u_k + e(t_k)\Delta^2\}_j)) - F_j(I(\{u_k\}_j)) = \langle G, I(\{e(t_k)\}_j)\rangle\Delta^2 + O(\Delta^4).$$

Следовательно, последние четыре слагаемых в правой части (6.4) можно переписать в виде

$$e(t_{j+1})\Delta - Se(t_j)\Delta - B^{-1}\check{F}_j + B^{-1}\hat{F}_j = \Delta^2\Big\{\frac{e(t_{j+1}) - Se(t_j)}{\Delta} - B^{-1}\langle G(), I(\{e(t_k)\}_j)\rangle\Big\} + O(\Delta^4).$$

Так как $e(t)$ является решением уравнения (6.2), то в последнем равенстве выражение в фигурных скобках равно $-\gamma(t_j) + O(\Delta^2)$, поэтому

$$e(t_{j+1})\Delta - Se(t_j)\Delta - B^{-1}\check{F}_j + B^{-1}\hat{F}_j = -\gamma(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4). \tag{6.5}$$

В силу леммы 2 и соотношения (6.1) для первых двух слагаемых в правой части (6.4) выполняется

$$\frac{u_{j+1} - Su_j}{\Delta} - B^{-1}\hat{F}_j = \gamma(t_j)\Delta^2 + O(\Delta^4). \tag{6.6}$$

Из (6.4)–(6.6) вытекает, что невязка с интерполяцией метода (6.3) имеет порядок $O(\Delta^4)$, оператор интерполяции также имеет порядок $O(\Delta^4)$, следовательно, метод (6.3) сходится с порядком $O(\Delta^4)$, откуда вытекает заключение леммы.

Лемма доказана.

7. Схема Ричардсона и практическая оценка погрешности

Пусть $U_j^i(h,\Delta)$ — результат метода Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением, с шагом по пространству h и с шагом по времени Δ. Обозначим

$$(U_E)_j^i = \frac{4}{3}U_j^i\Big(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{3}U_j^i(h,\Delta). \tag{7.1}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Тогда метод* (7.1) *имеет порядок* $O(\Delta^4+h^4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $(U_E)_j(h,\Delta)$ вектор с координатами $(U_E)_j^i(h,\Delta)$; тогда если u_j — вектор точного решения, $U_j(h,\Delta)$ — вектор с координатами $U_j^i(h,\Delta)$, то векторная погрешность метода (7.1) в силу леммы 3 представима в виде

$$\begin{aligned}(\varepsilon_E)_j = u_j - (U_E)_j(h,\Delta) &= u_j - U_j\Big(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{3}\Big(U_j\Big(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}\Big) - U_j(h,\Delta) - u_j + u_j\Big)\\ &= e(t_j)\Big(\frac{\Delta}{2}\Big)^2 - \frac{1}{3}\Big(-e(t_j)(\frac{\Delta}{2})^2 + e(t_j)\Delta^2\Big) + O(\Delta^4) = O(\Delta^4).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

При условиях леммы 3 можно получить асимптотическую оценку погрешности базового метода (метод Рунге практической оценки погрешности). Пусть $\varepsilon_j^i(h,\Delta)$ — погрешность метода Кранка — Николсон с кусочно-кубической интерполяцией и экстраполяцией продолжением, с шагом по пространству h и с шагом по времени Δ. Тогда из леммы 3 следует

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Тогда справедливы формулы Рунге*

$$\varepsilon_j^i(h,\Delta) = \frac{4}{3}\Big(U_j^i\Big(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}\Big) - U_j^i(h,\Delta)\Big) + O(\Delta^4),$$

$$\varepsilon_j^i\Big(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}\Big) = \frac{1}{3}\Big(U_j^i\Big(\frac{h}{2},\frac{\Delta}{2}\Big) - U_j^i(h,\Delta)\Big) + O(\Delta^4).$$

Формулы Рунге могут быть использованы для организации вычислений с переменным шагом, определяемым заданной точностью.

8. Пример численных расчетов

Для иллюстрации изложенных методов возьмем тестовое уравнение с постоянным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (2-e^{-1})e^t\sin x + u(x,t-1) \tag{8.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,s) = e^s\sin x, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \quad -1\leqslant s\leqslant 0,$$

и нулевыми граничными условиями

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0\leqslant t\leqslant 3.$$

Это уравнение имеет точное решение $u(x,t) = e^t\sin x$. Результаты численных расчетов сведены в табл. 1. В ней приведены максимальные по модулю отклонения приближенного решения от точного, вычисленные по формуле

$$A(h,\Delta) = \max_{i,j}|U_j^i - u(x_i,t_j)|$$

для различного числа разбиений $M = 3/\Delta$ и $N = \pi/h$. Верхние числа в ячейках соответствуют методу (2.3), нижние — методу (7.1).

Таблица 1

Максимальные по модулю отклонения приближенного решения уравнения (8.1), полученные методами (2.3) и (7.1) при разных разбиениях

	$N=16$	$N=32$	$N=64$
$M=16$	0.0312 $3.5\cdot 10^{-4}$	0.0596 $5.5\cdot 10^{-4}$	0.0667 $6.2\cdot 10^{-4}$
$M=32$	0.0206 $1.5\cdot 10^{-5}$	0.0078 $1.7\cdot 10^{-5}$	0.0149 $3.0\cdot 10^{-5}$
$M=64$	0.0336 $4.9\cdot 10^{-5}$	0.0052 $1.0\cdot 10^{-6}$	0.0020 $1.1\cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Вычислительные порядки точности методов, полученные для методов (2.3) и (7.1) при разных разбиениях

Методы	$N=16$ $M=16$	$N=32$ $M=32$	$N=64$ $M=64$
Метод без уточнения (2.3)	1.9976	1.9994	1.9999
Метод с уточнением по схеме Ричардсона (7.1)	4.3347	3.9453	4.0860

Данные в табл. 2 наглядно показывают, что метод (7.1) дает результат на порядки точнее. Кроме того, эти данные позволяют оценить вычислительные порядки точности методов по формуле

$$C(h,\Delta)=\log_2\Big(\frac{A(h,\Delta)}{A(h/2,\Delta/2)}\Big),$$

которые приведены в табл. 2.

Таблица подтверждает доказанные теоретически второй порядок метода (2.3) и четвертый метода (7.1). Коды программ размещены в репозитории GitHub [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wu J.** Theory and application of partial functional differential equations. NY: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
2. **Камонт З., Кропельницка К.** Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычислит. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 361–379.
3. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.
4. **Пименов В.Г.** Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. 134 с.
5. **Sun Z., Zhang Z.** A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differetial equations // Appl. Math. Model. 2013. Vol. 37. P. 742–752. doi: 10.1016/j.apm.2012.02.036
6. **Li D., Zhang C., Wen J.** A note on compact finite difference method for reaction-diffusion equations with delays // Appl. Math. Model. 2015. Vol. 39. P. 1749–1547. doi: 10.1016/j.apm.2014.09.028
7. **Amiraliyev G.M., Cimen E., Amirali I., Cakir M.** High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations // J. Comput. Appl. Math. 2017. Vol. 321. P. 1–7. doi: 10.1016/j.cam.2017.02.017

8. **Wang W., Rao W., Zhong P.** A posteriori error analysis for Crank-Nicolson-Galerkin type methods for reaction-diffusion equations with delay // SIAM J. Sci. Comput. 2018. Vol. 40. P. A1095–A1120. doi: 10.1137/17M1143514
9. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. **Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
11. **Qian L.Z., Gu H.B.** High order compact scheme combined with extrapolation technique for solving convection-diffusion equations // J. Shandong Univ. Nat. Sci. 2003. Vol. 46, no. 12. P. 39–43.
12. **Zhang Q., Zhang C.** A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations // Appl. Math. Letters. 2013. Vol. 26, no. 25. P. 306–312. doi: 10.1016/j.aml.2012.09.015
13. **Zhang C., Tan Z.** Linearized compact difference methods combined with Richardson extrapolation for nonlinear delay Sobolev equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. Vol. 1. Article no. 105461. doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105461
14. **Deng D., Chen J.** Explicit Richardson extrapolation methods and their analyses for solving two-dimensional nonlinear wave equation with delays // Networks and Heterogeneous Media. 2023. Vol. 18, no. 1. P. 412–443. doi: 10.3934/nhm.2023017
15. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.
16. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 426 с.
17. Программы для решения уравнений в частных производных с запаздыванием [e-resource]. 2023. URL: https://github.com/PDDEsoft/Parabolic .

Поступила 14.03.2023
После доработки 10.04.2023
Принята к публикации 17.04.2023

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Ложников Андрей Борисович
канд. физ.-мат. наук, доцент
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ablozhnikov@yandex.ru

REFERENCES

1. Wu J. *Theory and application of partial functional differential equations*, NY, Springer-Verlag, 1996, 432 p. doi: 10.1007/978-1-4612-4050-1
2. Kamont Z., Kropielnicka K. Implicit difference methods for evolution functional differential equations. *Numer. Anal. Appl.*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 294–308. doi: 10.1134/S1995423911040033
3. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, no. 1, pp. S137–S148. doi: 10.1134/S0081543811090100
4. Pimenov V.G. *Raznostnye metody resheniya uravnenii v chastnych proizvodnykh s nasledstvennost'u* [Difference methods of solving partial differential equations with heredity]. Yekaterinburg, Ural State Univ. publ., 2014, 134 p. ISBN: 978-5-7996-1364-8.
5. Sun Z., Zhang Z. A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differetial equations. *Appl. Math. Model.*, 2013, vol. 37, no. 3, pp. 742–752. doi: 10.1016/j.apm.2012.02.036

6. Li D., Zhang C., Wen J. A note on compact finite difference method for reaction-diffusion equations with delay. *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 5–6, pp. 1749–1754. doi: 10.1016/j.apm.2014.09.028
7. Amiraliyev G.M., Cimen E., Amirali I., Cakir M. High-order finite difference technique for delay pseudo-parabolic equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, vol. 321, pp. 1–7. doi: 10.1016/j.cam.2017.02.017
8. Wang W., Rao W., Zhong P. A posteriori error analysis for Crank-Nicolson-Galerkin type methods for reaction-diffusion equations with delay. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2018, vol. 40, no. 2, pp. A1095–A1120. doi: 10.1137/17M1143514
9. Marchuk G.I., Shaidurov V.V. *Povyshenie tochnosti reshenii raznostnykh skhem* [Improving the accuracy of finite difference schemes] Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p.
10. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1987, 482 p. doi: 10.1007/978-3-662-12607-3 Translated to Russian under the title *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. Nezhestkie zadachi*, Moscow, Mir Publ., 1990, 510 p. ISBN: 5-03-001179-X.
11. Qian L.Z., Gu H.B. High order compact scheme combined with extrapolation technique for solving convection-diffusion equations. *J. Shandong Univ. Nat. Sci.*, 2011, vol. 46, no. 12, pp. 39-43.
12. Zhang Q., Zhang C. A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations. *Appl. Math. Letters*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 306–312. doi: 10.1016/j.aml.2012.09.015
13. Zhang C., Tan Z. Linearized compact difference methods combined with Richardson extrapolation for nonlinear delay Sobolev equations. *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.*, 2020, vol. 91, article no. 105461. doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105461
14. Deng D., Chen J. Explicit Richardson extrapolation methods and their analyses for solving two-dimensional nonlinear wave equation with delays. *Networks and Heterogeneous Media*, 2023, vol. 18, no. 1, pp. 412–443. doi: 10.3934/nhm.2023017
15. Kim A.V., Pimenov V.G. *i-gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [*i*-smooth analysis and numerical methods of solving functional-differential equations], Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2004, 256 p.
16. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal control*, N.Y., Springer, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1. Original Russian text was published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V., *Optimal'noe upravlenie*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 426 p.
17. Programs for Solving Partial Differential Equations with Delay [e-resource]. 2023. Available on: https://github.com/PDDEsoft/Parabolic .

Received March 14, 2023
Revised April 10, 2023
Accepted April 17, 2023

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00075).

Vladimir Germanovich Pimenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru .

Andrey Borisovich Lozhnikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ablozhnikov@yandex.ru .

Cite this article as: V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov. Richardson method for a diffusion equation with functional delay. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 133–144.