ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.958, 533

ПРОСТЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Р. Ф. Никонорова

Рассматривается система уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа. Уравнения допускают группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли. Из оптимальной системы подалгебр рассматриваются 4-мерные подалгебры, содержащие проективный оператор. Вычислены инварианты базисных операторов. Получено 8 простых инвариантных решений ранга 0. Из них четыре физических решения задают движение газа с линейным полем скоростей и одно физическое решение с линейной зависимостью компонент вектора скорости от двух пространственных координат. Все эти решения с переменной энтропией, кроме одного. Для изоэнтропического решения построено движение частиц газа в целом. Все полученные решения имеют особенность плотности на постоянной или двигающейся плоскости: граница с вакуумом или граница с твердой стенкой.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, проективный оператор, инвариантное решение.

R. F. Nikonorova. Simple invariant solutions of the dynamic equation for a monatomic gas.

We consider a system of gas dynamics equations with the state equation of a monatomic gas. The equations admit a group of transformations with a 14-dimensional Lie algebra. We consider 4-dimensional subalgebras containing the projective operator from the optimal system of subalgebras. The invariants of the basis operators are computed. Eight simple invariant solutions of rank 0 are obtained. Of these, four physical solutions specify a gas motion with a linear velocity field and one physical solution specifies a motion with a linear dependence of components of the velocity vector on two space coordinates. All these solutions except one have variable entropy. The motion of gas particles as a whole is constructed for the isentropic solution. The solutions obtained have a density singularity on a constant or moving plane, which is a boundary with vacuum or a wall.

Keywords: gas dynamics equations, projective operator, invariant solution.

MSC: 76N15, 35B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-115-132

Введение

Система дифференциальных уравнений механики всегда допускает достаточно широкую группу преобразований, оставляющих систему инвариантной. Исследование системы дифференциальных уравнений с точки зрения допускаемой группы преобразований проводится в рамках группового анализа дифференциальных уравнений. Групповой анализ включает в себя следующие задачи: вычисление группы преобразований, допускаемой системой, и соотвествующей алгебры Ли операторов; построение оптимальной системы неподобных подалгебр этой алгебры Ли; классификация подмоделей (редукций системы к меньшему числу переменных), построенных по подалгебрам, и др. Для подалгебр малой размерности можно определить инвариантную подмодель, когда из функционально независимых точечных (не зависящих от производных) инвариантов подалгебры определяются все исходные функции. Если при этом у подалгебры нет инвариантов, зависящих только от независимых переменных, то получается инвариантная подмодель ранга 0.

Для уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния в работе [1] рассматривались решения инвариантных подмоделей ранга 0, порожденных четырехмерными подалебрами. В работе перечислены все инвариантные решения ранга 0 (называемые простыми решениями), не относящиеся к специальным формам движения газа. Приведены примеры и описано явление коллапса, ранее изучавшееся для барохронных движений. В работе [2] построены инвариантные решения ранга 0 на четырехмерных подалгебрах, допускаемых уравнениями динамики двухфазной среды. Уравнения динамики одноатомного газа в двумерном случае рассматривались в работах [3; 4], где исследованы инвариантные решения ранга 0 (для трехмерных подалгебр). Для трехмерных уравнений динамики одноатомного газа построена оптимальная система неподобных подалгебр в работе [5]. В работе [6] из этой оптимальной системы выбраны подалгебры, содержащие проективный оператор (специфика допускаемой алгебры Ли) и не содержащие оператор растяжения по термодинамическим параметрам газа (центр допускаемой алгебры Ли), и построен граф вложенных подалгебр. Для подалгебр размерностей 1–3 работы [6] (после добавления центра) вычислены точечные инварианты и построена классификация подмоделей [7; 8].

В данной работе автором рассмотрены четырехмерные подалгебры работы [6] без центра, по ним восстановлены подалгебры с центром, получен и согласован с работой [5] список четырехмерных подалгебр, для каждой подалгебры вычислены точечные инварианты, построены простые инвариантные решения, некоторые полученные физические решения исследованы. Одно полученное решение имеет линейную зависимость компонент вектора скорости (и термодинамических функций) от двух пространственных координат. Решения такого типа рассматривались в работе [9]. Остальные полученные решения имеют линейный профиль скорости. Такие классы решений хорошо известны и изучались, например, в работе [10].

1. Постановка задачи

Уравнения газовой динамики (УГД) с уравнением состояния одноатомного газа имеют вид [11]

$$\rho\, D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad DS = 0, \quad S = p\rho^{-5/3}, \tag{1.1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — оператор градиента в декартовой системе координат, $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, $S \neq 0$ — функция энтропии. Газодинамические функции $\vec{u}, \rho, p, S$ зависят от времени t и декартовых координат x, y, z. Температура вычисляется по формуле $RT = p\rho^{-1}$, R — газовая постоянная.

Система (1.1) допускает группу преобразований с 14-мерной алгеброй Ли операторов. В качестве базисных операторов алгебры L_{14} в декартовой системе координат выбраны [5]

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z \text{ (переносы по пространству)};$$

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w \text{ (галилеевы переносы)};$$

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$

$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u \text{ (вращения)};$$

$$X_{10} = \partial_t \text{ (перенос по времени)};$$

$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \text{ (равномерное растяжение)};$$

$$X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + (z - tw)\partial_w$$

$$- 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p \text{ (проективный оператор)};$$

$$X_{13} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p, \quad X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p - \frac{2}{3}S\partial_S \text{ (растяжения)}.$$

Характерная особенность этой алгебры заключается в том, что она содержит проективный оператор X_{12}, допускаемый уравнениями газовой динамики только в случае уравнения состояния одноатомного газа. Остальные операторы допускаются в случае политропного газа. В отличие от остальных операторов X_{12} имеет квадратичные коэффициенты. Оператор X_{14} является центром допускаемой алгебры (коммутирует с остальными операторами).

В работе [5] приведена таблица коммутаторов и внутренние автоморфизмы алгебры Ли, а также оптимальная система неподобных подалгебр, содержащая 1826 представителей и записанная в компактном виде. Там представлены 1247 подалгебры, содержащие оператор растяжения по термодинамическим переменным X_{14}. Среди них звездочкой отмечены 579 подалгебры, из которых отбрасыванием первого записанного оператора (содержащего X_{14}) получаются подалгебры, не содержащие оператор X_{14}. Ввиду большого общего числа подалгебр в работе [6] из этой системы были выделены только подалгебры, содержащие проективный оператор X_{12} и не содержащие оператор X_{14}, и был построен граф всех вложенных подалгебр.

Построение оптимальной системы имеет некоторый произвол. У разных авторов она может быть представлена разными способами (выбор представителя из класса подобных подалгебр неоднозначен, подалгебры могут быть объединены в семейства подалгебр с параметром или разъединены по тем или иным соображениям, и др.). Так, система в работе [5] построена с учетом требования нормализованности, что позволяет строить иерахию подмоделей по нормализаторам. Система в работе [6] предполагает построение иерархии подмоделей по графу вложенных подалгебр [12].

В данной работе рассмотрены четырехмерные подалгебры работы [6]. Подалгебры, содержащие оператор X_{14} восстановлены по подалгебрам из работы [6] двумя способами, описанными там же. Они основаны на проверке того факта, является ли вложенная трехмерная подалгебра с оператором X_{12} (I способ) или без него (II способ) идеалом в четырехмерной подалгебре. Первым способом X_{14} добавляется к оператору, не содержащему X_{12}. Вторым способом X_{14} добавляется к оператору с X_{12}. Полученные подалгебры имеют те же номера, что и подалгебры работы [6], по которым они построены. Если при этом подалгебра построена первым способом, ее номер отмечен символом *. Для некоторых подалгебр без центра из работы [6] получены подалгебры с центром обоих типов (одноименные подалгебры). Подалгебры, у которых оператор X_{14} является одним из базисных операторов, не рассмотрены. Таким образом, получен список четырехмерных подалгебр, сгруппированный по подалгебрам без центра, далее он согласован с работой [5].

2. Примеры восстановления подалгебр с центром

Далее вместо оператора X_k указан только его номер k. Для удобства некоторые константы (параметры подалгебр) переобозначены. Приведены некоторые примеры для согласования с работами [5; 6].

1) В подалгебру 4.4 работы [6] с базисными операторами $(a2 + b3 + 6, -b2 + c3 + 5, 10 + 12, 11 - 13, ac + b^2 + 1 = 0)$ вкладывается только одна трехмерная подалгебра *с проективным оператором* $(a2 + b3 + 6, -b2 + c3 + 5, 10 + 12 + d(11 - 13), ac + b^2 + 1 = 0)$.

I способ. Подалгебра $(a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12+d(11-13))$ вложена в подалгебру 4.4 $(a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12, 11-13) \sim (a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12+d(11-13), 11-13)$. Вычисляя коммутаторы, получаем, что эта подалгебра является идеалом в подалгебре 4.4. Значит, X_{14} можно добавить к четвертому базисному оператору, не содержащему X_{12}, и получится подалгебра 4.4*$(a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12+d(11-13), 11-13+f14, ac+b^2+1 = 0)$.

II способ. Подпространство $(a2 + b3 + 6, -b2 + c3 + 5, 11 - 13, ac + b^2 + 1 = 0)$ есть идеал в подалгебре 4.4. Поэтому X_{14} можно добавить к базисному оператору, содержащему X_{12}, и получится подалгебра 4.4 $(a2 + b3 + 6, -b2 + c3 + 5, 10 + 12 + f14, 11 - 13, ac + b^2 + 1 = 0)$.

2) В подалгебру 4.9 работы [6] с базисными операторами $(2 + 6, -3 + 5, 7 + a(11 - 13), 10 + 12 + b(11 - 13))$ вкладываются две трехмерные подалгебры из работы [6]: 3.7 (при $a = 1$) с операторами $(a2 + 6, -3 + a5, 10 + 12 + b(11 - 13))$ и 3.4 $(2 + 6, -3 + 5, 7 + a(10 + 12) + b(11 - 13))$.

I способ. Подалгебру 3.4 возьмем в виде $(2 + 6, -3 + 5, c7 + 10 + 12 + (b + ac)(11 - 13), c \neq 0)$, она вложена в подалгебру 4.9 $(2+6, -3+5, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)) \sim (2+6, -3+5, c7+10+12+(b+ac)(11-13), 7+a(11-13))$. Вычисляя коммутаторы, получаем, что подалгебра 3.4

есть идеал в 4.9. Значит, существует подалгебра $(2+6, -3+5, c7+10+12+(b+ac)(11-13), 7+a(11-13)+f14, c\neq 0)$.

Подалгебра 3.7 при $a=1$ $(2+6, -3+5, 10+12+b(11-13))$ есть идеал для подалгебры 4.9 $(2+6, -3+5, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13))$. Поэтому существует подалгебра $(2+6, -3+5, 7+a(11-13)+f14, 10+12+b(11-13))$.

Объединяя полученные выше две подалгебры с центром, получим подалгебру 4.9*$(2+6, -3+5, c7+10+12+(b+ac)(11-13), 7+a(11-13)+f14)$.

II способ. Подпространство $(2+6, -3+5, 7+a(11-13))$ является идеалом в 4.9. Значит, существует подалгебра 4.9 $(2+6, -3+5, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)+f14)$.

3) Подалгебра 4.85 работы [5] с базисными операторами $(A2+B3+14, 2+6, -3+5, 7-10-12, A^2+B^2\neq 0)$ после отбрасывания оператора X_{14} дает подалгебру $(A2+B3, 2+6, -3+5, 7-10-12, A^2+B^2\neq 0)$. Рассмотрим более широкую подалгебру $4.13^0(A2+B3, 2+6, -3+5, 7-10-12+b(11-13), A^2+B^2\neq 0)$.

I способ. В подалгебру 4.13^0 вложена одна трехмерная подалгебра $3.4(2+6, -3+5, 7+a(10+12)+b(11-13))$ при $a=-1$. Вычисляя коммутаторы, получаем, что подалгебра 3.4 (точнее двумерная подалгебра $(2+6, -3+5)$) является идеалом в 4.13^0 при $b=0$. Поэтому существует подалгебра 4.13*$(A2+B3+c14, 2+6, -3+5, 7-10-12, A^2+B^2\neq 0)$.

II способ. Подпространство $(A2+B3, 2+6, -3+5)$ — идеал в 4.13^0. Значит, существует подалгебра 4.13 $(A2+B3, 2+6, -3+5, 7-10-12+b(11-13)+c14)$. Можно считать $B=0$ (линейная замена базиса и применение внутреннего автоморфизма).

4) Подалгебра 4.204 работы [5] с базисными операторами $(A5+B(7+10+12)+14, 2, 6, 3+5, AB\neq 0)$ и подалгебра 4.205 работы [5] с базисными операторами $(A(7+10+12)+14, 2, 6, 3+5, A\neq 0)$ после объединения и отбрасывания оператора X_{14} дают подалгебру $4.14^0(A5+7+10+12, 2, 6, 3+5)$.

I способ. Ни одна трехмерная подалгебра работы [6] (с проективным оператором) не вкладывается в 4.14^0.

II способ. Подпространство $(2, 6, 3+5)$ является идеалом в 4.14^0. Значит, существует подалгебра 4.14 $(A5+7+10+12+c14, 2, 6, 3+5)\sim(A5-7+10+12+c14, 2, 6, -3+5)$.

5) Подалгебра 4.208 работы [5] с базисными операторами $(A(7+10+12)+B(11-13)+14, 3, 5, -2+6, B\neq 0)$ после применения внутреннего автоморфизма (вращение вокруг оси Ox на 90°) и отбрасывания оператора X_{14} дает подалгебру $(7+10+12+B(11-13), 2, 6, 3+5, B\neq 0)$.

I способ. Ни одна трехмерная подалгебра работы [6] (с проективным оператором) не вкладывается в эту подалгебру.

II способ. Подпространство $(2, 6, 3+5)$ — идеал в этой подалгебре. Поэтому существует подалгебра $(7+10+12+B(11-13)+c14, 2, 6, 3+5)\sim(7-10-12+B(11-13)+c14, 2, 6, -3+5)$, которая совпадает с 4.13.

3. Точечные инварианты

Для каждой восстановленной подалгебры с центром вычислены точечные инварианты (функции, которые зануляются под действием операторов подалгебры). Для вычисления инвариантов четырехмерных подалгебр были использованы инварианты вложенных трехмерных подалгебр (последовательное вычисление инвариантов для получения согласованных инвариантов [12]). Все результаты вычислений сведены в структуру подразд. 3.1. В ней слева указаны номера подалгебр; справа для каждой подалгебры указаны:

1) базисные операторы подалгебры (“Базис”);

2) система координат, в которой производились вычисления (“СК”), причем D — декартова, C — цилиндрическая, S — сферическая;

3) инварианты подалгебры (“Инв” или “Инв I”, “Инв II”). Для одноименных подалгебр часть

инвариантов совпадает (обозначены “Инв I”). Символ “$\downarrow$” в строке “Инв I” заменяет аналогичные инварианты строки “Инв I” вышестоящей одноименной подалгебры;

4) минимальный дефект δ и ранг σ возможного решения, определяемые по набору инвариантов. Ранг определяется числом инвариантов, зависящих только от независимых переменных, а дефект — числом “лишних” газодинамических функций, неопределяемых из выражений для инвариантов.

В цилиндрической системе координат $x = x, y = r\cos\theta, z = r\sin\theta, u = U, v = V\cos\theta - W\sin\theta, w = V\sin\theta + W\cos\theta$ оператор X_{12} принимает вид

$$X_{12} = t^2\partial_t + tx\partial_x + tr\partial_r + (x - tU)\partial_U + (r - tV)\partial_V - tW\partial_W - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p,$$

другие операторы приведены, например, в работе [13].

В сферической системе координат $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta,\ u = (U\sin\theta + V\cos\theta)\cos\phi - W\sin\phi, v = (U\sin\theta + V\cos\theta)\sin\phi + W\cos\phi, w = U\cos\theta - V\sin\theta$ оператор X_{12} принимает вид

$$X_{12} = t^2\partial_t + tr\partial_r + (r - tU)\partial_U - tV\partial_V - tW\partial_W - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p,$$

другие операторы можно посмотреть в [13].

Вместо операторов записаны только их номера. Для подалгебр 4.9, 4.9* при вычислении инвариантов использовалась замена $v = q\cos\vartheta, w = q\sin\vartheta$. Также введено следующее обозначение: $\tau = \arctan t$.

3.1. Инварианты четырехмерных подалгебр

4.1*

Базис: $10, 12, 11 + 13, 13 + a14$
СК: C
Инв: $\theta, \dfrac{x}{r}, -\dfrac{U}{W} + \dfrac{xV}{rW}, \dfrac{r^a\rho}{|W|^{3-a}}, \dfrac{r^a p}{|W|^{5-a}}$
(δ, σ): $2, 2$

4.2*

Базис: $10, 12, 11 + 13, 7 + b13 + c14$
СК: C
Инв: $\dfrac{x}{r}, (-rU + xV)e^{b\theta}, rWe^{b\theta}, |x|^3\rho e^{(3b-c)\theta}, |x|^5 p e^{(5b-c)\theta}$
(δ, σ): $1, 1$

4.3

Базис: $7, 8, 9, 10 + 12 + a(11 - 13) + b14$
СК: S
Инв: $\dfrac{re^{-a\tau}}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{U}{r}(1+t^2) - t, \dfrac{\sqrt{V^2+W^2}}{r}(1+t^2),\ \rho(1+t^2)^{3/2}e^{-(b+3a)\tau},$
$p(1+t^2)^{5/2}e^{-(b+5a)\tau}$
(δ, σ): $1, 1$

4.4

Базис: $a2 + b3 + 6, -b2 + c3 + 5, 10 + 12 + f14, 11 - 13, ac + b^2 + 1 = 0$
СК: D
Инв I: $\dfrac{u}{x}(1+t^2) - t, \dfrac{v}{x}(1+t^2) - (t+b)\dfrac{y}{x} + a\dfrac{z}{x}, \dfrac{w}{x}(1+t^2) + (b-t)\dfrac{z}{x} + c\dfrac{y}{x}, \dfrac{p(1+t^2)^2}{\rho x^2}$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|x|^3}(1+t^2)^3 e^{-f\tau}\ \left(\text{или}\ \dfrac{p}{|x|^5}(1+t^2)^5 e^{-f\tau}\right)$
(δ, σ): $0, 0$

4.4*

Базис: $a2+b3+6, -b2+c3+5, 10+12+d(11-13), 11-13+f14,$ $ac+b^2+1=0$
СК: D
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|x|^{3+f}}(1+t^2)^{3+f/2}e^{fd\tau}\left(\text{или } \dfrac{p}{|x|^{5+f}}(1+t^2)^{5+f/2}e^{fd\tau}\right)$
(δ,σ) : 0, 0

4.5

Базис: $1, 4, 10+12+c14, 11-13$
СК: D
Инв I: $\dfrac{y}{z}, \dfrac{v}{y}(1+t^2)-t, \dfrac{w}{z}(1+t^2)-t, \dfrac{p(1+t^2)^2}{\rho y^2}$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|y|^3}(1+t^2)^3e^{-c\tau}\left(\text{или } \dfrac{p}{|y|^5}(1+t^2)^5e^{-c\tau}\right)$
(δ,σ) : 1, 1

4.5*

Базис: $1, 4, 10+12+b(11-13), 11-13+c14$
СК: D
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|y|^{3+c}}(1+t^2)^{3+c/2}e^{cb\tau}\left(\text{или } \dfrac{p}{|y|^{5+c}}(1+t^2)^{5+c/2}e^{cb\tau}\right)$
(δ,σ) : 1, 1

4.6

Базис: $2+6, -3+5, 7+a(10+12)+c14, 11-13, a\neq 0$
СК: D
Инв I: $\dfrac{u}{x}(1+t^2)-t, \cos\left(\dfrac{\tau}{a}\right)\left(\dfrac{v}{x}(1+t^2)+\dfrac{z}{x}-t\dfrac{y}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{\tau}{a}\right)\left(\dfrac{w}{x}(1+t^2)-\dfrac{y}{x}-t\dfrac{z}{x}\right),$
$\sin\left(\dfrac{\tau}{a}\right)\left(\dfrac{v}{x}(1+t^2)+\dfrac{z}{x}-t\dfrac{y}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{\tau}{a}\right)\left(\dfrac{w}{x}(1+t^2)-\dfrac{y}{x}-t\dfrac{z}{x}\right), \dfrac{p(1+t^2)^2}{\rho x^2}$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|x|^3}(1+t^2)^3e^{(-c/a)\tau}\left(\text{или } \dfrac{p}{|x|^5}(1+t^2)^5e^{(-c/a)\tau}\right)$
(δ,σ) : 0, 0

4.6*

Базис: $2+6, -3+5, 7+a(10+12)+b(11-13), 11-13+c14, a\neq 0$
СК: D
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|x|^{3+c}}(1+t^2)^{3+c/2}e^{(bc/a)\tau}\left(\text{или } \dfrac{p}{|x|^{5+c}}(1+t^2)^{5+c/2}e^{(bc/a)\tau}\right)$
(δ,σ) : 0, 0

4.7

Базис: $a4+2+6, a1-3+5, (2)7+10+12+c14, 11-13$
СК: D
Инв I: $s^{-1}(u(1+t^2)^2-tx(1+t^2)-2atz-ay(1-t^2)),$
$s^{-1}((v(1-t^2)+2tw)(1+t^2)+z(1-3t^2)-ty(3-t^2)),$
$s^{-1}((2tv-w(1-t^2))(1+t^2)+zt(3-t^2)+y(1-3t^2)),$
$\dfrac{p(1+t^2)^4}{\rho s^2}$, где $s=x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|s|^3}(1+t^2)^6e^{-c\tau}\left(\text{или } \dfrac{p}{|s|^5}(1+t^2)^{10}e^{-c\tau}\right)$
(δ,σ) : 0, 0

4.7*

Базис: $a4+2+6, a1-3+5, (2)7+10+12+b(11-13), 11-13+c14$
СК: D
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|s|^{3+c}}(1+t^2)^{6+(3/2)c}e^{bc\tau}\Big($или $\dfrac{p}{|s|^{5+c}}(1+t^2)^{10+(3/2)c}e^{bc\tau}\Big)$
(δ,σ) : $0, 0$

4.8

Базис: $1, 4, 7+a(10+12)+c14, 11-13,\ a\neq 0$
СК: C
Инв I: $a\theta-\tau, \dfrac{V}{r}(1+t^2)-t, \dfrac{W}{r}(1+t^2),\ \dfrac{p(1+t^2)^2}{\rho r^2}$
Инв II: $\dfrac{\rho}{r^3}(1+t^2)^3e^{(-c/a)\tau}\Big($или $\dfrac{p}{r^5}(1+t^2)^5e^{(-c/a)\tau}\Big)$
(δ,σ) : $1, 1$

4.8*

Базис: $1, 4, 7+a(10+12)+b(11-13), 11-13+c14, a\neq 0$
СК: C
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\dfrac{\rho}{r^{3+c}}(1+t^2)^{3+c/2}e^{(bc/a)\tau}\Big($или $\dfrac{p}{r^{5+c}}(1+t^2)^{5+c/2}e^{(bc/a)\tau}\Big)$
(δ,σ) : $1, 1$

4.9

Базис: $2+6, -3+5, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)+f14$
СК: D
Инв I: $aA+b\tau-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{u}{x}(1+t^2)-t, \dfrac{1+t^2}{x}\sqrt{\Big(v+\dfrac{z-yt}{1+t^2}\Big)^2+\Big(w-\dfrac{y+zt}{1+t^2}\Big)^2},$
$\dfrac{p(1+t^2)^2}{\rho x^2}$, где $A=\arctan\dfrac{w(1+t^2)-(y+zt)}{v(1+t^2)+z-yt}$
Инв II: $\dfrac{\rho}{|x|^3}(1+t^2)^3e^{-f\tau}\Big($или $\dfrac{p}{|x|^5}(1+t^2)^5e^{-f\tau}\Big)$
(δ,σ) : при $a\neq 0$ $0, 0$
при $a=0$ $1, 1$

4.9*

Базис: $2+6, -3+5, c7+10+12+(b+ac)(11-13), 7+a(11-13)+f14$
СК: D
Инв I : $\downarrow$
Инв II: при $a\neq 0$ $\dfrac{\rho(1+t^2)^{3+f/(2a)}}{|x|^{3+f/a}}\,e^{\frac{(b+ac)f}{a}\tau}\Big($или $\dfrac{p(1+t^2)^{5+f/(2a)}}{|x|^{5+f/a}}\,e^{\frac{(b+ac)f}{a}\tau}\Big)$
при $a=0$ $\dfrac{\rho}{|x|^3}(1+t^2)^3e^{f(c\tau-A)}\Big($или $\dfrac{p}{|x|^5}(1+t^2)^5e^{f(c\tau-A)}\Big)$
(δ,σ) : при $a\neq 0$ $0, 0$
при $a=0$ $1, 1$

4.10

Базис: $1, 4, 7+a(11-13), 10+12+b(11-13)+d14$
СК: C
Инв I: $\dfrac{r}{\sqrt{1+t^2}}e^{-a\theta-b\tau}, \dfrac{V}{r}(1+t^2)-t, \dfrac{W}{r}(1+t^2), \dfrac{p(1+t^2)^2}{\rho r^2}$
Инв II: $\dfrac{\rho}{r^3}(1+t^2)^3e^{-bd\tau}\Big($или $\dfrac{p}{r^5}(1+t^2)^5e^{-bd\tau}\Big)$
(δ,σ) : $1, 1$

4.10*

Базис: $1, 4, c7 + 10 + 12 + (b + ac)(11 - 13), 7 + a(11 - 13) + d14$
СК: C
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\dfrac{\rho}{r^3}(1+t^2)^3 e^{cd\tau - d\theta}$ $\Big($или $\dfrac{p}{r^5}(1+t^2)^5 e^{cd\tau - d\theta}\Big)$
(δ, σ) : 1, 1

4.11

Базис: $1, 4, -3 + 5, 7 + 10 + 12 + a(11 - 13) + b14$
СК: C
Инв : $\dfrac{r}{\sqrt{1+t^2}}\cos(\theta - \tau)e^{-a\tau}, \dfrac{V}{r}(1+t^2) - t - \Big(\dfrac{W}{r}(1+t^2) - 1\Big)\tan(\theta - \tau),$
$\Big(\dfrac{V}{r}(1+t^2) - t\Big)\tan(\theta - \tau) + \dfrac{W}{r}(1+t^2), \rho(1+t^2)^{3/2}e^{-(3a+b)\tau},$
$p(1+t^2)^{5/2}e^{-(5a+b)\tau}$
(δ, σ) : 1, 1

4.12

Базис: $1, 4, -3 + 5, a(2 + 6) + 7 + 10 + 12 + c14$
СК: D
Инв I: $-a\tau + \dfrac{y + tz}{1+t^2}, v + wt + \dfrac{z(1-t^2) - 2ty}{1+t^2}, w - vt + \dfrac{y(t^2-1) - 2tz}{1+t^2}, \dfrac{p(1+t^2)}{\rho}$
Инв II: $\rho(1+t^2)^{3/2}e^{-c\tau}$ $\big($или $p(1+t^2)^{5/2}e^{-c\tau}\big)$
(δ, σ) : 1, 1

4.12*

Базис: $1, 4, a(2 + 6) + b(-3 + 5) + 7 + 10 + 12, -3 + 5 + c14$
СК: D
Инв I: $\downarrow$
Инв II: $\rho(1+t^2)^{3/2}e^{c\left(b\tau + \frac{z-ty}{1+t^2}\right)}$ $\Big($или $p(1+t^2)^{5/2}e^{c\left(b\tau + \frac{z-ty}{1+t^2}\right)}\Big)$
(δ, σ) : 1, 1

4.13

Базис: $2, 6, -3 + 5, 7 - 10 - 12 + d(11 - 13) + c14$
СК: D
Инв I: $\dfrac{xe^{d\tau}}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{u}{x}(1+t^2) - t, \dfrac{p(1+t^2)e^{2d\tau}}{\rho}$
Инв II: $(v + z - tw)e^{d\tau}, \rho(1+t^2)^{3/2}e^{(3d+c)\tau}$ $\big($или $p(1+t^2)^{5/2}e^{(5d+c)\tau}\big)$
(δ, σ) : 1, 1

4.13*

Базис: $a2 + b3 + c14, 2 + 6, -3 + 5, 7 - 10 - 12, a^2 + b^2 \neq 0$
СК: D
Инв I: $\downarrow$ $\big($положить $d = 0\big)$
Инв II: при $b \neq 0$: $b(w - y + tv) + a(v + z - tw),\ \rho(1+t^2)^{3/2}e^{(-c/b)(v+z-tw)},$
$\big($или $p(1+t^2)^{5/2}e^{(-c/b)(v+z-tw)}\big)$
при $b = 0$: $v + z - tw, \rho(1+t^2)^{3/2}e^{(c/a)(w-y+tv)}$ $\big($или $p(1+t^2)^{5/2}e^{(c/a)(w-y+tv)}\big)$
(δ, σ) : 1, 1

4.14

Базис: $a5 - 7 + 10 + 12 + c14, 2, 6, -3 + 5$
СК: D
Инв: $\dfrac{x}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{u}{x}(1+t^2) - t, v + z - tw - a\tau, \rho(1+t^2)^{3/2}e^{-c\tau}, p(1+t^2)^{5/2}e^{-c\tau}$
(δ, σ) : 1, 1

3.2. Анализ инвариантов подалгебр

Из предыдущего подраздела следует

Утверждение 1. *Для одноименных подалгебр подразд.* (3.1)*, отличающихся только оператором* X_{14}*,* 4 *из* 5 *точечных инвариантов можно выбрать одинаковыми.*

Учитывая утверждение 1, группировка подалгебр по номерам подалгебр без центра оказалась удобной.

Из инвариантов подразд. 3.1 видно, что для минимального дефекта могут быть построены только регулярные частично инвариантные подмодели [14; 15]. В работе [16] для подалгебры 4.3 (при $a = b = 0$) из списка подразд. 3.1 с подалгеброй вращения исследовано частично инвариантное решение ранга один дефекта один (проективная подмодель вихря Овсянникова).

4. Простые инвариантные решения

Из списка подразд. 3.1 выбраны все подалгебры, для которых можно построить инвариантные подмодели ранга 0. Из инвариантов подалгебры выражаются все газодинамические функции, сами инварианты считаются постоянными величинами, что дает представление инвариантного решения ранга 0. После подстановки этого представления решения в систему (1.1) получается система алгебраических уравнений (соотношения на константы).

Утверждение 2. *Инвариантные решения уравнений динамики одноатомного газа* (1.1) *на четырехмерных подалгебрах, содержащих оператор* X_{12} *и не содержащих оператор* X_{14}*, будут задавать изоэнтропический вид движения газа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле для таких подалгебр инвариантность выражений, содержащих ρ и p, определяется операторами X_{12} и X_{13}, но какие бы их комбинации не содержала подалгебра, выражение $p\rho^{-5/3}$ будет оставаться инвариантным, т. е. $S = p\rho^{-5/3} = S_0$.

1) Подалгебра 4.4

Представление инвариантного решения ранга 0 определяется из соответствующей строки подразд. 3.1:

$$\begin{gathered} u = \frac{u_0 + t}{1 + t^2}x, \quad v = \frac{v_0 x + (b + t)y - az}{1 + t^2}, \quad w = \frac{w_0 x + (t - b)z - cy}{1 + t^2}, \\ \rho = \frac{\rho_0 |x|^3 e^{f\tau}}{(1 + t^2)^3}, \quad p = C_0 \rho \frac{x^2}{(1 + t^2)^2}\,(S = S_0 e^{(-2/3)f\tau}), \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $u_0,\ v_0,\ w_0,\ \rho_0,\ C_0 = \dfrac{p_0}{\rho_0},\ S_0 = p_0 \rho_0^{-5/3}$ — постоянные, $ac + b^2 + 1 = 0$.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$1 + u_0^2 + 5\rho_0^{-1} p_0 = 0, \quad bv_0 + v_0 u_0 - aw_0 = 0,$$

$$cv_0 - w_0 u_0 + bw_0 = 0, \quad \rho_0(f + 4u_0) = 0, \quad fS_0 = 0.$$

Получим решение при $f = 0$

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \rho_0 = -5p_0, \tag{4.2}$$

которое имеет отрицательное давление, и поэтому данное решение не физично. При $S_0 = 0$ действительных решений нет.

2) Подалгебра 4.4*

Представление инвариантного решения ранга 0 отличается от представления инвариантного решения (4.1) видом ρ:

$$\rho = \frac{\rho_0|x|^{3+f}e^{-df\tau}}{(1+t^2)^{3+f/2}}(S = S_0|x|^{(-2/3)f}(1+t^2)^{f/3}e^{(2/3)df\tau}),$$

где $\rho_0, S_0 = p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$1 + u_0^2 + (5+f)\rho_0^{-1}p_0 = 0, \quad bv_0 + v_0u_0 - aw_0 = 0, \quad cv_0 - w_0u_0 + bw_0 = 0,$$
$$\rho_0(-df + (4+f)u_0) = 0, \quad f(u_0 - d)S_0 = 0.$$

При $f = 0$ получим решение (4.2). При $f \neq 0$ получим решение

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \rho_0 = -(5+f)p_0, \quad d = 0, \tag{4.3}$$

которое имеет положительное давление при $f < -5$. Это решение при $b = 0, c = a^{-1}$ вкладывается в ранее найденное (вырожденное) решение для подмодели 3.7 ($a2+6, -3+a5, 10+12+b(11-13)$) при $b = 0$ работы [6]. Оно исследовано в работе [17].

Решение (4.3) дает решение УГД

$$\begin{gathered} u = \frac{tx}{1+t^2}, \quad v = \frac{(b+t)y - az}{1+t^2}, \quad w = \frac{(t-b)z - cy}{1+t^2}, \\ \rho = -(5+f)p_0\frac{|x|^{3+f}}{(1+t^2)^{3+f/2}}, \quad p = p_0\frac{|x|^{5+f}}{(1+t^2)^{5+f/2}}, \quad S = S_0|x|^{(-2/3)f}(1+t^2)^{f/3}; \end{gathered} \tag{4.4}$$

оно задает движение газа с линейным полем скоростей с особенностью

$$\rho \to \infty, \quad p \to \infty, \quad T = -\frac{1}{(5+f)R}\frac{x^2}{(1+t^2)^2} \to 0 \ \text{ при } \ x \to 0.$$

Это стенка, от которой отражаются частицы, двигающиеся из бесконечности и не попадающие на стенку. При $|t| \to \infty$ и конечном фиксированном x газ остывает $T \to 0$, а функции ρ и p в зависимости от f имеют предельные значения

$$\rho \to \begin{cases} \infty, & f < -6 \\ p_0|x|^{-3}, & f = -6 \\ 0, & -6 < f < -5 \end{cases} \qquad p \to \begin{cases} \infty, & f < -10 \\ p_0|x|^{-5}, & f = -10 \\ 0, & -10 < f < -5 \end{cases}$$

Движение газа вихревое $\vec{\omega} = \left(\dfrac{a-c}{1+t^2}; 0; 0\right)$ ($a \neq c$ из условия на параметры подалгебры). Траектории частиц одни и те же для всех значений f.

Для подалгебр 4.4 и 4.4* можно построить *частично инвариантное решение ранга* 0 *дефекта* 1. Представление решения для функций u, v, w, p имеет тот же вид, что и в (4.1), а $\rho(t, \vec{x})$ считается функцией общего вида. Оно дает решение

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad \rho = \rho_0|x|^{-(C_0^{-1}+2)}(1+t^2)^{\frac{1-C_0}{2C_0}}, \quad p = C_0\rho_0|x|^{-C_0^{-1}}(1+t^2)^{\frac{1-5C_0}{2C_0}}.$$

При $C_0 = -\dfrac{1}{5}$ имеем инвариантное решение (4.1), (4.2). Если положить $C_0 = -\dfrac{1}{5+f}$, то решение в точности совпадает с инвариантным решением (4.3), (4.4). Итак, частично инвариантное решение ранга 0 дефекта 1 редуцируется к инвариантному.

3) Подалгебра 4.6

Представление инвариантного решения ранга 0 определяется из соответствующей строки подразд. 3.1:

$$\begin{gathered} u=\frac{u_0+t}{1+t^2}x, \quad v=\left(v_0\cos\frac{\tau}{a}+w_0\sin\frac{\tau}{a}\right)\frac{x}{1+t^2}+\frac{ty-z}{1+t^2}, \\ w=\left(v_0\sin\frac{\tau}{a}-w_0\cos\frac{\tau}{a}\right)\frac{x}{1+t^2}+\frac{y+tz}{1+t^2}, \\ \rho=\frac{\rho_0|x|^3e^{(c/a)\tau}}{(1+t^2)^3}, \quad p=C_0\rho\frac{x^2}{(1+t^2)^2}(S=S_0e^{(-2c/(3a))\tau}), \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $u_0, v_0,\ w_0,\ \rho_0,\ C_0=\dfrac{p_0}{\rho_0},\ S_0=p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$\begin{gathered} 1+u_0^2+5\rho_0^{-1}p_0=0, \quad v_0(1+a^{-1})-u_0w_0=0, \\ w_0(1+a^{-1})+u_0v_0=0, \quad \rho_0\left(4u_0+\frac{c}{a}\right)=0, \quad \frac{c}{a}S_0=0. \end{gathered}$$

Получим два решения при $c=0$:

$$u_0=0, \ \ v_0=0, \ \ w_0=0, \ \ \rho_0=-5p_0; \tag{4.6}$$

$$a=-1, \ \ u_0=0, \ \ \rho_0=-5p_0, \ \ v_0,w_0 \ \ — \text{ произвольные}, \tag{4.7}$$

они имеют отрицательное давление, и поэтому эти решения не физичны.

4) Подалгебра 4.6*

Представление инвариантного решения ранга 0 отличается от представления инвариантного решения (4.5) видом ρ:

$$\rho=\frac{\rho_0|x|^{3+c}e^{(-bc/a)\tau}}{(1+t^2)^{3+c/2}}\,(S=S_0|x|^{(-2/3)c}(1+t^2)^{c/3}e^{(2bc/(3a))\tau}),$$

где $\rho_0,\ S_0=p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$\begin{gathered} 1+u_0^2+(5+c)\rho_0^{-1}p_0=0, \quad v_0(1+a^{-1})-u_0w_0=0, \\ w_0(1+a^{-1})+u_0v_0=0, \quad \rho_0\Big((4+c)u_0-\frac{bc}{a}\Big)=0, \quad c\Big(\frac{b}{a}-u_0\Big)S_0=0. \end{gathered}$$

При $c=0$ получим решения (4.6) и (4.7). При $c\neq 0$ получим два решения:

$$b=0, \ \ u_0=0, \ \ v_0=0, \ \ w_0=0, \ \ \rho_0=-(5+c)p_0; \tag{4.8}$$

$$a=-1, \ \ b=0, \ \ u_0=0, \ \ \rho_0=-(5+c)p_0, \ \ v_0,w_0 — \text{ произвольные}, \tag{4.9}$$

которые имеют положительное давление при $c<-5$.

Решения (4.8) и (4.9) дают решения УГД

$$\begin{gathered} u=\frac{tx}{1+t^2}, \quad v=\frac{ty-z}{1+t^2}, \quad w=\frac{y+tz}{1+t^2}, \\ \rho=-(5+c)p_0\frac{|x|^{3+c}}{(1+t^2)^{3+c/2}}, \quad p=p_0\frac{|x|^{5+c}}{(1+t^2)^{5+c/2}}, \quad S=S_0|x|^{(-2/3)c}(1+t^2)^{c/3}, \end{gathered} \tag{4.10}$$

и

$$\begin{gathered} u=\frac{tx}{1+t^2}, \quad v=\frac{(v_0-tw_0)x}{(1+t^2)^{3/2}}+\frac{ty-z}{1+t^2}, \quad w=-\frac{(tv_0+w_0)x}{(1+t^2)^{3/2}}+\frac{y+tz}{1+t^2}, \\ \rho=-(5+c)p_0\frac{|x|^{3+c}}{(1+t^2)^{3+c/2}}, \quad p=p_0\frac{|x|^{5+c}}{(1+t^2)^{5+c/2}}, \quad S=S_0|x|^{(-2/3)c}(1+t^2)^{c/3}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

соответственно.

Они задают вихревые движения газа с линейным полем скоростей:

$$\vec{\omega}=\Big(\frac{2}{1+t^2};0;0\Big) \ \text{ для (4.10) и } \ \vec{\omega}=\Big(\frac{2}{1+t^2};\frac{tv_0+w_0}{(1+t^2)^{3/2}};\frac{-tw_0+v_0}{(1+t^2)^{3/2}}\Big) \ \text{ для (4.11).}$$

Плотность и давление такие же, как и в решении (4.4).

5) Подалгебра 4.7

Представление инвариантного решения ранга 0 определяется из соответствующей строки подразд. 3.1:

$$\begin{gathered} u=\frac{su_0+(1-t^2)ay+2atz}{(1+t^2)^2}+\frac{tx}{1+t^2}, \quad v=\frac{s(v_0(1-t^2)+2tw_0)}{(1+t^2)^3}+\frac{ty-z}{1+t^2},\\ w=\frac{s(2tv_0-(1-t^2)w_0)}{(1+t^2)^3}+\frac{y+tz}{1+t^2}, \quad s=x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty,\\ \rho=\frac{\rho_0|s|^3e^{c\tau}}{(1+t^2)^6}, \quad p=C_0\rho\frac{s^2}{(1+t^2)^4}(S=S_0e^{(-2c/3)\tau}), \end{gathered} \tag{4.12}$$

где $u_0,v_0,w_0,\rho_0,\ C_0=\dfrac{p_0}{\rho_0},\ S_0=p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$av_0-au_0w_0+1+u_0^2+5\rho_0^{-1}p_0=0, \quad av_0w_0-u_0v_0-3w_0=0,$$

$$aw_0^2-u_0w_0+5a\rho_0^{-1}p_0+3v_0=0, \quad \rho_0(4aw_0-c-4u_0)=0, \quad cS_0=0.$$

Решения при $c=0$

$$u_0=0, \quad v_0=\frac{a}{3-a^2}, \quad w_0=0, \quad \rho_0=\frac{5(a^2-3)}{3}p_0, \tag{4.13}$$

имеет положительное давление при $a^2>3$.

Решение (4.13) дает решение УГД

$$\begin{gathered} u=\frac{tx}{1+t^2}+\frac{ay(1-t^2)+2atz}{(1+t^2)^2},\\ v=\frac{a}{3-a^2}\frac{(1-t^2)(x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty)}{(1+t^2)^3}+\frac{yt-z}{1+t^2},\\ w=\frac{a}{3-a^2}\frac{2t(x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty)}{(1+t^2)^3}+\frac{y+zt}{1+t^2},\\ \rho=\frac{5(a^2-3)}{3}p_0\frac{|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^3}{(1+t^2)^6},\\ p=p_0\frac{|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^5}{(1+t^2)^{10}}, \quad S=S_0; \end{gathered} \tag{4.14}$$

оно задает изоэнтропическое движение газа с линейным полем скоростей с особенностью на двигающейся плоскости $\pi(t)\colon x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty=0$ — граница с вакуумом. При этом $\pi(0)\colon x+az=0$, а $\pi(\pm\infty)\colon x-az=0$. При $t\to\infty$ газ растекается до вакуума $\rho,p\to 0$ и остывает, при этом температура

$$T=\frac{3}{5(a^2-3)R}\frac{|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^2}{(1+t^2)^4}\to 0.$$

6) Подалгебра 4.7*

Представление инвариантного решения ранга 0 отличается от представления инвариантного решения (4.12) видом ρ:

$$\rho=\frac{\rho_0|s|^{3+c}e^{-bc\tau}}{(1+t^2)^{6+(3/2)c}}(S=S_0|s|^{(-2/3)c}(1+t^2)^ce^{(2/3)cb\tau}),$$

где $\rho_0, S_0 = p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$av_0 - au_0w_0 + 1 + u_0^2 + (5+c)\rho_0^{-1}p_0 = 0, \quad av_0w_0 - u_0v_0 - 3w_0 = 0,$$

$$aw_0^2 - u_0w_0 + (5+c)a\rho_0^{-1}p_0 + 3v_0 = 0,$$

$$\rho_0(acw_0 + 4aw_0 + bc - cu_0 - 4u_0) = 0, \quad c(aw_0 + b - u_0)S_0 = 0.$$

При $c = 0$ получим решение (4.13). При $c \neq 0$ получим решение

$$b = 0, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = \frac{a}{3-a^2}, \quad w_0 = 0, \quad \rho_0 = \frac{(5+c)(a^2-3)}{3}p_0, \tag{4.15}$$

которое имеет положительное давление при $(a^2-3)(5+c) > 0$.

Решение (4.15) дает решение УГД, для которого u, v, w, как и в (4.14), а

$$\begin{gathered}\rho = \frac{(5+c)(a^2-3)}{3}p_0\frac{|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^{3+c}}{(1+t^2)^{6+(3/2)c}},\\ p = p_0\frac{|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^{5+c}}{(1+t^2)^{10+(3/2)c}},\\ S = S_0|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^{(-2/3)c}(1+t^2)^c;\end{gathered} \tag{4.16}$$

оно задает движение газа с линейным полем скоростей с особенностью на двигающейся плоскости $\pi(t)$: стенка (плоский сгусток) $\rho \to \infty$ (при $c < -3$) или граница с вакуумом $\rho \to 0$ (при $c > -3$). При $|t| \to \infty$ и конечных фиксированных x, y, z газ остывает

$$T = \frac{3}{(5+c)(a^2-3)R}\frac{|x(1+t^2)+a(1-t^2)z-2aty|^2}{(1+t^2)^4} \to 0,$$

а функции ρ и p в зависимости от c имеют предельные значения:

$$\rho \to \begin{cases}\infty, & c < -6\\ \dfrac{3-a^2}{3}p_0|x-az|^{-3}, & c = -6\\ 0, & c > -6,\ c \neq -5\end{cases} \qquad p \to \begin{cases}\infty, & c < -10\\ p_0|x-az|^{-5}, & c = -10\\ 0, & c > -10,\ c \neq -5\end{cases}$$

Движение частиц газа для решений (4.14) и (4.16) рассмотрено в разд. 5.

7) Подалгебра 4.9 ($a \neq 0$)

Представление инвариантного решения ранга 0 при $a \neq 0$ определяется из соответствующей строки подразд. 3.1:

$$\begin{gathered}u = \frac{u_0+t}{1+t^2}x, \quad v = \frac{q_0x}{1+t^2}\cos\Big(\frac{\vartheta_0 + \ln(x(1+t^2)^{-1/2}) - b\tau}{a}\Big) + \frac{ty-z}{1+t^2},\\ w = \frac{q_0x}{1+t^2}\sin\Big(\frac{\vartheta_0 + \ln(x(1+t^2)^{-1/2}) - b\tau}{a}\Big) + \frac{y+tz}{1+t^2},\\ \rho = \frac{\rho_0|x|^3e^{f\tau}}{(1+t^2)^3}, \quad p = C_0\rho\frac{x^2}{(1+t^2)^2}(S = S_0e^{(-2/3)f\tau}),\end{gathered} \tag{4.17}$$

где $u_0, q_0, \vartheta_0, \rho_0,\ C_0 = \dfrac{p_0}{\rho_0},\ S_0 = p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$1 + u_0^2 + 5\rho_0^{-1}p_0 = 0, \quad u_0q_0 = 0, \quad \frac{q_0}{a}(b-a-u_0) = 0, \quad \rho_0(f+4u_0) = 0, \quad fS_0 = 0.$$

Решение при $f=0$

$$u_0=0,\quad q_0(b-a)=0,\quad \rho_0=-5p_0,\quad \vartheta_0\ \text{— произвольная,} \tag{4.18}$$

имеет отрицательное давление, и поэтому данное решение не физично.

8) Подалгебра 4.9*($a\neq 0$)

Представление инвариантного решения ранга 0 отличается от представления инвариантного решения (4.17) видом ρ:

$$\rho=\frac{\rho_0|x|^{3+f/a}e^{-\frac{(b+ac)f}{a}\tau}}{(1+t^2)^{3+f/(2a)}}(S=S_0|x|^{(-2f)/(3a)}(1+t^2)^{f/(3a)}e^{\frac{2(b+ac)f}{3a}\tau}),$$

где $\rho_0, S_0=p_0\rho_0^{-5/3}$ — постоянные.

После подстановки в систему (1.1) получаются следующие соотношения на константы:

$$1+u_0^2+(5+a^{-1}f)\rho_0^{-1}p_0=0,\quad u_0q_0=0,\quad \frac{q_0}{a}(a-b+u_0)=0,$$
$$\frac{\rho_0}{a}(f(ac+b-u_0)-4au_0)=0,\quad a^{-1}f(ac+b-u_0)S_0=0.$$

При $f=0$ получим решение (4.18). При $f\neq 0$ получим два решения:

$$ac+b=0,\quad u_0=0,\quad q_0=0,\quad \rho_0=-(5+a^{-1}f)p_0,\quad \vartheta_0\ \text{— произвольная;} \tag{4.19}$$

$$a=b,\quad c=-1,\quad u_0=0,\quad \rho_0=-(5+a^{-1}f)p_0,\quad q_0,\vartheta_0\ \text{— произвольные,} \tag{4.20}$$

которые имеют положительное давление при $a^{-1}f<-5$.

Решения (4.19) и (4.20) дают следующие решения УГД:

$$\begin{gathered}
u=\frac{tx}{1+t^2},\quad v=\frac{ty-z}{1+t^2},\quad w=\frac{y+tz}{1+t^2},\\
\rho=-(5+a^{-1}f)p_0\frac{|x|^{3+a^{-1}f}}{(1+t^2)^{3+a^{-1}f/2}},\\
p=p_0\frac{|x|^{5+a^{-1}f}}{(1+t^2)^{5+a^{-1}f/2}},\quad S=S_0|x|^{-2a^{-1}f/3}(1+t^2)^{a^{-1}f/3}
\end{gathered} \tag{4.21}$$

и

$$\begin{gathered}
u=\frac{tx}{1+t^2},\quad v=\frac{q_0x}{1+t^2}\cos\Big(\frac{\vartheta_0+\ln\left(x(1+t^2)^{-1/2}\right)}{a}-\tau\Big)+\frac{ty-z}{1+t^2},\\
w=\frac{q_0x}{1+t^2}\sin\Big(\frac{\vartheta_0+\ln\left(x(1+t^2)^{-1/2}\right)}{a}-\tau\Big)+\frac{y+tz}{1+t^2},\\
\rho=-(5+a^{-1}f)p_0\frac{|x|^{3+a^{-1}f}}{(1+t^2)^{3+a^{-1}f/2}},\\
p=p_0\frac{|x|^{5+a^{-1}f}}{(1+t^2)^{5+a^{-1}f/2}},\quad S=S_0|x|^{-2a^{-1}f/3}(1+t^2)^{a^{-1}f/3}
\end{gathered} \tag{4.22}$$

соответственно. Решение (4.22) задает движение газа с линейным по двум координатам профилем скорости. Плотность и давление такие же, как и в решении (4.4).

Утверждение 3. *Для четырехмерных подалгебр из списка подразд.* 3.1 *построены все инвариантные подмодели ранга* 0, *которые порождают простые инвариантные решения уравнений динамики одноатомного газа*: (4.2), (4.4), (4.6), (4.7), (4.10), (4.11), (4.14), (4.16), (4.18), (4.21), (4.22).

5. Движение частиц газа

Исследуем движение частиц газа для решения (4.14) подалгебры 4.7 с линейным полем скоростей (аналогично (4.16) для 4.7*).

Положение частиц определяется их скоростью

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t). \tag{5.1}$$

Подстановка в уравнение (5.1) формул (4.14) дает мировые линии частиц:

$$\begin{gathered} x = \frac{x_0}{a^2-3}(a^2 - 3(1+t^2)^{1/2}) + aty_0 + \frac{3az_0}{a^2-3}\big(1-(1+t^2)^{1/2}\big), \\ y = y_0 + \frac{ax_0t}{a^2-3}\big(1-2(1+t^2)^{-1/2}\big) + \frac{z_0t}{a^2-3}\big(3-2a^2(1+t^2)^{-1/2}\big), \\ z = \frac{z_0}{a^2-3}\big(a^2(1-t^2)(1+t^2)^{-1/2}-3\big) + ty_0 + \frac{ax_0}{a^2-3}\big((1-t^2)(1+t^2)^{-1/2}-1\big), \end{gathered} \tag{5.2}$$

где x_0, y_0, z_0 — локальные лагранжевые координаты. Якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым равен $J = (1+t^2)^{3/2} > 0$. Мировые линии частиц не пересекаются. Проекции мировых линий (5.2) в $\mathbb{R}^3$ есть траектории частиц. Только одна частица, находящаяся в точке (0,0,0), остается неподвижной. Движение газа вихревое:

$$\vec{\omega} = \frac{a^2-2}{(a^2-3)(1+t^2)^2}\big(3(1+t^2), 2at, a(t^2-1)\big).$$

Из равенств (5.2) можно получить соотношение с разделенными переменными

$$\big(x(1+t^2) - 2aty + a(1-t^2)z\big)(1+t^2)^{-3/2} = az_0 + x_0 = C_0, \tag{5.3}$$

в котором левая часть равенства получается из инварианта трехмерной подалгебры 3.5 работы [8], вложенной в подалгебру 4.7. Равенство (5.3) задает двигающуюся плоскость

$$\pi_{C_0}(t)\colon (x(1+t^2) - 2aty + a(1-t^2)z)(1+t^2)^{-3/2} = C_0$$

для каждого C_0, перпендикулярную вектору $\vec{n}_1 = (1+t^2, -2at, a(1-t^2))$ при фиксированном t. Значит, частицы, находящиеся на плоскости $\pi_{C_0}(0)\colon az_0 + x_0 = C_0$ в начальный момент времени $t = 0$, в любой другой момент времени окажутся на плоскости $\pi_{C_0}(t)$. Условие $\vec{u}\cdot\vec{n}_1 = 0$ задает двигающуюся плоскость $\pi_\Gamma(t)\colon (1+t^2)tx + 2a(1-2t^2)y + a(5-t^2)tz = 0$, разделяющую частицы, которые вылетают по разные стороны от этих плоскостей. В пересечении с каждой из плоскостей $\pi_{C_0}(t)$ плоскость $\pi_\Gamma(t)$ дает прямые $l_{C_0}(t)$ с направляющим вектором $(a(1+t^2), 2t, t^2-1)$, проходящие через точку

$$\Big(\frac{(t^2+1)^{1/2}(2t^2-1)C_0}{t^2-1}, \frac{t(t^2+1)^{3/2}C_0}{2a(t^2-1)}, 0\Big).$$

Прямые $l_{C_0}(t)$ в момент времени t разделяют частицы, вылетающие в разные стороны относительно плоскостей $\pi_{C_0}(t)$. Примеры траекторий двух частиц и прямой $l_{C_0}(t)$, лежащие на плоскости $\pi_{C_0}(0)$, изображены на рис. 1. Таким образом, при $t = 0$ все пространство $\mathbb{R}^3$ можно покрыть параллельными плоскостями $\pi_{C_0}(0), C_0 \in \mathbb{R}$, которые перейдут в параллельные плоскости $\pi_{C_0}(t)$ для любых других значений t. Для фиксированного момента времени t эти плоскости есть изобарические поверхности.

З а м е ч а н и е. Решение

$$u = \frac{tx}{1+t^2}, \quad v = \frac{ty-z}{1+t^2}, \quad w = \frac{y+tz}{1+t^2}, \quad \rho = -(5+f)p_0\frac{|x|^{3+f}}{(1+t^2)^{3+f/2}}, \quad p = p_0\frac{|x|^{5+f}}{(1+t^2)^{5+f/2}}$$

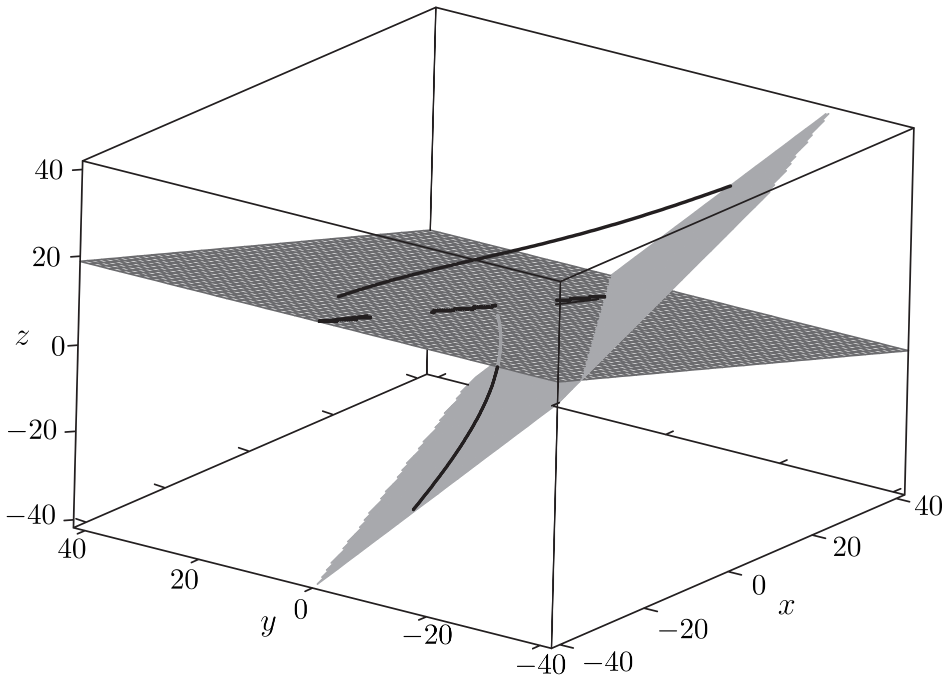

Рис. 1. Плоскость $\pi_{C_0}(t)$ при $a = 3, C_0 = 15$ для $t = 0$ (темно-серая заливка), $t = 2$ (светло-серая заливка), прямая $l_{C_0}(t)$ (пунктирная линия) и траектории двух частиц с начальными координатами $(-6,-5,7); (-21,12,12)$ (видимая часть – черным цветом, невидимая часть – серым).

существует для подалгебр $4.4^*(a = 1, b = 0)(4.4)$, $4.6^*(4.10)$, $4.7^*(a = 0)(4.16)$, $4.9^*(4.21)$.

Это решение исследовано в работе [17], где функции ρ и p имеют более общий вид, и можно считать $a = 1$. Оно задает вихревое сгущение и последующий разлет газа. Траектории частиц есть гиперболы, лежащие на прямом круговом конусе, с высотой параллельной оси Ox. Происходит "поворот" всех частиц газа на угол $\pi/2$ в плоскости y, z. Аналогичное решение (более общее) получено в работе [18] с рассмотрением кинетического уравнения переноса.

Утверждение 4. *Для решений* (4.14) *и* (4.16) *движение частиц газа определяется движущимися параллельными плоскостями* (5.3). *Частицы газа, находящиеся на этих плоскостях, не покидают их.*

Все основные результаты статьи были проверены с помощью системы компьютерной математики Maple.

Заключение

Таким образом, для 23 четырехмерных подалгебр, содержащих проективный оператор, вычислены точечные инварианты. Для восьми подалгебр построены инвариантные подмодели ранга 0. Получены физические решения с линейным полем скоростей (4.4), (4.11), (4.14), (4.16) и с линейной зависимостью компонент вектора скорости от двух пространственных координат (4.22). Все решения имеют особенность на плоскости: либо граница с вакуумом $\rho \to 0$, либо граница с твердой стенкой $\rho \to \infty$, которая не является коллапсом или источником. Для решений (4.14), (4.16) исследовано движение в терминах изобарических плоскостей, которые являются инвариантами подалгебры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л.В.** О “простых” решениях уравнений динамики политропного газа // Прикл. механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 2. С. 5–12.
2. **Panov A.V.** Rank 0 invariant solutions of dynamics of two-phase medium // Internat. Conf. Anal. Appl. Math. (ICAAM 2016): AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1759, no. 1. Article no. 020083. P. 020083-1–020083-5. doi: 10.1063/1.4959697
3. **Павленко А.С.** Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа // Сиб. электрон. мат. изв. 2005. Т. 2. С. 291–307.
4. **Головин С.В.** Подмодели динамики политропного газа: дис. … канд. физ.-мат. наук / Новосиб. орд. труд. крас. знам. гос. ун-т. Новосибирск, 2000. 116 с.
5. **Черевко А.А.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\,\rho^{5/3}$. Препринт № 4-96 / СО РАН, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1996. 39 с.
6. **Шаяхметова Р.Ф.** Вложенные инвариантные подмодели движения одноатомного газа // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 605–625.
7. **Шаяхметова Р.Ф.** Инвариантные подмодели ранга 3 и ранга 2 одноатомного газа с проективным оператором // Тр. Ин-та механики им. Р. Р. Мавлютова Уфим. науч. центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 127–135.
8. **Никонорова Р.Ф.** Подмодели одноатомного газа наименьшего ранга, построенные на основе трехмерных подалгебр симметрии // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1216–1226.
9. **Сидоров А.Ф.** О двух классах решений уравнений газовой динамики // Прикл. механика и техническая физика. 1980. № 5. С. 16–24.
10. **Овсянников Л.В.** Новое решение уравнений гидродинамики // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
11. **Овсянников Л.В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
12. **Хабиров С.В.** Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1396–1406.
13. **Сираева Д.Т., Юлмухаметова Ю.В.** Преобразования уравнений газовой динамики и базисных операторов допускаемой 11-мерной алгебры Ли // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 217–222. doi: 10.21662/mfs2020.3.133
14. **Овсянников Л.В., Чупахин А.П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
15. **Хабиров С.В.** Простые частично инвариантные решения // Уфим. мат. журн. 2019. Т. 11, № 1. С. 87–98.
16. **Павленко А.С.** Проективная подмодель вихря Овсянникова // Прикл. механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 4. С. 3–16.
17. **Шаяхметова Р.Ф.** Завихренный разлет одноатомного газа // Тр. Ин-та механики им. Р. Р. Мавлютова Уфим. науч. центра РАН. 2014. Вып. 10 / под ред. С. Ф. Урманчеева. С. 110–113.
18. **Fellner K., Schmeiser C.** Classification of equilibrium solutions of the cometary flow equation and explicit solutions of the Euler equations for monatomic ideal gases // J. Stat. Phys. 2007. Vol. 129. P. 493–507. doi: 10.1007/s10955-007-9396-8 .

Поступила 03.03.2023
После доработки 14.04.2023
Принята к публикации 17.04.2023

Никонорова Рената Фуатовна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: renatanikon@gmail.com

REFERENCES

1. Ovsyannikov L. V. “Simple” solutions of the equations of dynamics for a polytropic gas. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 191–197. doi: 10.1007/BF02468514
2. Panov A.V. Rank 0 invariant solutions of dynamics of two-phase medium. In: *Internat. Conf. Anal. Appl. Math. (ICAAM 2016): AIP Conf. Proc.* 2016. Vol. 1759, no. 1. P. 020083-1–020083-5. doi: 10.1063/1.4959697
3. Pavlenko A.S. Symmetries and solutions of equations of two-dimensional motions of polytropic gas. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2005, vol. 2, pp. 291–307 (in Russian).
4. Golovin S.V. *Podmodeli dinamiki politropnogo gaza* [Submodels of polytropic gas dynamics]: dissertation. Novosibirsk, Novosibirsk State University Publ., 2000, 116 p.
5. Cherevko A. A. Optimal system of subalgebras for Lie algebra of operators admitted by an equation system of gas dynamics with equation of state $p = f(S)\,\rho^{5/3}$. *Preprint no. 4-96.* Novosibirsk, Inst. of Hydrodynamics of the Syberian Branch of the Russian Academy of Science, 1996, 39 p.
6. Shayakhmetova R.F. Inserted invariant submodels for motion of monatomic gas. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2014, vol. 11, pp. 605–625 (in Russian).
7. Shayakhmetova R.F. Invariant submodels of rank 3 and rank 2 monatomic gas with the projective operator. *Trudy Inst. Mekh. Ufim. Nauch. Tsentra RAN*, 2016, Vol. 11, no. 1, pp. 127–135 (in Russian).
8. Nikonorova R.F. The lowest-rank monatomic gas submodels constructed on the basis of three-dimensional symmetry subalgebras. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 1216–1226 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.098
9. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the gasdynamical equations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 588–594. doi: 10.1007/BF00910159
10. Ovsyannikov L.V. New solution of hydrodynamic equations. *Dokl. AN SSSR*, 1956, vol. 111, no. 1, pp. 47–49 (in Russian).
11. Ovsyannikov L.V. The “podmodeli” program. Gas dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 4, pp. 601–627. doi: 10.1016/0021-8928(94)90137-6
12. Khabirov S.V. A hierarchy of submodels of differential equations. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1110–1119. doi: 10.1134/S0037446613060189
13. Siraeva D.T., Yulmukhametova Yu.V. Transformations of gas dynamics equations and basis operators of a admitted 11-dimensional Lie algebra. *Mnogofazovye sistemy*, 2020, vol. 15, no. 3–4, pp. 217–222 (in Russian). doi: 10.21662/mfs2020.3.133
14. Ovsyannikov L.V., Chupakhin A.P. Regular partially invariant submodels of the equations of gas dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, no. 6, pp. 969–978. doi: 10.1016/S0021-8928(96)00119-0
15. Khabirov S.V. Simple partially invariant solutions. *Ufa Math. J.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 90–99. doi: 10.13108/2019-11-1-90
16. Pavlenko A. S. Projective submodel of the Ovsyannikov vortex. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2005, vol. 46, no. 4, pp. 459–470. doi: 10.1007/s10808-005-0097-2
17. Shayakhmetova R.F. Vortexed expansion of monatomic gas. *Trudy Inst. Mekh. Ufim. Nauch. Tsentra RAN*, 2014, vol. 10, pp. 110–113 (in Russian). doi: 10.21662/uim2014.1.021
18. Fellner K., Schmeiser C. Classification of equilibrium solutions of the cometary flow equation and explicit solutions of the Euler equations for monatomic ideal gases. *J. Stat. Phys.*, 2007, vol. 129, no. 3, pp. 493—507. doi: 10.1007/s10955-007-9396-8

Received March 3, 2023
Revised April 14, 2023
Accepted April 17, 2023

Renata Fuatovna Nikonorova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia, e-mail: renatanikon@gmail.com .

Cite this article as: R. F. Nikonorova. Simple invariant solutions of the dynamic equation for a monatomic gas. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 115–132.