ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.988.68

ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА НА РАСШИРЕННЫХ КЛАССАХ КОРРЕКТНОСТИ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Рассматривается некорректно поставленная задача определения положения линий разрыва функции двух переменных. Предполагается, что вне линий разрыва функция гладкая, а на линии имеет разрыв первого рода. В каждом узле равномерной сетки с шагом τ известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Уровень возмущения δ считается известным. Ранее авторы исследовали (получили оценки точности) глобальные дискретные регуляризирующие алгоритмы аппроксимации множества линий разрыва зашумленной функции при условии, что линия разрыва точной функции удовлетворяет локальному условию Липшица. В настоящей работе введено одностороннее условие Липшица, и формулируется новый, более широкий, класс корректности. Построены новые методы локализации линий разрыва, которые работоспособны на расширенном классе функций. Доказана теорема сходимости, получены оценки точности аппроксимации и других важных характеристик алгоритмов. Показано, что новые методы гарантированно определяют положение линий разрыва в то время, когда стандартные методы не работают.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линия разрыва, глобальная локализация, условие Липшица.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. A study of new methods for localizing discontinuity lines on extended correctness classes.

We consider the ill-posed problem of finding the position of the discontinuity lines of a function of two variables. It is assumed that the function is smooth outside the lines of discontinuity, but has a discontinuity of the first kind on the line. At each node of a uniform grid with step τ, the mean values on a square with side τ of the perturbed function are known. The perturbed function approximates the exact function in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$. The perturbation level δ is assumed to be known. Previously, the authors investigated (accuracy estimates were obtained) global discrete regularizing algorithms for approximating the set of lines of discontinuity of a noisy function, provided that the line of discontinuity of the exact function satisfies the local Lipschitz condition. In this paper, we introduce a one-sided Lipschitz condition and formulate a new, wider correctness class. New methods for localizing discontinuity lines are constructed that work on an extended class of functions. A convergence theorem is proved, and estimates of the approximation error and other important characteristics of the algorithms are obtained. It is shown that the new methods determine the position of the discontinuity lines with guarantee in situations where the standard methods do not work.

Keywords: ill-posed problems, regularization method, discontinuity line, global localization, discretization, Lipschitz condition.

MSC: 65J22, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-10-22

Введение

Задача определения границ объектов на изображении часто возникает в процессе обработки изображений в качестве основного или промежуточного этапа: границы объектов являются линиями, на которых функция двух переменных (изображение) терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Вне линий разрыва функция гладкая. Предполагается, что точная функция f неизвестна, а вместо нее известна приближенная функция f^{δ}. Рассматривается случай, когда возмущения таковы, что линии разрыва приближенной функции необязательно аппроксимируют линии разрыва точной функции, т. е. задача определения положения линий разрыва является некорректно поставленной, и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы [1; 2].

Задачи определения положения линий разрыва привлекают большое внимание исследователей (см., например, [3; 4, гл. 10]). В российских и зарубежных научных журналах за последние годы этой тематике посвящено много работ. Например, в [5] при совместном использовании усреднений с помощью маски и медианных фильтров строятся алгоритмы, рассчитанные на локализацию линий разрыва в условиях импульсных шумов. Локализация линий разрыва также входит в качестве блока в [6] при сглаживании изображений, сохраняющих структуру. Локальные оценки точности аппроксимации линий разрыва для алгоритмов усреднения были впервые получены в [7]; обобщающий глобальный теоретический анализ алгоритмов локализации для случая кусочно-линейных линий разрыва проведен в [8]. Для подавления шума используются методы усреднения возмущенных данных.

В настоящей работе изучается модельная ситуация, когда вместо точной функции f известна информация о функции f^δ и $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta,\ L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$. Считаем, что в каждом узле равномерной сетки с шагом τ известны средние значения на квадрате со стороной τ функции f^δ. Уровень возмущения δ считается известным. Предполагаем, что функция f имеет разрыв по линии Γ, которая является ломаной. Все результаты настоящей статьи можно перенести на случай криволинейных линий разрыва.

Ранее [9] авторы построили методы локализации, которые позволяли восстанавливать линии разрыва, являющиеся локально липшицевыми. В настоящей работе построен новый класс методов, которые работоспособны для всех функций из класса корректности работы [9]. В то же время для любого уровня погрешности δ можно построить пример функции, для которой методы работы [9] не могут гарантированно работать, а методы настоящей работы гарантируют аппроксимацию линий разрыва исходной функции. Таким образом, методы настоящей работы работоспособны на более широком классе функций, чем методы работы [9]. Расширение класса корректности достигается за счет ослабления условия Липшица на линии разрыва. Отметим, что даже те линии, которые входят в класс корректности работы [9], алгоритм настоящей работы позволяет аппроксимировать целиком с одинаковой точностью, а не частично или аппроксимировать те же куски, но при большем уровне погрешности. В статье приведены соответствующие примеры.

В разд. 1 введены основные понятия, приведена постановка задачи и проведена дискретизация. В разд. 2 получены предварительные оценки для точности локализации линии разрыва. В последнем разделе приведен основной алгоритм, сформулирована и доказана теорема аппроксимации с оценками.

1. Постановка задачи, дискретизация вспомогательных функций

Пусть функция двух переменных $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ вне квадрата $\mathfrak{D} = \{(x, y)\colon |x| \le d,\ |y| \le d\},\ d > 0$, равна нулю и не имеет скачка на границе $\mathfrak{D}$ (последнее условие непринципиально и может быть снято); квадрат $\mathfrak{D}$ делится на области, внутри которых функция f гладкая. Линия разрыва Γ функции f является ломаной с конечным числом звеньев и образует замкнутые контуры (контуры могут иметь общие границы). Аккуратные условия выписаны ниже.

В следующем определении приведены условия гладкости функции f вне Γ.

О п р е д е л е н и е 1. Введем линейное множество $MV_1(\mathbb{R})$ функций $g \in L_2(\mathbb{R})$ одной переменной с конечным числом разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g непрерывно дифференцируема; функции g и g' ограничены на $\mathbb{R}$. Определим линейное множество $MV_1(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций двух переменных $f(x, y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ [1], для которых выполнены следующие условия: для всех y функция $f(\cdot, y)$ принадлежит множеству $MV_1(\mathbb{R})$, для всех x функция $f(x, \cdot)$ принадлежит множеству $MV_1(\mathbb{R})$.

[1]Для получения оценок удобнее считать, что функции заданы на всей плоскости, несмотря на то, что они имеют конечный носитель.

Заметим, что условия гладкости в настоящей работе несколько более сильные, чем, например, в работе [8].

Введем понятие скачка функции f на линии Γ.

О п р е д е л е н и е 2. Определим скачок $\Delta_x(x,y) = f(x+0,y) - f(x-0,y)$ функции f в точках $(x,y) \in \Gamma$, лежащих на отрезках, не параллельных оси OX (исключая концы отрезка). Аналогично определим скачок $\Delta_y(x,y) = f(x,y+0) - f(x,y-0)$ функции f в точках $(x,y) \in \Gamma$, лежащих на отрезках, не параллельных оси OY (исключая концы отрезка). На отрезках, параллельных оси OX, скачок $\Delta_x(x,y)$ не определен. На отрезках, параллельных оси OY, соответственно не определен скачок $\Delta_y(x,y)$.

З а м е ч а н и е 1. Для функции $f \in MV_1(\mathbb{R}^2)$ определение 2 корректно. Отметим, что если отрезок не параллелен осям OX и OY, то на нем определены скачки $\Delta_x(x,y)$, $\Delta_y(x,y)$, причем $|\Delta_x(x,y)| = |\Delta_y(x,y)|$.

Сформулируем условия на линию разрыва Γ функции f. Пусть $\{\Gamma_k\}_{k=1}^l$ — разбиение ломаной Γ, $0 < l < \infty$. Каждая компонента Γ_k разбиения — это один или несколько идущих подряд отрезков ломаной Γ, которые можно задать непрерывной однозначной функцией по x или по y: $\forall k\ \forall (x,y) \in \Gamma_k$ выполнено либо $x = x_k(y)$, $|x_k'| \le 1$, либо $y = y_k(x)$, $|y_k'| \le 1$. Обозначим объединение компонент Γ_k, которые заданы функциями по y, через Γ^x, а объединение компонент Γ_k, которые заданы функциями по x, через Γ^y; $\Gamma = \Gamma^x \cup \Gamma^y$.

Далее вместо классических условий Липшица, как это было в [9], в настоящей работе введем односторонние условия липшицевости на линию разрыва Γ, которые будут применяться к каждой компоненте Γ_k. Пусть $\varepsilon > 0$. Определим в точке $(x,y) \in \mathfrak{D}$ ε-прямоугольники:

$$\Pi_1^\varepsilon(x,y) = \{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathfrak{D} \colon |x-\tilde{x}| < \varepsilon, 0 < \tilde{y} - y < \varepsilon\},$$

$$\Pi_2^\varepsilon(x,y) = \{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathfrak{D} \colon |x-\tilde{x}| < \varepsilon, 0 < y - \tilde{y} < \varepsilon\},$$

$$\Pi_3^\varepsilon(x,y) = \{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathfrak{D} \colon |y-\tilde{y}| < \varepsilon, 0 < \tilde{x} - x < \varepsilon\},$$

$$\Pi_4^\varepsilon(x,y) = \{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathfrak{D} \colon |y-\tilde{y}| < \varepsilon, 0 < x - \tilde{x} < \varepsilon\}.$$

О п р е д е л е н и е 3. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k$, $\Gamma_k \in \Gamma^x$. Считаем, что $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$, если в $\Pi_1^\varepsilon(\bar{x},\bar{y})$ и/или в $\Pi_2^\varepsilon(\bar{x},\bar{y})$ содержится только Γ_k. Пусть $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k$, $\Gamma_k \in \Gamma^y$. Считаем, что $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$, если в $\Pi_3^\varepsilon(\bar{x},\bar{y})$ и/или в $\Pi_4^\varepsilon(\bar{x},\bar{y})$ содержится только Γ_k. Введем обозначения: $\Gamma^{x,\varepsilon} = \cup\{\Gamma_k^\varepsilon \colon \Gamma_k \in \Gamma^x\}$, $\Gamma^{y,\varepsilon} = \cup\{\Gamma_k^\varepsilon \colon \Gamma_k \in \Gamma^y\}$, $\Gamma^\varepsilon = \Gamma^{x,\varepsilon} \cup \Gamma^{y,\varepsilon} = \cup_{k=1}^l \Gamma_k^\varepsilon$.

Заметим, что в определении ε-прямоугольников неравенства строгие, т. е. на границе прямоугольника может быть другая компонента разбиения.

Введем класс разбиений $\mathcal{T}$ линий разрыва. Обозначим через $\mathrm{p}r_x$ и $\mathrm{p}r_y$ операторы проекции на оси OX и OY соответственно.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть заданы положительные числа $L, \bar{\varepsilon}, \omega, R$. Считаем, что разбиение $\{\Gamma_k\}_{k=1}^l$ принадлежит классу $\mathcal{T}(L,\bar{\varepsilon},\omega,R)$, если выполнены следующие условия:

(1) $0 < l \le L$;

(2) $\min\{|\mathrm{p}r_y\Gamma_k^{\bar{\varepsilon}}| \colon \Gamma_k \in \Gamma^x\} \ge \omega\bar{\varepsilon}$; $\quad \min\{|\mathrm{p}r_x\Gamma_k^{\bar{\varepsilon}}| \colon \Gamma_k \in \Gamma^y\} \ge \omega\bar{\varepsilon}$;

(3) для всех $k = 1,2,\ldots,l$, для $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ $\quad |\Gamma_k \setminus \Gamma_k^\varepsilon| \le R\varepsilon$.

З а м е ч а н и е 2. Поскольку функции $|\mathrm{p}r_y\Gamma_k^{\bar{\varepsilon}}| \colon \Gamma_k \in \Gamma^x$ и функции $|\mathrm{p}r_x\Gamma_k^{\bar{\varepsilon}}| \colon \Gamma_k \in \Gamma^y$ при $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ монотонно убывают, то для всех $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ имеем

$$\min\{|\mathrm{p}r_y\Gamma_k^\varepsilon| \colon \Gamma_k \in \Gamma^x\} \ge \omega\bar{\varepsilon};\ \min\{|\mathrm{p}r_x\Gamma_k^\varepsilon| \colon \Gamma_k \in \Gamma^y\} \ge \omega\bar{\varepsilon}.$$

З а м е ч а н и е 3. Как будет видно в теореме, для получения лучших оценок желательно выбирать разбиение с наименьшими величинами L, R и с наибольшим значением $\omega\bar{\varepsilon}$.

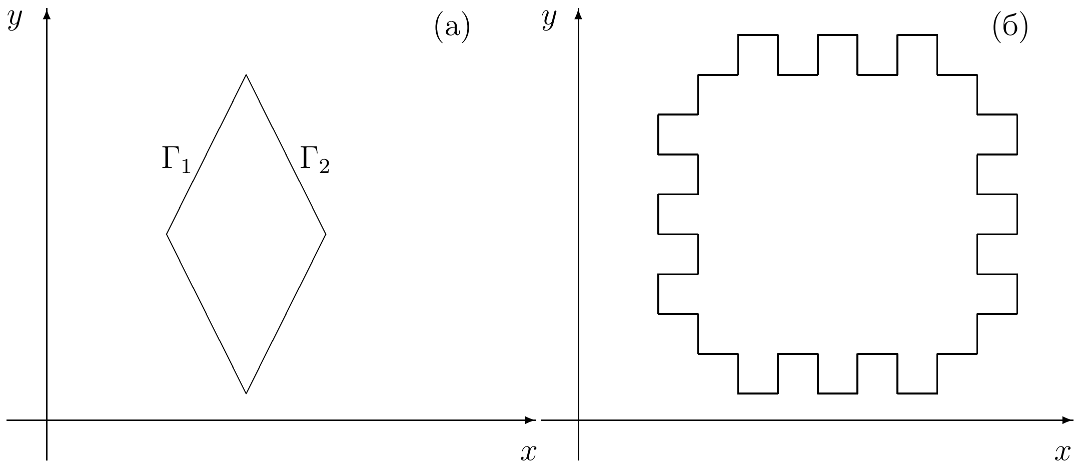

Рис. 1. Примеры линий Γ: (а) ромб из примера 1; (б) ломаная из примера 2.

Приведем примеры линий Γ и их разбиений.

П р и м е р 1. Пусть Γ — это ромб со стороной a и острым углом $\pi/3$; ромб стоит на угле (см. рис. 1(а)). Компоненты разбиения Γ_1, Γ_2 — две цепочки из двух смежных сторон ромба, соединенных углом $2\pi/3$. Параметры разбиения: $L = 2$, $\bar{\varepsilon} = a\sqrt{3}/(2+\sqrt{3})$, $\omega = 2$, $R = 1$. Множество Γ^ε — это Γ без окрестностей острых углов радиуса ε для $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

П р и м е р. 2. Построим линию Γ. Пусть сторона квадрата имеет длину a. Разобъем каждую сторону на семь частей. Затем вторую, четвертую и шестую части заменим тремя сторонами квадрата длины $a/7$ (см. рис. 1(б)). Рассмотрим построенную линию Γ. Компоненты разбиения Γ_k — это 52 отрезка длины $a/7$, составляющие Γ, т. е. $L = 52$.

Остальные параметры можно выбирать в зависимости от уровня погрешности исходных данных. Приведем возможные варианты.

Если $\bar{\varepsilon} \leq a/14$, то $\omega = 2(a/(7\bar{\varepsilon}) - 1) \geq 2$, $R = 0$. В этом случае $\Gamma^\varepsilon = \Gamma$ для $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Если выбрать $\bar{\varepsilon}$: $a/14 < \bar{\varepsilon} < a/7$, то $0 < \omega < 2$, $R = 1 - a/(14\bar{\varepsilon})$. В этом случае $\Gamma^\varepsilon \neq \Gamma$ и $\Gamma^\varepsilon \neq \varnothing$. Мы вернемся к этому примеру после теоремы и сравним результаты настоящей работы и работы [9].

Введем класс функций $\mathfrak{M}$, на котором будут проводиться оценки точности работы алгоритма локализации линий разрыва (класс корректности).

О п р е д е л е н и е 5. Пусть заданы положительные числа $L, \bar{\varepsilon}, \omega, R, r, \Delta^{\min}$. Класс корректности $\mathfrak{M}(L, \bar{\varepsilon}, \omega, R, r, \Delta^{\min})$ состоит из функций $f \in MV_1(\mathbb{R}^2)$ с линией разрыва Γ, скачок функции на которой удовлетворяет определению 2. При этом линия Γ допускает разбиение $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{l} \in \mathcal{T}(L, \bar{\varepsilon}, \omega, R)$. Дополнительно предполагаем выполнение следующих условий:

(i) для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x, y)| \leq r$; для $(x, y) \notin \Gamma$ выполнены неравенства $|f'_x(x, y)| \leq r$, $|f'_y(x, y)| \leq r$; для $(x, y) \in \Gamma$ существуют и ограничены величины $|f'_x(x \pm 0, y)| \leq r$, $|f'_y(x, y \pm 0)| \leq r$;

(ii) $\inf\{|\Delta_x(x, y)|, |\Delta_y(x, y)|\colon (x, y) \in \Gamma,$ в которых Δ_x и Δ_y определены$\} \geq \Delta^{\min}$.

Без ограничения общности можно считать, что $r = 1$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Перейдем к постановке задачи. Пусть в квадрате $\mathfrak{D} = \{(x, y)\colon |x| \leq d, |y| \leq d\}$, $d > 0$, задана равномерная сетка $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ (условия на τ будут сформулированы в теореме), т. е. $x^n = -d + (n - 1/2)\tau$, $y^m = -d + (m - 1/2)\tau$, где $n = 0, 1, \ldots, M$, $m = 0, 1, \ldots, M$, $M = 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что M — целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d.)

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, функция $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f^\delta_{n,m}$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ, которые связаны с функцией f^δ следующим образом:

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m-\tau/2}^{y^m+\tau/2} \int\limits_{x^n-\tau/2}^{x^n+\tau/2} f^\delta(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{1.1}$$

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

З а м е ч а н и е 4. Постановка задачи не вполне описана, так как необходимо определить понятие “аппроксимировать”. Это понятие введено в формулировке теоремы, где дана оценка не только близости точек сетки, найденных алгоритмом, к множеству линий разрыва, но и их количества.

При построении регулярных методов локализации для подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^\delta_{n,m}$. Для проведения усреднения определим класс непрерывных усредняющих функций ΦFS одной переменной $\phi(t),\ t \in \mathbb{R}$, симметричных относительно нуля и удовлетворяющих следующим условиям:

(a) ϕ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и ϕ'' непрерывна на $[-1, 1]$;

(b) существуют $0 < b < 1,\ a > 0$ такие, что $\phi(t) \ge a$ для $t \in [0, b]$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \phi(t)dt = 1$;

(d) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [0, 1]$; $\phi(t) \ge 0$ для $t \in [0, 1]$.

Введем для $\phi \in \Phi FS$ величину $C = \max\limits_t \{|\phi''(t)|, |\phi'(t)|, \phi(t)\}$. Ясно, что для $\phi \in \Phi FS$ имеем $\phi \in C_1(\mathbb{R})$. Положим $\phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda),\ \lambda > 0$. Для упрощения записи вместо $(\phi_\lambda(t))'_t|_{t=u}$ в дальнейшем будем писать $\phi'_\lambda(u)$.

Введем для $(x, y) \in \mathfrak{D}$ непрерывные усреднения функции f:

$$F_1(x,y) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda} \int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f(\xi,\eta)\phi'_\lambda(x-\xi)\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta) d\xi d\eta, \tag{1.2}$$

$$F_2(x,y) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{y-\lambda}^{y-3\tau/2} \int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f(\xi,\eta)\phi'_\lambda(x-\xi)\phi_\lambda(y-3\tau/2-\eta) d\xi d\eta, \tag{1.3}$$

$$F_3(x,y) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda} \int\limits_{x+3\tau/2}^{x+\lambda} f(\xi,\eta)\phi'_\lambda(y-\eta)\phi_\lambda(x+3\tau/2-\xi) d\xi d\eta, \tag{1.4}$$

$$F_4(x,y) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{y-\lambda}^{y+\lambda} \int\limits_{x-\lambda}^{x-3\tau/2} f(\xi,\eta)\phi'_\lambda(y-\eta)\phi_\lambda(x-3\tau/2-\xi) d\xi d\eta. \tag{1.5}$$

Используя исходные возмущенные данные $f^\delta_{n,m}$, введем дискретные аналоги усреднений $F_t,\ t = 1, 2, 3, 4$, в точках $(x^n, y^m) \in T$:

$$G^\delta_1(x^n, y^m) = \sum_{j=-K}^{-2} \sum_{i=-K}^{K} \Lambda^{i,j+2}_\lambda f^\delta_{n-i,m-j},$$

$$G^\delta_2(x^n, y^m) = \sum_{j=2}^{K} \sum_{i=-K}^{K} \Lambda^{i,j-2}_\lambda f^\delta_{n-i,m-j},$$

$$G_3^\delta(x^n, y^m) = \sum_{j=-K}^{K} \sum_{i=-K}^{-2} \Lambda_\lambda^{j,i+2} f_{n-i,m-j}^\delta,$$

$$G_4^\delta(x^n, y^m) = \sum_{j=-K}^{K} \sum_{i=2}^{K} \Lambda_\lambda^{j,i-2} f_{n-i,m-j}^\delta,$$

где $\Lambda_\lambda^{i,j} = \phi'_\lambda(i\tau)\phi_\lambda(j\tau)\tau^2/\lambda$ — дискретная усредняющая функция для функции двух переменных. Параметр K будет определен ниже как функция уровня погрешности δ и шага сетки τ. При этом параметры будут определены так, чтобы параметр λ везде в дальнейшем был больше шага τ.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы усредняющая функция $\phi \in \Phi FS$ и натуральное число K. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при $\lambda = (2K+1)\tau/2$ в точках $(x^n, y^m) \in T$ справедливы оценки*

$$\left|G_t^\delta(x^n, y^m) - F_t(x^n, y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{\sqrt{2}\lambda} + \frac{2A_0\tau}{\lambda}, \quad t = 1, 2, 3, 4, \quad A_0 = 2C^2.$$

Доказательство. Разбивая интеграл в (1.2) на сумму интегралов по тем же квадратам, что и в (1.1), подставляя выражение для $f_{n-i,m-j}^\delta$ и используя обозначение $\Delta f = f^\delta - f$, получаем

$$G_1^\delta(x^n, y^m) - F_1(x^n, y^m)$$

$$= \sum_{j=-K}^{-2} \sum_{i=-K}^{K} \Lambda_\lambda^{i,j+2} f_{n-i,m-j}^\delta - \frac{1}{\lambda} \int\limits_{y^m+3\tau/2}^{y^m+\lambda} \int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} f(\xi,\eta)\phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m+3\tau/2-\eta)d\xi d\eta$$

$$= \sum_{j=-K}^{-2} \sum_{i=-K}^{K} \int\limits_{y^m-j\tau-\tau/2}^{y^m-j\tau+\tau/2} \int\limits_{x^n-i\tau-\tau/2}^{x^n-i\tau+\tau/2} f(\xi,\eta)\Big[\frac{\Lambda_\lambda^{i,j+2}}{\tau^2} - \frac{1}{\lambda}\phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m+3\tau/2-\eta)\Big]d\xi d\eta$$

$$+ \sum_{j=-K}^{-2} \sum_{i=-K}^{K} \frac{\Lambda_\lambda^{i,j+2}}{\tau^2} \int\limits_{y^m-j\tau-\tau/2}^{y^m-j\tau+\tau/2} \int\limits_{x^n-i\tau-\tau/2}^{x^n-i\tau+\tau/2} \Delta f(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{1.6}$$

Поскольку для всех i, j имеем $|\Lambda_\lambda^{i,j}| \le C^2\tau^2/\lambda^2$ и $\|\Delta f\|_{L_2} \le \delta$, то, используя неравенство Коши — Буняковского, второе слагаемое оценим следующим образом:

$$\left|\sum_{j=-K}^{-2} \sum_{i=-K}^{K} \frac{\Lambda_\lambda^{i,j+2}}{\tau^2} \int\limits_{y^m-j\tau-\tau/2}^{y^m-j\tau+\tau/2} \int\limits_{x^n-i\tau-\tau/2}^{x^n-i\tau+\tau/2} \Delta f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right|$$

$$\le \frac{C^2}{\lambda^2} \int\limits_{y^m+3\tau/2}^{y^m+\lambda} \int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} |\Delta f(\xi,\eta)|d\xi d\eta \le \frac{C^2}{\lambda^2}\delta\sqrt{2\lambda(\lambda-3\tau/2)} < \frac{\sqrt{2}C^2\delta}{\lambda}.$$

Перейдем к оценке первого слагаемого в правой части (1.6). По формуле конечных приращений для функции двух переменных [10, гл. V, п. 183]

$$|\phi'_\lambda(i\tau)\phi_\lambda((j+2)\tau) - \phi'_\lambda(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m+3\tau/2-\eta)|$$

$$\le \tau|\phi''_\lambda(\theta_1)\phi_\lambda(\theta_2) + \phi'_\lambda(\theta_1)\phi'_\lambda(\theta_2)| \le \frac{2C^2\tau}{\lambda^2}, \tag{1.7}$$

где $\theta_1 \in ((i-1/2)\tau,(i+1/2)\tau)$, $\theta_2 \in ((j+2)\tau,(j+1)\tau)$. Следовательно, используя условие (i) на функцию f, подставляя выражение для $\Lambda_\lambda^{i,j}$ и используя оценку (1.7), для первого слагаемого в правой части (1.6) получаем

$$\Bigg|\sum_{j=-K}^{-2}\sum_{i=-K}^{K}\int\limits_{y^m-j\tau-\tau/2}^{y^m-j\tau+\tau/2}\int\limits_{x^n-i\tau-\tau/2}^{x^n-i\tau+\tau/2} f(\xi,\eta)\Big[\frac{\Lambda_\lambda^{i,j+2}}{\tau^2}-\frac{1}{\lambda}\phi_\lambda'(x^n-\xi)\phi_\lambda(y^m+3\tau/2-\eta)\Big]d\xi d\eta\Bigg|$$

$$\le \frac{1}{\lambda}\frac{2C^2\tau}{\lambda^2}\sup_{(x,y)\in\mathfrak{D}}|f|\,\Bigg|\int\limits_{y^m+3\tau/2}^{y^m+\lambda}\int\limits_{x^n-\lambda}^{x^n+\lambda} d\xi d\eta\Bigg| < \frac{4C^2\tau}{\lambda}.$$

Остальные оценки получаются аналогично.

Лемма доказана.

2. Вспомогательные оценки

Для множеств U_1, $U_2 \subset \mathbb{R}^2$ положим

$$\rho(U_1;U_2)=\inf\{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\colon (x_1,y_1)\in U_1,\ (x_2,y_2)\in U_2\}.$$

В следующей лемме приведены оценки сверху для функций F_t, $t=1,2,3,4$, определенных формулами (1.2)–(1.5), вне окрестности множества Γ.

Лемма 2. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\phi \in \Phi FS$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любого $\lambda > 0$ в точках $(x,y)\in\mathfrak{D}$ таких, что $\rho((x,y);\Gamma)\ge\sqrt{2}\lambda$, имеют место оценки $|F_t(x,y)|\le\lambda/2$, $t=1,2,3,4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma)\ge\sqrt{2}\lambda$ в области интегрирования при вычислении всех функций F_t, $t=1,2,3,4$, функция f не имеет разрывов, то можно от двойного интеграла в (1.2)–(1.5) перейти к повторному и к внутреннему интегралу применить формулу интегрирования по частям. Для $t=1$ имеем

$$F_1(x,y)=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f(\xi,\eta)\phi_\lambda'(x-\xi)d\xi\Bigg)\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta.$$

Учитывая условия на функции f и ϕ, получаем требуемую оценку

$$|F_1(x,y)|\le\frac{1}{\lambda}\sup_{(x,y)\in\mathfrak{D}}|f_x'|\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda}\phi_\lambda(x-\xi)d\xi\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda}\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta\le\frac{\lambda}{2}.$$

Остальные оценки получаются аналогично.

Лемма доказана.

Получим оценки снизу для функций F_t, $t=1,2,3,4$, в точках сетки T, близких Γ^ε. Напомним, что величины a,b введены в условии (b) на функцию ϕ, величины $\bar\varepsilon,\Delta^{\min}$ входят в определение класса $\mathfrak{M}$, τ — шаг сетки T. Введем константу $\varkappa=a^2b$.

Лемма 3. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\phi\in\Phi FS$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любого положительного λ при $\tau\le b\lambda/4$ и $\lambda+\tau\le\varepsilon\le\bar\varepsilon$ в точках $(x,y)\in\mathfrak{D}$ таких, что $\rho((x,y);\Gamma^\varepsilon)\le\tau$, хотя бы для одной функции F_t, $t=1,2,3,4$, имеет место оценка $|F_t(x,y)|\ge\varkappa\Delta^{\min}/2-\lambda/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\rho((x,y);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$, то существует точка $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$ такая, что $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) \le \tau$. Будем считать, что множество Γ_k^ε принадлежит $\Gamma^{x,\varepsilon}$ и в прямоугольнике $\Pi_1^\varepsilon(x,y)$ содержится только Γ_k (см. определение 3). Поскольку $\varepsilon \ge \lambda + \tau$, то в области интегрирования функции $F_1(x,y)$ находится только компонента Γ_k, которая задана функцией $x = x_k(y)$ и $|x_k'| \le 1$. Согласно [7, лемма 1] имеет место следующее разложение:

$$F_1(x,y) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda}\left(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f(\xi,\eta)\phi_\lambda'(x-\xi)d\xi\right)\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda} \Delta_x(x_k(\eta),\eta)\phi_\lambda(x-x_k(\eta))\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda}\left(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f_\xi'(\xi,\eta)\phi_\lambda(x-\xi)d\xi\right)\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta. \qquad (2.1)$$

Оценка для модуля второго слагаемого в правой части (2.1) была получена в лемме 2:

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda}\left(\int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} f_\xi'(\xi,\eta)\phi_\lambda(x-\xi)d\xi\right)\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta\right| \le \frac{\lambda}{2}.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Так как $\tau \le b\lambda/4$ и $b < 1$, то $3\tau/2 + b\lambda/2 < \lambda$. Поскольку функция $\Delta_x(x,y)$ не меняет знак на Γ_k, то без ограничения общности можно считать, что значение функции $\Delta_x(x,y)$ положительно в пределах интегрирования. Следовательно, в силу неотрицательности функции ϕ справедлива оценка снизу

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda} \Delta_x(x_k(\eta),\eta)\phi_\lambda(x-x_k(\eta))\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta$$

$$\ge \frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+3\tau/2+b\lambda/2} \Delta_x(x_k(\eta),\eta)\phi_\lambda(x-x_k(\eta))\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta.$$

Поскольку $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y})) \le \tau$, то $|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| \le 2\tau$. Так как $|x_k'| \le 1$, то $|x - x_k(\eta)| \le |x-\bar{x}| + |\bar{x} - x_k(\eta)| \le |x-\bar{x}| + |x_k'||\bar{y}-\eta| \le |x-\bar{x}| + |\bar{y}-y| + |y-\eta| \le 2\tau + b\lambda/2$. Учитывая, что $\tau \le b\lambda/4$, имеем $|x - x_k(\eta)| \le b\lambda$ и $\phi_\lambda(x - x_k(\eta)) \ge a$. Используя условия на функцию f, для первого слагаемого в правой части (2.1) получаем оценку

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+\lambda} \Delta_x(x_k(\eta),\eta)\phi_\lambda(x-x_k(\eta))\phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta$$

$$\ge \frac{a\Delta^{\min}}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+3\tau/2+b\lambda/2} \phi_\lambda(y+3\tau/2-\eta)d\eta \ge \frac{a^2\Delta^{\min}}{\lambda}\int\limits_{y+3\tau/2}^{y+3\tau/2+b\lambda/2} d\eta \ge \frac{a^2 b}{2}\Delta^{\min}.$$

Лемма доказана.

Напомним, что величины a, b введены в условии (b) на функцию ϕ, величины $\Delta^{\min}, \bar{\varepsilon}$ входят в определение класса $\mathfrak{M}$, $A_0 = 2C^2$, $\varkappa = a^2 b$. Введем константы

$$P = \frac{\varkappa\Delta^{\min}}{4}, \quad D = \frac{\sqrt{2}A_0}{P}, \quad \delta_0 = \min\left\{\frac{P}{6D}, \frac{\bar{\varepsilon}}{2D}\right\}, \quad B_0 = \min\left\{\frac{PD}{8A_0}, \frac{D}{6}, \frac{bD}{4}\right\}.$$

Обозначим $\lceil z \rceil = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$K = K(\tau, \delta) = \left\lceil \frac{D\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil. \tag{2.2}$$

Напомним, что (см. формулировку леммы 1)

$$\lambda = (2K + 1)\tau/2. \tag{2.3}$$

Ниже нам понадобятся оценки на τ и λ, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $\delta \le \delta_0$ и шаг τ заданной равномерной сетки T удовлетворяет условию $\tau \le B_0\delta$, тогда при связи параметров* (2.2), (2.3) *имеем $\tau \le b\lambda/4$ и для λ выполнены следующие оценки сверху и снизу: $D\delta \le \lambda \le D\delta + \tau \le (7/6)D\delta < 2D\delta$.*

Доказательство. Из (2.2) и (2.3) вытекают оценки сверху и снизу для λ: $D\delta \le \lambda \le D\delta + \tau$. Поскольку $B_0 \le D/6$, то $\tau \le D\delta/6$ и $\lambda \le (7/6)D\delta < 2D\delta$. Оценка для τ следует из условия $B_0 \le bD/4$ и оценки снизу для λ.

Утверждение доказано.

В точках (x^n, y^m) сетки T определим функцию

$$H^\delta(x^n, y^m) = \max_{t=1,2,3,4} |G_t^\delta(x^n, y^m)|. \tag{2.4}$$

Лемма 4. *Пусть зафиксирована усредняющая функция $\phi \in \Phi FS$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \le \delta_0$, $\tau \le B_0\delta$ при связи параметров* (2.2), (2.3)*, и полагая $\varepsilon = \lambda + \tau$, для значения функции H^δ в точках $(x^n, y^m) \in T$ имеем оценки*

(1) *если $\rho((x^n, y^m); \Gamma) \ge \sqrt{2}\lambda$, то $H^\delta(x^n, y^m) < P$,*

(2) *если $\rho((x^n, y^m); \Gamma^\varepsilon) \le \tau$, то $H^\delta(x^n, y^m) > P$.*

Доказательство. При выбранных параметрах $\varepsilon = \lambda + \tau < \bar{\varepsilon}$.

Покажем справедливость (1). Для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma) \ge \sqrt{2}\lambda$, используя оценки лемм 1 и 2, имеем

$$H^\delta(x^n, y^m) \le \frac{\lambda}{2} + \frac{A_0\delta}{\sqrt{2}\lambda} + \frac{2A_0\tau}{\lambda}.$$

Поскольку $\delta \le P/(6D)$, то, используя оценку сверху для λ из утверждения, получаем $\lambda/2 \le P/6$. Так как $D = \sqrt{2}A_0/P$, то, используя оценку снизу для λ, имеем $A_0\delta/(\sqrt{2}\lambda) \le P/2$. Поскольку $B_0 \le PD/(8A_0)$, то $2A_0\tau/\lambda \le P/4$. Следовательно,

$$H^\delta(x^n, y^m) < P.$$

Перейдем к доказательству (2). Для точек (x^n, y^m) таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma^\varepsilon) \le \tau$, используя оценки лемм 1 и 3, имеем

$$H^\delta(x^n, y^m) \ge \frac{\varkappa\Delta^{\min}}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{A_0\delta}{\sqrt{2}\lambda} - \frac{2A_0\tau}{\lambda}.$$

При данном выборе параметров $H^\delta(x^n, y^m) > 2P - P \ge P$.

Лемма доказана.

3. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Изложенный в этом разделе метод локализации определяет множество T^δ точек сетки T, аппроксимирующих множество Γ. Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ. Напомним, что функция H^δ определена в (2.4); константы L, $\bar\varepsilon$, ω, R и $\Delta^{\min}$ введены в определении класса $\mathfrak{M}$.

Алгоритм локализации в своей работе использует величину порога $P = \varkappa\Delta^{\min}/4$ и параметр регуляризации λ, являющийся функцией уровня погрешности данных δ и шага сетки τ:

$$K = K(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad \lambda = (2K+1)\tau/2. \tag{3.1}$$

А л г о р и т м $\Pi D1(\delta, f^\delta_{n,m})$

Подготовка к циклу. Положим $N := 0$; $T^\delta := \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) сетки T. Если в процессе перебора не осталось не рассмотренных точек сетки T, то — конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n, y^m) > P$,

то $N := N+1$; $T^\delta := T^\delta \cup (x^n, y^m)$, и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать усредняющую функцию $\phi \in \Phi FS$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и усредняющая функция выбраны и зафиксированы.

Для U_1, $U_2 \subset \mathbb{R}^2$ введем меру близости множества U_1 к множеству U_2

$$\mu(U_1;U_2) = \sup_{(x_1,y_1)\in U_1} \inf_{(x_2,y_2)\in U_2} \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Напомним, что $A_0 = 2C^2$,

$$D = \frac{\sqrt{2}A_0}{P}, \quad \delta_0 = \min\left\{\frac{P}{6D}, \frac{\bar\varepsilon}{2D}\right\}, \quad B_0 = \min\left\{\frac{PD}{8A_0}, \frac{D}{6}, \frac{bD}{4}\right\}.$$

Теорема 1. *В условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \le \delta_0$, $\tau \le B_0\delta$ при связи параметров* (3.1), *если $\varepsilon = \lambda + \tau$, то алгоритм $\Pi D1(\delta, f^\delta_{n,m})$ построит множество точек T^δ такое, что*

(1) *множество $T^\delta \ne \varnothing$ и справедлива оценка снизу*

$$N(T^\delta) \ge \frac{2\omega\bar\varepsilon L}{B_0}\frac{1}{\delta};$$

если $\tau = B_0\delta$, то справедлива оценка сверху

$$N(T^\delta) \le \frac{7\sqrt{2}D|\Gamma|}{3B_0^2}\frac{1}{\delta};$$

(2) $\mu(T^\delta;\Gamma) \le 2\sqrt{2}D\delta$;

(3) $\mu(\Gamma^\varepsilon;T^\delta) \le B_0\delta$; $\quad \mu(\Gamma;T^\delta) \le (B_0 + 2RD)\delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выбранных параметрах $\varepsilon = \lambda + \tau < \bar\varepsilon$.

Докажем оценку (1). Поскольку для всех k либо $|\mathrm{pr}_x\Gamma^\varepsilon_k| \ge \omega\bar\varepsilon$, либо $|\mathrm{pr}_y\Gamma^\varepsilon_k| \ge \omega\bar\varepsilon$ (см. замечание 2), то для всех k множество Γ^ε_k приближается по крайней мере $2\omega\bar\varepsilon/\tau$ точками. Следовательно,

$$N(T^\delta) \ge \frac{2\omega\bar\varepsilon}{\tau}L \ge \frac{2\omega\bar\varepsilon L}{B_0}\frac{1}{\delta}.$$

Пусть $\tau = B_0\delta$. Выпишем оценку сверху для $N(T^\delta)$, используя оценку сверху для λ из утверждения,

$$N(T^\delta) \leq \frac{2\sqrt{2}\lambda|\Gamma|}{\tau^2} \leq \frac{7\sqrt{2}D|\Gamma|}{3B_0^2}\frac{1}{\delta}.$$

Докажем оценку (2). Из оценки в п. (1) леммы 4 следует, что $\mu(T^\delta;\Gamma) \leq \sqrt{2}\lambda$. Используя оценки из утверждения перед леммой 4, получаем требуемое неравенство.

Докажем оценки (3). Согласно п. (2) леммы 4 $\mu(\Gamma^\varepsilon;T^\delta) \leq \tau$, тогда $\mu(\Gamma;T^\delta) \leq \tau + R\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon = \lambda + \tau$, то, учитывая условия на параметры, получаем требуемые оценки.

Теорема доказана.

Покажем преимущества алгоритма настоящей статьи на примере 2 из первого раздела в сравнении с работой [9] с точки зрения количества точек, в которых вспомогательная функция выше порога.

П р и м е р 2 (продолжение). Напомним, что компонентами разбиения являются 52 отрезка одинаковой длины, составляющие линию Γ, т. е. $L = 52$. Остальные параметры можно выбирать в зависимости от уровня погрешности исходных данных. Если уровень погрешности δ достаточно мал, то можно выбрать $\bar\varepsilon \leq a/14$, тогда $\omega = 2(a/(7\bar\varepsilon) - 1) \geq 2$, $R = 0$. В этом случае $\Gamma^\varepsilon = \Gamma$, и гарантированно приближается вся линия Γ с одинаковой точностью. Если уровень погрешности δ таков, что $a/14 < \bar\varepsilon < a/7$, то $0 < \omega < 2$, $R = 1 - a/(14\bar\varepsilon)$. В этом случае $\Gamma^\varepsilon \neq \Gamma$, однако $\Gamma^\varepsilon \neq \varnothing$. Следовательно, алгоритм настоящей работы гарантирует, что $T^\delta \neq \varnothing$, причем будут точки, приближающие каждую компоненту Γ_k.

В работе [9] величина D, определяющая параметр λ, меньше на $\sqrt{2}$ величины D из настоящей работы. Следовательно, при одинаковом уровне погрешности δ параметр λ в настоящей работе больше. В [9], чтобы гарантировать наличие точек, в которых вспомогательная функция превышает порог, необходимо $\bar\varepsilon < a/14$. При $\delta = a/(14D)$ имеем $\varepsilon = \lambda + \tau \geq D\delta = a/14$, значит, в [9] множество T^δ может быть пусто. При том же значении δ в настоящей работе $\varepsilon = \lambda + \tau \leq (1 + 1/3)D\delta \leq 2\sqrt{2}a/21 < a/7$. Следовательно, как было сказано выше, алгоритм настоящей работы гарантирует, что $T^\delta \neq \varnothing$.

Заключение

1) В работе [9] за счет усовершенствования техники проведения оценок удалось расширить класс корректности по сравнению с [8], т. е. доказать гарантированную работоспособность класса методов (одинаковых в [8; 9]) для более широкого класса функций. В настоящей работе достигается расширение класса корректности за счет построения новых методов локализации по сравнению с [8; 9].

2) Авторы развивают подход своей работы “О локализации негладких линий разрыва функций двух переменных” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 3. С. 9–23) к изучению локализации фрактальных линий разрыва на основе аппроксимации этих линий ломаными. Расширение класса корректности, проведенное в настоящей работе, позволит расширить класс рассматриваемых фрактальных линий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 c.
3. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
4. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. Изд. 3-е испр. и доп. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
5. **Mafi M., Rajaei H., Cabrerizo M., Adjouadi M.** A robust edge detection approach un the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering // IEEE Trans. on image processing. 2018. Vol. 27, no. 11. P. 5475–5489. doi: 10.1109/TIP.2018.2857448

6. **Mozerov M., van de Weijer J.** Improved recursive geodesic distance computation for edge preserving filter // IEEE Trans. on image processing, 2017. Vol. 26, no. 8. P. 3696–3706. doi: 10.1109/TIP.2017.2705427
7. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23
9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Новые оценки точности методов локализации линий разрыва зашумленной функции // Сиб. журнал вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 351–364. doi: 10.15372/SJNM20200401
10. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 608 с.

Поступила 17.04.2023
После доработки 28.04.2023
Принята к публикации 15.05.2023

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of solving of ill-posed problems], Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p.
2. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, VSP, 1995, 255 c. ISBN: 906764191X . Original Russian text was published in Vasin V.V., Ageev A.L., *Nekorrektnye zadachi s apriornoi informatsiei*, Yekaterinburg, Ural Publ. House “Nauka”, 1993, 264 p. ISBN: 5-7691-0390-6 .
3. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*, NY, Acad. Press, 1999. 620 p. ISBN: 0-12-466606-X . Translated to Russian under the title *Veivlety v obrabotke signalov*, Moscow, Mir Publ., 2005, 671 p. ISBN: 5-03-003691-1 .
4. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing* (3rd ed.). NJ: Pearson Ed., 2006, 976 p. ISBN: 013168728X . Translated to Russian under the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii*, Moscow, Tekhnosfera Publ., 2012, 1104 p. ISBN 978-5-94836-331-8 .
5. Mafi M., Rajaei H., Cabrerizo M., Adjouadi M. A robust edge detection approach in the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering. *IEEE Trans. on image processing*, 2018, vol. 27, no. 11, pp. 5475–5490. doi: 10.1109/TIP.2018.2857448
6. Mozerov M., van de Weijer J. Improved recursive geodesic distance computation for edge preserving filter. *IEEE Trans. on image processing*, 2017, vol. 26, no. 8, pp. 3696–3706. doi: 10.1109/TIP.2017.2705427
7. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. Appl. Industr. Math.*, 2012, vol. 6, no. 3, p. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015
8. Ageev A.L., Antonova T.V. On the question of global localisation of discontinuity lines of a function of two variables. *Trudy Inst. Mat. Mekh. URO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 12–23 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23

9. Ageev A. L., Antonova T. V. New accuracy estimates for methods for localizing discontinuity lines of a noisy function. *Num. Anal. Appl.*, 2020, vol. 13, no. 4, pp. 293–305. doi: 10.1134/S1995423920040011
10. Fikhtengoltz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. 8th ed. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 608 p. ISBN: 5-9221-0436-5 .

Received April 17, 2023
Revised April 28, 2023
Accepted May 15, 2023

Alexander Leonidivich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tatiana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. L. Ageev, T. V. Antonova. A study of new methods for localizing discontinuity lines on extended correctness classes. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 10–22 .