ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 2 2023

УДК 517.444

О ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА БАРГМАНА — ФОКА

В. В. Напалков (мл.), А. А. Нуятов

В работе изучаются гильбертовы пространства последовательностей, образованные значениями функций из пространства Баргмана — Фока F, которое состоит из целых функций, квадрат модуля которых суммируем на плоскости $\mathbb{C}$ с мерой $d\sigma(z) := (1/\pi)e^{-|z|^2}\,dv(z)$, $dv(z)$ — элемент площади:

$$\|f\|_F^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2\, d\sigma(z) < \infty \quad \forall f \in F.$$

Пространство $\overline{F}$ состоит из функций, комплексно-сопряженных к функциям из F, при этом $\|\overline{f}\|_{\overline{F}} = \|f\|_F\, \forall f \in F$. В статье рассматриваются классы счетных множеств Ω_0, $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$, вида

$$\Omega_0 \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} \colon z = an + ibm, ab = \pi\, \forall n, m \in \mathbb{Z}\},$$

где a, b — некоторые фиксированные (зависящие только от множества Ω_0) вещественные числа, отличные от нуля. Множества Ω_0 называются решетками фон Неймана. Для вещественного числа $k > 1$ образуем множество $\Omega_0^k \overset{def}{=} k\Omega_0$. В работе установлено, что пространство последовательностей комплексных чисел V_k, образованное следами функций из F^k — некоторого подпространства пространства F на множестве Ω_0^k, эквивалентно пространству последовательностей комплексных чисел U_k, образованному следами функций из $\overline{F}^k$ — подпространства пространства $\overline{F}$ на множестве Ω_0^k. Пространства $\overline{F}^k$, $\overline{F}$ состоят из функций комплексно-сопряженных к функциям из пространств F^k, F соответственно. При этом нормы в пространствах V_k и U_k индуцируются нормами пространств F^k и $\overline{F}^k$. Для получения основных результатов статьи используется результат К. Сейпа о дискретных сэмплинг — множествах пространства Баргмана — Фока. Применяются результаты авторов, связанные с вопросами совпадения или эквивалентности гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром. При этом важную роль играет введенное ранее авторами понятие согласованности двух полных систем функций. В работе приведены контрпримеры. Построены гильбертовы пространства комплексных чисел V и U, являющихся следами на некотором дискретном подмножестве комплексной плоскости функций из F, которые не являются эквивалентными.

Ключевые слова: системы разложения, подобные ортогональным, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, задача описания сопряженного пространства, пространство Баргмана — Фока, фрейм из экспонент, решетка фон Неймана.

V. V. Napalkov (jr.), A. A. Nuyatov. On Hilbert spaces of sequences formed by values of functions from the Bargmann–Fock space.

We study Hilbert spaces of sequences formed by values of functions from the Bargmann–Fock space F, which consists of entire functions whose square modulus is summable on the plane $\mathbb{C}$ with measure $d\sigma(z) := (1/\pi)e^{-|z|^2}\,dv(z)$, where $dv(z)$ is an area element:

$$\|f\|_F^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2\, d\sigma(z) < \infty \quad \forall f \in F.$$

The space $\overline{F}$ consists of complex conjugates of functions from F, and $\|\overline{f}\|_{\overline{F}} = \|f\|_F\, \forall f \in F$. We consider classes of countable sets $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ of the form

$$\Omega_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \colon\ z = a \cdot n + ib \cdot m,\ a \cdot b = \pi\ \forall n, m \in \mathbb{Z}\},$$

where a and b are some fixed (depending only on the set Ω_0) nonzero real numbers. The sets Ω_0 are called von Neumann lattices. For a real number $k > 1$, we form the set $\Omega_0^k \overset{\mathrm{def}}{=} k \cdot \Omega_0$. We establish that the space of sequences of complex numbers V_k formed by the traces of functions from some subspace F^k of the space F on the set Ω_0^k is equivalent to the space of sequences of complex numbers U_k formed by the traces of functions from a subspace $\overline{F}^k$ of the space $\overline{F}$ on the set Ω_0^k. The spaces $\overline{F}^k$ and $\overline{F}$ consist of complex conjugates of the functions from the spaces F^k and F, respectively. Moreover, the norms in the spaces V_k and U_k are induced by the norms of the spaces F^k and $\overline{F}^k$. To derive the main results of the paper, we use the result of K. Seip on discrete sampling sets of the Bargmann–Fock space. The results of the authors related to the questions of the coincidence or equivalence of Hilbert spaces with a reproducing kernel are applied. Here the notion of consistency of two complete systems of functions, introduced earlier by the authors, plays an important role. The paper presents counterexamples. We construct nonequivalent Hilbert spaces of complex numbers V and U that are the traces on some discrete subset of the complex plane of functions from F that are not equivalent.

Keywords: decomposition systems similar to orthogonal ones, Hilbert space with reproducing kernel, problem of describing a dual space, Bargmann–Fock space, exponential frame, von Neumann lattice.

MSC: 46E22, 47B32, 30H05, 32A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-104-114

Введение

Пусть F — пространство Баргмана — Фока, состоящее из целых функций, квадрат модуля которых суммируем на плоскости $\mathbb{C}$ с мерой $d\sigma(z) := (1/\pi)e^{-|z|^2}\,dv(z)$, $dv(z)$ — элемент площади:

$$\|f\|_F^2 = \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2\,d\sigma(z) < \infty \quad \forall f \in F.$$

Пространство F — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром [1], т. е. для любого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ функционал $f \to f(\lambda_0)$ является линейным и непрерывным функционалом над F. Скалярное произведение в F имеет вид

$$(f_1, f_2)_F = \int\limits_{\mathbb{C}} f_1(z)\,\overline{f_2(z)}\,d\sigma(z) \quad \forall f_1, f_2 \in F.$$

Пусть $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C}\colon z = n + \pi i m, m, n \in \mathbb{Z}\}$ — дискретное множество точек в $\mathbb{C}$. Положим

$$e_1(z,\lambda) := e^{\lambda z}, \quad e_2(z,\lambda) := e^{\overline{\lambda} z}, \quad z, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Определим

$$\begin{aligned} &\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (e_1(\cdot, z), f)_F \ \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \widetilde{F} = \{\widetilde{f},\, f \in F\}, \quad (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{F}} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_F \ \ \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{F}, \\ &\widehat{f}(z) \overset{def}{=} (e_2(\cdot, z), f)_F \ \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \widehat{F} = \{\widehat{f},\, f \in F\}, \quad (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)_{\widehat{F}} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_F \ \ \forall \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \widehat{F}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Заметим, что

$$(e_1(\cdot, \lambda_1), e_2(\cdot, \lambda_2))_F = e^{\lambda_1 \lambda_2} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \tag{0.2}$$

Действительно, для воспроизводящего ядра пространства F справедливо соотношение [2]

$$K_F(\tau, \xi) = (e^{\tau z}, e^{\xi z})_F = e^{\tau \overline{\xi}} \quad \forall \tau, \xi \in \mathbb{C},$$

поэтому согласно определению систем функций $\{e_j(\cdot, \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$, $j = 1, 2$, имеем

$$(e_1(\cdot, \lambda_1), e_2(\cdot, \lambda_2))_F = (e^{\lambda_1 z}, e^{\overline{\lambda_2} z})_F = K_F(\lambda_1, \overline{\lambda_2}) = e^{\lambda_1 \lambda_2} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

В недавней работе авторов (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2022, Т. 28, № 3) изучалось свойство согласованности двух полных систем функций в некотором гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром. Пусть Ω_1 — некоторое подмножество точек комплексной плоскости, и пусть в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром H имеются две системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_1}$, $j = 1, 2$.

О п р е д е л е н и е 1. Системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_1}$, $j = 1, 2$, принадлежащие гильбертову пространству H, называются согласованными с оператором $\mathcal{T}\colon H \to H$, если выполнено соотношение

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), \mathcal{T} e_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1.$$

Для $\lambda_j \in \Omega_0$, $\lambda_j := n_j + \pi i m_j$, $j = 1, 2$, имеем $\lambda_1\lambda_2 = n_1n_2 - \pi^2 m_1m_2 + \pi i(n_1m_2 + n_2m_1)$. Используя (0.2), нетрудно показать, что

$$(e_1(\cdot, \lambda_1), e_2(\cdot, \lambda_2))_F = e^{n_1n_2-\pi^2m_1m_2+\pi i(n_1m_2+n_2m_1)}$$
$$= e^{n_1n_2-\pi^2m_1m_2-\pi i(n_1m_2+n_2m_1)} = \overline{(e_1(\cdot, \lambda_2), e_2(\cdot, \lambda_1))_F} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega_0. \tag{0.3}$$

Далее очевидно (это следует из свойства симметричности множества Ω_0 относительно вещественной оси), что линейные оболочки систем функций $\{e_1(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0}$ и $\{e_2(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0}$ совпадают. Системы функций $\{e_j(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0}$ полны в пространстве F [3]. Соотношение (0.3) означает, что системы функций $\{e_j(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0}$ являются согласованными с тождественным оператором. Пусть $k \geq 1$ — произвольное вещественное число. Рассмотрим множества точек из $\mathbb{C}$:

$$\Omega_0^k \overset{def}{=} k\,\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C}\colon z = k(n + \pi i m),\ n, m \in \mathbb{Z}\};$$
$$\Omega_{0,k} \overset{def}{=} \frac{1}{k}\,\Omega_0 = \Big\{z \in \mathbb{C}\colon z = \frac{1}{k}(n + \pi i m), \quad n, m \in \mathbb{Z}\Big\}. \tag{0.4}$$

В этой работе изучаются гильбертовы пространства последовательностей комплексных чисел, образованных следами функций из пространства F на множестве Ω_0^k.

1. Основные результаты

Лемма 1. *Для произвольного $k \geq 1$ справедливо соотношение*

$$(e_1(\cdot, \lambda_1), e_2(\cdot, \lambda_2))_F = \overline{(e_1(\cdot, \lambda_2), e_2(\cdot, \lambda_1))_F} \quad \forall \lambda_1 \in \Omega_0^k,\ \forall \lambda_2 \in \Omega_{0,k}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Действительно, если $\lambda_1 \in \Omega_0^k$, то

$$\lambda_1 = k(n_1 + \pi i m_1),\ \lambda_2 = \frac{1}{k}(n_2 + \pi i m_2), \quad n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z},$$
$$(e_1(\cdot, \lambda_1), e_2(\cdot, \lambda_2))_F = e^{\lambda_1\cdot\lambda_2} = e^{n_1n_2-\pi^2m_1m_2+\pi i(n_1m_2+n_2m_1)}$$
$$= \overline{(e_1(\cdot, \lambda_2), e_2(\cdot, \lambda_1))_F} \quad \forall \lambda_1 \in \Omega_0^k, \forall \lambda_2 \in \Omega_{0,k}.$$

Лемма доказана.

Определим пространство F^k как замыкание по норме $\|\cdot\|_F$ линейной оболочки системы функций $\{e_1(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0^k}$:

$$F^k = \mathrm{Cl}_F\{e_1(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0^k}. \tag{1.2}$$

В силу определения системы функций $\{e_2(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0^k}$ и симметричности множества Ω_0^k относительно вещественной оси выполнено соотношение

$$F^k = \mathrm{Cl}_F\{e_2(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0^k}. \tag{1.3}$$

Заметим, если $k > 1$, то, следуя [4, Theorem 2.1], нетрудно показать, что $\mathrm{Cl}_F\{e_1(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_{0,k}} = F$. Если $k = 1$, то $\Omega_{0,1} = \Omega_0$ и $\mathrm{Cl}_F\{e_1(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\Omega_0} = F$ [4, Remark 1].

Далее определим пространства последовательностей V_F^k, U_F^k, $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (e_1(\cdot, z), f)_{F^k} \ \ \forall z \in \Omega_0^k,\\
&\qquad V_F^k = \{\widetilde{f},\ f \in F_0^k\}, \quad (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{V_F^k} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_{F^k} \ \ \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in V_F^k,\\
&\widehat{f}(z) \overset{def}{=} (e_2(\cdot, z), f)_{F^k} \ \ \forall z \in \Omega_0^k,\\
&\qquad U_F^k = \{\widehat{f},\ f \in F^k\}, \quad (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)_{U_F^k} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_{F^k} \ \ \forall \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in U_F^k.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Возникает вопрос: совпадают ли (или эквивалентны) пространства V_F^k и U_F^k? Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *При $k > 1$ пространства V_F^k и U_F^k эквивалентны.*

Доказательство. Множество $\Omega_{0,k}$ является счетным. Пусть последовательность $\{z_l\}_{l=1}^{\infty}$ содержит все точки множества $\Omega_{0,k}$, при этом каждая точка множества $\Omega_{0,k}$ присутствует в последовательности $\{z_l\}_{l=1}^{\infty}$ только один раз. Система функций, построенная из воспроизводящего ядра $\{K_F(\cdot, z_l)\}_{z_l \in \Omega_{0,k}}$, $k > 1$, является фреймом в пространстве F. Согласно результату работы [4, Theorem 2.1, p. 92–93] справедливо соотношение

$$\|f\|_F^2 \asymp \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} |(f, K_F(\cdot, z_l))_F|^2 \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall f \in F, \tag{1.5}$$

где выражение $A(f) \asymp B(f)$ $\forall f \in F$, A, B — некоторые положительные функционалы на F, как обычно, означает, что существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что

$$C_1 A(f) \le B(f) \le C_2 A(f) \quad \forall f \in F.$$

Этот фрейм в общем случае не будет жестким. Напомним, что система функций $\{K_F(\cdot, z_l)\}_{z_l \in \Omega_{0,k}}$, $k > 1$, была бы жестким фреймом, если бы существовала постоянная $B > 0$, такая что

$$\|f\|_F^2 = B \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} |(f, K_F(\cdot, z_l))_F|^2 \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall f \in F.$$

Найдется линейный непрерывный взаимно однозначный самосопряженный оператор $S_k \colon F \to F$, который не является, вообще говоря, оператором умножения на константу, такой что система функций $\{S_k K_F(\cdot, z_l)\}_{z_l \in \Omega_{0,k}}$ будет ортоподобной системой разложения в пространстве F, т. е. любая функция f из F представляется в виде

$$f(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, S_k K_F(\cdot, z_l))_F S_k K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Также найдется линейный непрерывный взаимно однозначный самосопряженный оператор $S_k^* \colon \overline{F} \to \overline{F}$ такой, что для пространства функций

$$\overline{F} = \left\{ h \colon \overline{h} \in F,\ \|h\|_{\overline{F}} = \int_{\mathbb{C}} |h(z)|^2 \, dv(z),\ (h_1, h_2)_{\overline{F}} = (\overline{h}_2, \overline{h}_1)_F \right\}$$

выполнено условие

$$h(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (h, S_k^* K_{\overline{F}}(\cdot, z_l))_{\overline{F}} S_k^* K_{\overline{F}}(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.7}$$

Заметим (см. [2]), что по теореме Баргмана пространство $\widetilde{F}$ совпадает с F, а пространство $\widehat{F}$ совпадает с пространством $\overline{F}$ (совпадение пространств означает, что эти пространства состоят из одних и тех же функций и нормы этих пространств равны). Понятие ортоподобных систем разложения было введено в работах Т. П. Лукашенко (см., например, [5]).

Докажем, что из соотношения (1.5) следует (1.6). Соотношение (1.5) означает, что в пространстве F можно ввести норму вида

$$\|f\|_1^2 \stackrel{def}{=} \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} |(f, K_F(\cdot, z_l))_F|^2 \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall f \in F, \tag{1.8}$$

которая эквивалентна норме $\|\cdot\|_F$. Норма $\|\cdot\|_1$ порождает на элементах пространства F скалярное произведение [6, с. 228]

$$(f, g)_1 \stackrel{def}{=} \frac{1}{4} \left[\|f + g\|_1^2 - \|f - g\|_1^2 + i\|f + ig\|_1^2 - i\|f - ig\|_1^2 \right]. \tag{1.9}$$

Из равенств (1.8), (1.9) вытекает, что

$$(f,g)_1 = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, K_F(\cdot, z_l))_F (K_F(\cdot, z_l), g)_F \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall f, g \in F. \tag{1.10}$$

Поскольку нормы $\|\cdot\|_F$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны, то согласно лемме 1 работы [7] найдется линейный непрерывный взаимно однозначный положительный оператор $\mathcal{T}_k\colon F \to F$, такой что

$$(\mathcal{T}_k f, g)_F = (f,g)_1 \quad \forall f, g \in F.$$

Подставляя это равенство в соотношение (1.10), получим

$$(\mathcal{T}_k f, g)_F = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, K_F(\cdot, z_l))_F (K_F(\cdot, z_l), g)_F \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall f, g \in F. \tag{1.11}$$

В равенстве (1.11) положим $g = K_F(\cdot, z)\, \forall z \in \mathbb{C}$. Воспользовавшись воспроизводящим свойством ядра [1], получим

$$\mathcal{T}_k f(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, K_F(\cdot, z_l))_F K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \forall f \in F. \tag{1.12}$$

Оператор $\mathcal{T}_k^{-1}$, обратный к оператору $\mathcal{T}_k$, очевидно, также самосопряженный оператор. Существует единственный положительный квадратный корень из оператора $\mathcal{T}_k^{-1}$ (см. [6, с. 284]), т. е. такой линейный непрерывный взаимно однозначный самосопряженный оператор $\mathcal{S}_k\colon F \to F$, что $\mathcal{T}_k^{-1} = \mathcal{S}_k \circ \mathcal{S}_k$. Очевидно, что $\mathcal{T}_k = \mathcal{S}_k^{-1} \circ \mathcal{S}_k^{-1}$, где $\mathcal{S}_k^{-1}$ — оператор, обратный к оператору $\mathcal{S}_k$. В соотношении (1.12) возьмем в качестве f функцию $\mathcal{S}_k f$; получим

$$\mathcal{T}_k \circ \mathcal{S}_k f(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (\mathcal{S}_k f, K_F(\cdot, z_l))_F K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\mathcal{S}_k^{-1} \circ \mathcal{S}_k^{-1} \circ \mathcal{S}_k f(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, \mathcal{S}_k K_F(\cdot, z_l))_F K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\mathcal{S}_k^{-1} f(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, \mathcal{S}_k K_F(\cdot, z_l))_F K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{1.13}$$

Подействуем на обе части выражения (1.13) оператором $\mathcal{S}_k$, применим теорему [8, с. 128]:

$$\mathcal{S}_k \circ \mathcal{S}_k^{-1} f(z) = \mathcal{S}_k \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, \mathcal{S}_k K_F(\cdot, z_l))_F K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$f(z) = \sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} (f, \mathcal{S}_k K_F(\cdot, z_l))_F \mathcal{S}_k K_F(z, z_l) \cdot e^{-|z_l|^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, из равенства (1.5) мы получили выражение (1.6). Отметим, что мы пользуемся эквивалентностью двух определений ортоподобной системы разложения для случая гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром (см. [9, теорема 1]). Аналогично получается соотношение (1.7). Далее, используя результат статьи [10], можно доказать, что найдутся линейные непрерывные взаимно однозначные унитарные операторы T_1, T_2, такие что

$$T_2\colon F \to \widetilde{\overline{F}}, \quad T_2\colon e_1(\cdot, \lambda) \mapsto K_{\widetilde{\overline{F}}}(\cdot, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

$$T_1\colon F \to \widehat{\overline{F}}, \quad T_1\colon e_2(\cdot, \lambda) \mapsto K_{\widehat{\overline{F}}}(\cdot, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.14}$$

Учтем, что $\widetilde{\overline{F}} = \overline{F}$, $\widehat{\overline{F}} = F$. Определим операторы

$$\mathcal{Q}_{1,k} \overset{def}{=} T_1^{-1} \circ \mathcal{S}_k \circ T_1, \quad \mathcal{Q}_{2,k} \overset{def}{=} T_2^{-1} \circ \mathcal{S}_k^{*} \circ T_2, \quad \mathcal{Q}_{1,k}\colon F \to F, \quad \mathcal{Q}_{2,k}\colon F \to F. \tag{1.15}$$

Из соотношений (1.6), (1.7), (1.14), (1.15) вытекает, что

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} (f, \mathcal{Q}_{1,k}e_1(\cdot, z_l))_F \mathcal{Q}_{1,k}e_1(z, z_l)\cdot e^{-|z_l|^2}, \quad z\in\mathbb{C}\ \ \forall f\in F,\\
f(z) &= \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} (f, \mathcal{Q}_{2,k}e_2(\cdot, z_l))_F \mathcal{Q}_{2,k}e_2(z, z_l)\cdot e^{-|z_l|^2}, \quad z\in\mathbb{C}\ \ \forall f\in F.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Таким образом, системы функций $\{\mathcal{Q}_{j,k}e_j(\cdot, z_l)_{z_l\in\Omega_{0,k}}\}$, $j=1,2,$ — ортоподобные системы разложения со считающей мерой на $\Omega_{0,k}$. Так как T_j, $j=1,2,$ — унитарные операторы и операторы $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{S}_k^*$ — самосопряженные, то операторы $\mathcal{Q}_{j,k}$, $j=1,2,$ также самосопряженные. Учитывая это и соотношения (1.16), нетрудно увидеть, что

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{Q}_{1,k}]^{-1}f(z) &= \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} (f, e_1(\cdot, z_l))_F \mathcal{Q}_{1,k}e_1(z, z_l)\cdot e^{-|z_l|^2}, \quad z\in\mathbb{C}\ \ \forall f\in F,\\
[\mathcal{Q}_{2,k}]^{-1}f(z) &= \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} (f, e_2(\cdot, z_l))_F \mathcal{Q}_{2,k}e_2(z, z_l)\cdot e^{-|z_l|^2}, \quad z\in\mathbb{C}\ \ \forall f\in F.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Из условия (1.17), леммы 1 и аналога равенства Парсеваля [5] следует равенство

$$
\|[\mathcal{Q}_{1,k}]^{-1}e_1(\cdot,\lambda)\|_F^2 = \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} |([\mathcal{Q}_{1,k}]^{-1}e_1(\cdot,\lambda), \mathcal{Q}_{1,k}e_2(\cdot, z_l))_F|^2 e^{-|z_l|^2}
$$

$$
= \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} |(e_1(\cdot,\lambda), e_2(\cdot, z_l))_F|^2 e^{-|z_l|^2} = \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} |(e_2(\cdot,\lambda), e_1(\cdot, z_l))_F|^2 e^{-|z_l|^2}
$$

$$
= \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} |([\mathcal{Q}_{2,k}]^{-1}e_2(\cdot,\lambda), \mathcal{Q}_{2,k}e_1(\cdot, z_l))_F|^2 e^{-|z_l|^2} = \|[\mathcal{Q}_{2,k}]^{-1}e_2(\cdot,\lambda)\|_F^2 \ \ \forall\lambda\in\Omega_0^k.
$$

Положим

$$
p(z) \overset{def}{=} \sum_{p=1}^{n} c_p e_1(\cdot, z_p), \quad q(z) \overset{def}{=} \sum_{p=1}^{n} c_p e_2(\cdot, z_p),
\tag{1.18}
$$

где $\{z_p\}_{p=1}^n$ — произвольный набор точек из Ω_0^k, а $c_p, p=1,\dots,n$ — произвольный набор комплексных чисел. Из равенства (1.1) вытекает соотношение

$$
(p, e_2(\cdot,\lambda_2))_F = (q, e_1(\cdot,\lambda_2))_F \ \ \forall\lambda_2\in\Omega_{0,k},
\tag{1.19}
$$

Действительно, равенство (1.1) перепишем в виде

$$
(e_1(\cdot,\lambda_1), e_2(\cdot,\lambda_2))_F = (e_2(\cdot,\lambda_1), e_1(\cdot,\lambda_2))_F \ \ \forall\lambda_1\in\Omega_0^k,\ \forall\lambda_2\in\Omega_{0,k}.
\tag{1.20}
$$

Возьмем в равенстве (1.20) последовательно в качестве $\lambda_1\in\Omega_0^k$ значения из набора $\{z_p\}_{p=1}^n$, умножим полученные равенства на числа c_p, соответственно, и сложим полученные выражения; при этом воспользуемся линейностью скалярного произведения по первому аргументу, а также определениями (1.18). В результате получим равенство (1.19). Учитывая (1.19) и аналог равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения [5], получим соотношение

$$
\|[\mathcal{Q}_{1,k}]^{-1}p\|_F^2 = \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} |(p, e_2(\cdot, z_l))_F|^2 e^{-|z_l|^2} = \sum_{z_l\in\Omega_{0,k}} |(q, e_1(\cdot, z_l))_F|^2 e^{-|z_l|^2} = \|[\mathcal{Q}_{2,k}]^{-1}q\|_F^2.
\tag{1.21}
$$

По теореме Банаха (см., например, [11, теорема 2]) из равенства (1.21) вытекает, что существует обратимый унитарный оператор $A\colon F^k \mapsto F^k$ такой, что

$$
A\circ[\mathcal{Q}_{1,k}]^{-1}e_1(\cdot,\lambda) \mapsto [\mathcal{Q}_{2,k}]^{-1}e_2(\cdot,\lambda) \ \ \forall\lambda\in\Omega_0^k
$$

или

$$\mathcal{Q}_{2,k} \circ A \circ [\mathcal{Q}_{1,k}]^{-1} e_1(\cdot,\lambda) \mapsto e_2(\cdot,\lambda) \quad \forall \lambda \in \Omega_0^k. \tag{1.22}$$

Из соотношения (1.22) и теоремы 2 работы [14] получим, что пространства V_F^k и U_F^k, определенные соотношениями (1.4), эквивалентны (это записывается как $V_F^k \cong U_F^k$), что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Обозначим (см. (0.1)) для $k \geq 1$

$$\widetilde{F}^k \stackrel{def}{=} \{\widetilde{f} \in \widetilde{F} \colon f \in F^k,\, \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{F}^k} \stackrel{def}{=} \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{F}}\}, \quad \widehat{F}^k \stackrel{def}{=} \{\widehat{f} \in \widehat{F} \colon f \in F^k,\, \|\widehat{f}\|_{\widehat{F}^k} \stackrel{def}{=} \|\widehat{f}\|_{\widehat{F}}\}.$$

Пространство $\overline{F}^k$ состоит из функций, комплексно-сопряженных к функциям пространства F^k:

$$\overline{F}^k = \{h \colon \overline{h} \in F^k,\, (h_1,h_2)_{\overline{F}^k} \stackrel{def}{=} (\overline{h}_2,\overline{h}_1)_{F^k} \quad \forall \overline{h}_1,\overline{h}_2 \in F^k\}.$$

Предложение 1. *Для произвольного $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$, пространство $\widetilde{F}^k$ совпадает с пространством F^k, а пространство $\widehat{F}^k$ совпадает с пространством $\overline{F}^k$.*

Доказательство. По теореме Баргмана [2] $\widetilde{F} = F$, $\widehat{F} = \overline{F}$; отсюда можно получить, что $\widetilde{F}^k = F^k$, $\widehat{F}^k = \overline{F}^k$. Действительно, очевидно, что

$$\|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{F}^k} = \int\limits_{\mathbb{C}} |\widetilde{f}(z)|^2\, d\sigma(z) = \|\widetilde{f}\|^2_F \quad \forall \widetilde{f} \in F^k, \tag{1.23}$$

$$\widetilde{\exp(\lambda z)} = \exp(\overline{\lambda} z), \quad \widetilde{e_1(\cdot,\lambda)} = e_2(\cdot,\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.24}$$

Множество Ω_0^k симметрично относительно вещественной оси, поэтому из соотношений (1.2), (1.3), (1.23), (1.24) следует, что $\widetilde{F}^k = F^k$. Аналогично показывается, что $\widehat{F}^k = \overline{F}^k$.

Предложение доказано.

Заметим, что теорема 1 дает условия на некоторое счетное множество точек $\Omega_0^k \subset \mathbb{C}$, при выполнении которых след любой функций из пространства F^k на множестве Ω_0^k является также следом некоторой функции из пространства $\overline{F}^k$, т. е. для любой $f \in F^k$

$$f \in F^k \iff \{f(z_l)\}_{z_l \in \Omega_0^k} \in V_F^k.$$

По теореме 1 выполнено $V_F^k \cong U_F^k$; при этом

$$\exists h \in \overline{F^k} \colon h(z_l) = f(z_l), \quad z_l \in \Omega_0^k, \quad \|h\|_{\overline{F}} \asymp \|f\|_F.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Существует линейный непрерывный обратимый оператор $\mathcal{B} \colon F^k \to \overline{F}^k$ такой, что*

$$f(z_l) = \mathcal{B} f(z_l) \quad \forall z_l \in \Omega_0^k,\ \forall f \in F^k.$$

2. Теорема 1 для случая других множеств $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$

В качестве множества Ω_0 можно рассмотреть и другие множества. Например, рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть задано число $p \in \mathbb{N}$ и

$$\Omega_0 \stackrel{def}{=} \bigl\{z \in \mathbb{C} \colon z = n_l + \pi i m_l,\, n_l/p \in \mathbb{Z},\, m_l p \in \mathbb{Z},\, l \in \mathbb{N}\bigr\}, \tag{2.1}$$

т. е. целые числа n_l делятся на p, а числа m_l рациональные со знаменателем p.

2. Пусть задано число $p \in \mathbb{N}$ и

$$\Omega_0 \stackrel{def}{=} \big\{ z \in \mathbb{C} \colon z = n_l + \pi i m_l, \ n_l p \in \mathbb{Z}, \ m_l/p \in \mathbb{Z}, \ l \in \mathbb{N} \big\}, \tag{2.2}$$

т. е. целые числа m_l делятся на p, а числа n_l рациональные со знаменателем p.

3. Пусть задано число $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ и $\Omega_0 \stackrel{def}{=} \big\{ z \in \mathbb{C} \colon z = n_l + \pi i m_l, \ l \in \mathbb{N} \big\}$, где вещественные числа n_l, m_l выбраны так, что либо $n_l/a \in \mathbb{Z}, \ m_l a \in \mathbb{Z}, \ l \in \mathbb{N}$, либо $n_l a \in \mathbb{Z}, \ m_l/a \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$.

Множества Ω_0, обозначенные в пп. 1–3, называются решетками фон Неймана [4, Remark 1]. Эти множества изучались в [3;4;12;13] и в др. работах. Решетка фон Неймана определяется как множество

$$\Omega_0 \stackrel{def}{=} \big\{ z \in \mathbb{C} \colon z = a \cdot n + ib \cdot m, \ a \cdot b = \pi, \ n, m \in \mathbb{Z} \big\}.$$

По сути, это определение эквивалентно определениям, приведенным в пп. 1–3. В пп. 1–3 мы выделяем различные типы решеток фон Неймана. Это необходимо, чтобы изучить свойство согласования систем функций $\{e_j(\cdot, \lambda)\}_{\lambda \in \Omega_0}$, $j = 1, 2$. Для множеств Ω_0, перечисленных в пп. 1–3, определим как в (0.4) множества Ω_0^k, $\Omega_{0,k}$.

Предложение 2. *В случаях* 1–3 *множество* Ω_0^k *симметрично относительно вещественной оси. В случаях* 1, 2 *при условии* $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, *выполнено включение* $\Omega_0^k \subset \Omega_0 \subset \Omega_{0,k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о несложно получить из определения множества Ω_0.

Предложение 3. *Для систем функций* $\{e_j(\cdot, \lambda)\}_{\lambda \in \Omega_0}$, *где множество* Ω_0 *определено условиями* 1–3, *выполнено условие согласования* (0.3). *Также верно равенство* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично приведенному выше (см. (0.3), лемма 1).

Можно увидеть, что метод доказательства теоремы 1 легко переносится на случаи множества Ω_0, приведенные в пп. 1–3. Таким образом, справедливо следующее

З а м е ч а н и е. Утверждения разд. 2 данной статьи (лемма 1, предложение 1, теорема 1) в случаях множеств Ω_0, приведенных в пп. 1–3, также верны. Доказательства этих утверждений аналогичны соответствующим доказательствам утверждений разд. 2.

Система экспонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Omega_0}$ полна в пространстве F [3]. Однако Ω_0 не является ни сэмплинг — множеством, ни интерполяционным множеством [3].

Рассмотрим случаи 1, 2 множества Ω_0 при условии $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Из соотношений (1.6), (1.7) и теоремы 3 из работы В. В. Напалкова и В. В. Напалкова (мл.) “Об эквивалентности гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, связанных специальным преобразованием” в этом журнале (2020, Т. 26, № 2) вытекает, что в пространствах последовательностей V_F^k и U_F^k можно ввести эквивалентные нормы вида

$$\|\{\widetilde{f}(z_l)\}_{z_l \in \Omega_0^k}\|_{V'^k_F} \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} |\widetilde{f}(z_l)|^2 \cdot e^{-|z_l|^2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{z_l \in \Omega_0^k} |\widetilde{f}(z_l)|^2 \cdot e^{-|z_l|^2} + \sum_{z_l \in \Omega_{0,k} \setminus \Omega_0^k} |\widetilde{f}(z_l)|^2 \cdot e^{-|z_l|^2}}; \tag{2.3}$$

$$\|\{\widehat{f}(z_l)\}_{z_l \in \Omega_0^k}\|_{U'^k_F} \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum_{z_l \in \Omega_{0,k}} |\widehat{f}(z_l)|^2 \cdot e^{-|z_l|^2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{z_l \in \Omega_0^k} |\widehat{f}(z_l)|^2 \cdot e^{-|z_l|^2} + \sum_{z_l \in \Omega_{0,k} \setminus \Omega_0^k} |\widehat{f}(z_l)|^2 \cdot e^{-|z_l|^2}}. \tag{2.4}$$

Обозначим через ${V'}^k_F$, ${U'}^k_F$ гильбертовы пространства, состоящие из последовательностей пространств V^k_F, U^k_F с нормами (2.3), (2.4) соответственно. Пространства ${V'}^k_F$, ${U'}^k_F$ эквивалентны пространствам V^k_F, U^k_F соответственно. Таким образом, если множество Ω_0 определено соотношениями (2.1), (2.2) и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, то $\Omega_0^k \subset \Omega_{0,k}$ и в пространствах ${V'}^k_F$, ${U'}^k_F$ нормы выражаются согласно равенствам (2.3), (2.4) через квадраты модулей членов последовательностей.

Пространства V^k_F и U^k_F эквивалентны для $k > 1$ по теореме 1. Однако теорема 1 не дает ответа для случая $k = 1$, т. е. для случая пространств V^1_F и U^1_F. В силу равенства (0.3) выполнено условие согласованности систем функций $\{e_j(\cdot, \lambda)\}_{\lambda \in \Omega_0}$, $j = 1, 2$. Возникает вопрос: будут ли пространства последовательностей V^1_F и U^1_F эквивалентны?

3. Контрпримеры

Сейчас мы докажем, что в самом общем случае — см. с. 143 работу авторов в данном журнале (2022, Т. 28, № 3) — функции из пространств $\widetilde{H}$, $\widehat{H}$ не могут, вообще говоря, принимать любые значения из $\mathbb{C}$. Пусть H — произвольное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на множестве Ω, и $\{e(\cdot, t)\}_{t \in \Omega}$ — некоторая полная система функций из H. Определим пространство $\widetilde{H}$ следующим образом:

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (e(\cdot, z), f)_H \quad \forall z \in \Omega, \quad \widetilde{H} = \{\widetilde{f}, f \in H\},$$

$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}.$$

Предположим, что найдется $t_0 \in \Omega$ такое, что $f(t_0) = (e(\cdot, t_0), f)_H$ $\forall f \in H$. Умножим обе части этого равенства на число $i \in \mathbb{C}$. Из свойств скалярного произведения следует

$$i \cdot f(t_0) = i \cdot (e(\cdot, t_0), f)_H = -(e(\cdot, t_0), i \cdot f)_H = -i \cdot f(t_0).$$

Значит, $2i \cdot f(t_0) = 0$ $\forall f \in H$, поэтому $f(t_0) = 0$ $\forall f \in H$. Таким образом, из условия

$$\widetilde{f}(t_0) = f(t_0) \quad \forall f \in H, \quad t_0 \in \Omega,$$

следует $f(t_0) = 0$ $\forall f \in H$.

Далее мы построим пространства последовательностей комплексных чисел V и U, являющихся сужениями на некоторое дискретное подмножество комплексной плоскости функций из F, для которых условие $V \cong U$ не выполняется.

Рассмотрим для определенности множество точек $\Omega_{0,2} = (1/2)\Omega_0$. Заметим, что мы можем взять вместо множества $\Omega_{0,2}$ любое множество $\Omega_{0,k} = (1/k)\Omega_0$, где $k > 1$. Система экспонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Omega_{0,2}}$ полна в пространстве F согласно результатам из [4]. Известно (см., например, [15]), что оператор умножения на экспоненту

$$A_a\colon f \to e^{az} f, \quad f \in F, \tag{3.1}$$

не является ограниченным оператором, действующим из F в F, если $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Определим множество $\Omega'_{0,2}$: $\Omega'_{0,2} \overset{def}{=} \Omega_{0,2} + a$. Множество $\Omega'_{0,2}$ есть сдвиг множества $\Omega_{0,2}$ на число a. Система экспонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Omega'_{0,2}}$ также полна в пространстве F [4]. Определим гильбертовы пространства последовательностей комплексных чисел V и U:

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (\exp(\tau z), f(\tau))_F \quad \forall z \in \Omega_{0,2}, \quad V = \{\widetilde{f},\, f \in F\}, \quad (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_V \overset{def}{=} (f_2, f_1)_F \quad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in V,$$
$$\widehat{f}(z) \overset{def}{=} (\exp(\tau(z+a)), f)_F \quad \forall z \in \Omega_{0,2}, \quad U = \{\widehat{f},\, f \in F\}, \quad (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)_U \overset{def}{=} (f_2, f_1)_F \quad \forall \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in U.$$

Покажем теперь, что пространства U и V не эквивалентны. Действительно, предположим противное: пусть U и V эквивалентны. Тогда по теореме 2 из [14] существует линейный непрерывный взаимно однозначный оператор $A\colon F \to F$ такой, что $A\colon e^{\lambda z} \to e^{az}e^{\lambda z}\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Множество $P \stackrel{def}{=} \mathrm{span}\{\exp(\lambda z)\}_{\lambda\in\Omega_{0,2}}$ является плотным в пространстве F (см.(1.5)). В силу теоремы Банаха [11, теорема 2] оператор A, который действует на функциях из P по правилу

$$A\colon p(z) \to e^{az}p(z)\ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

может быть продолжен единственным образом до линейного непрерывного взаимно однозначного оператора A', действующего из F на F. Из сходимости по норме пространства F вытекает поточечная сходимость при $\forall z \in \mathbb{C}$, и функция e^{az} нигде не обращается в нуль. Отсюда нетрудно увидеть, что оператор A' совпадает с оператором A_a (см. (3.1)). Но оператор A_a не является ограниченным. Значит, пространства U и V не эквивалентны, т. е. состоят из разных последовательностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aronszajn N.** Theory of reproducing kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 68, no. 3. P. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7
2. **Bargmann V.** On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14, no. 3. С. 187–214. doi: 10.1002/cpa.3160140303
3. **K.Seip, R. Wallsten** Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II // J. reine angew. Math. 1992. Vol. 429. P. 107–113. doi:10.1515/crll.1992.429.107
4. **K. Seip** Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space I // J. reine angew. Math. 1992. Vol. 429. P. 92–106. doi: 10.1515/crll.1992.429.91
5. **Лукашенко Т.П.** О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 5. С. 187–206.
6. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 588 с.
7. **Напалков В.В. (мл.)** Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 1. С. 31–42.
8. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория, М.: ИЛ, 1962. 896 с.
9. **В. В. Напалков (мл.)** Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 4, № 5. С. 91–104.
10. **Напалков В. В., Напалков В. В. (мл.)** К вопросу о совпадении гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами, связанных специальным преобразованием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 149–159. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-149-159
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
12. **Daubechies I. and Grossmann A.** Frames in the Bargmann space of entire functions // Comm. Pure Appl. Math. 1988. Vol. 41. P. 151–164.
13. **Lyubarskii Y.I.** Frames in the Bargmann space of entire functions // Entire and Subharmonic Functions / ed. Boris Ya Levin. Vol. 11 of *Adv. Sov. Math.*. Providence: Amer. Math. Soc., 1992. P. 167–180. doi: 10.1090/advsov/011
14. **Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)** Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 665–667.
15. **Newman D.J., Shapiro H.S.** Certain Hilbert spaces of entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 72, no. 6. P. 971–977. doi: 10.1090/S0002-9904-1966-11608-7

Поступила 23.03.2023
После доработки 28.04.2023
Принята к публикации 2.05.2023

Напалков Валерий Валентинович
д-р физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа
e-mail: vnap@mail.ru

Нуятов Андрей Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева
г. Нижний Новгород
e-mail: nuyatov1aa@rambler.ru

REFERENCES

1. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 68, no. 3, pp. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7
2. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, vol. 14, no. 3, pp. 187–214. doi: 10.1002/cpa.3160140303
3. Seip K., Wallsten R. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space II. *J. reine angew. Math.*, 1992, vol. 429, pp. 107–113. doi: 10.1515/crll.1992.429.107
4. Seip K. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space I. *J. reine angew. Math.*, 1992, vol. 429, pp. 91–106. doi: 10.1515/crll.1992.429.91
5. Lukashenko T.P. Properties of expansion systems similar to orthogonal ones. *Izvestiya: Mathematics*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 1035 –1054. doi: 10.1070/IM1998v062n05ABEH000215
6. Riesz F., Sző́kefalvi-Nagy B. *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Paris, Gauthier-Villars, 1975, 488 p. ISBN 2040018700. Translated to Russian under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu*, Moscow, Mir Publ., 1979, 588 p.
7. Napalkov V.V. (Jr.) On an orthosimilar system in the space of analytical function and a problem of describing the dual space. *Ufa Math. J.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 30–41.
8. Dunford N.J., Schwartz J.T. *Linear Operators. Part I: General Theory*, John Wiley & Sons Inc, 1958. ISBN: 9780470226056. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Moscow, Inostr. Liter Publ., 1962, 896 p.
9. Napalkov V.V. (Jr.) Orthosimilar expansion systems in space with reproducing kernel. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 88-100. doi: 10.13108/2013-5-4-88
10. Napalkov V.V., Napalkov V.V., Jr. On the coincidence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transformation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 149–159 . doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-149-159
11. Kantorovich L.V., Akilov G.P., *Functional Analysis*, Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN 0080264867. Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p.
12. Daubechies I., Grossmann A. Frames in the Bargmann space of entire functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1988, vol. 41, no. 2, pp. 151–164. doi: 10.1002/cpa.3160410203
13. Lyubarskii Y.I. Frames in the Bargmann space of entire functions In: *Entire and Subharmonic Functions*, ed. Boris Ya Levin, vol. 11 of *Adv. Sov. Math.*, Providence, Amer. Math. Soc., 1992, pp. 167–180. doi: 10.1090/advsov/011
14. Napalkov V. V.; Napalkov V. V. Jr. On isomorphism of reproducing kernel Hilbert spaces. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 270–272. doi: 10.1134/S1064562417030243
15. Newman D.J., Shapiro H.S. Certain Hilbert spaces of entire functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 72, no. 6, pp. 971-977. doi: 10.1090/S0002-9904-1966-11608-7

Received March 23, 2023
Revised April 28, 2023
Accepted May 2, 2023

Valerii Valentinovich Napalkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, 450077 Russia, e-mail: vnap@mail.ru .

Andrey Alexandrovich Nuyatov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, 603950 Russia, e-mail: nuyatov1aa@rambler.ru .

Cite this article as: V. V. Napalkov (jr.), A. A. Nuyatov. On Hilbert spaces of sequences formed by values of functions from the Bargmann–Fock space. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 104–114.