ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.968

ВОЗМУЩЕНИЕ ПРОСТОЙ ВОЛНЫ В МОДЕЛИ ДОМЕННОЙ СТЕНКИ

Л. А. Калякин

Рассматривается нелинейное гиперболическое уравнение в частных производных, похожее на уравнение sine-Gordon, которое моделирует динамику доменной стенки в слабом ферромагнетике. При постоянных коэффициентах существует решение в виде простой (бегущей) волны. В частных случаях оно выписывается через элементарные функции. Для уравнения с переменными коэффициентами решения в явной форме не выписываются. В случае медленно меняющихся коэффициентов строится асимптотическое решение. Главный член асимптотики представляет простую волну, которая находится как решение обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами. Обсуждаются и сравниваются разные способы вычисления скорости такой волны. Выяснено, что эффективность того или иного способа зависит от соотношения между коэффициентами исходного уравнения.

Ключевые слова: простая волна, возмущение, малый параметр, асимптотика.

L. A. Kalyakin. Perturbation of a simple wave in a domain wall model.

A nonlinear hyperbolic partial differential equation similar to the sine-Gordon equation is considered; it models the dynamics of a domain wall in a weak ferromagnet. If the coefficients are constant, there is a solution in the form of a simple (traveling) wave. In particular cases, it is written in terms of elementary functions. For an equation with variable coefficients, the solutions cannot be written explicitly. In the case of slowly varying coefficients, an asymptotic solution is constructed. The leading order term of asymptotics represents a simple wave, which is found as a solution to an ordinary nonlinear differential equation with slowly varying coefficients. Different methods for calculating the velocity of such a wave are discussed and compared. It is found that the effectiveness of a certain method depends on the ratio between the coefficients of the original equation.

Keywords: simple wave, perturbation, small parameter, asymptotics.

MSC: 35L70 34E10

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-91-101

70-летию Алексея Руфимовича Данилина посвящается

1. Введение

Исходное уравнение

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \Omega^2\sin\phi\cos\phi + \omega^2\,\sin\phi + \alpha\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

представляет собой модель для описания динамики доменных границ в слабом ферромагнетике [1; 2]. Уравнение имеет тривиальные решения — равновесия $\phi\equiv 0$, $\phi\equiv\pi$. Для магнитодинамики интерес представляет задача с краевыми условиями на бесконечности

$$\phi(x,t)\to 0 \ \text{ при } x\to-\infty, \quad \phi(x,t)\to\pi \ \text{ при } \ x\to+\infty. \tag{1.2}$$

Если коэффициенты постоянны, то можно выделить решения, зависящие от одной переменной $\phi=\Phi_0(x-v\,t)$; с ними связано название — простая (или бегущая) волна. Такая волна интерпретируется как доменная стенка, двигающаяся с постоянной скоростью v. Ее отыскание сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[v^2-c^2]\frac{d^2\Phi_0}{ds^2} + \Omega^2\sin\Phi_0\cos\Phi_0 + \omega^2\,\sin\Phi_0 - \alpha\,v\frac{d\Phi_0}{ds} = 0, \quad s=x-v\,t. \tag{1.3}$$

В этом уравнении присутствует параметр v — скорость волны и решения существуют при любой скорости. Однако из-за краевых условий возникают ограничения на v. Подходящим решениям соответствуют фазовые траектории — сепаратрисы, которые соединяют неподвижные точки $\Phi_0 \equiv 0$ и $\Phi_0 \equiv \pi$. Наличие таких траекторий зависит от коэффициентов уравнения. Известно, что при $\omega^2 < \Omega^2$ такая сепаратриса существует при единственном значении v, определяемом из соотношения

$$\alpha \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}\, \Omega = \omega^2. \tag{1.4}$$

Эта сепаратриса соединяет два седла с координитами $\Phi_0 \equiv 0$ и $\Phi_0 \equiv \pi$. При иных значениях v траектория из $\Phi \equiv 0$ входит в другие устойчивые равновесия, так что соответствующее решение не удовлетворяет краевым условиям. В случае $\omega^2 > \Omega^2$ при любой скорости $0 < v < c$ траектория из седла $\Phi_0 \equiv 0$ входит в точку $\Phi_0 \equiv \pi$, которая оказывается либо узлом, либо фокусом.

Простая волна представляет собой выделенное изолированное решение. Проблема стабилизации других решений к простой волне хорошо исследована для параболических уравнений Колмогорова — Петровского — Пискунова (КПП) [3;4]. Для неинтегрируемых гиперболических уравнений подобные общие результаты отсутствуют.

Хотя уравнение (1.3) не интегрируемо, но оно обладает спецификой, которая была обнаружена Звездиным в [1]. Волна со скоростью, удовлетворяющей соотношению (1.4), выражается через сепаратрисное решение уравнения маятника

$$\Phi_0(s) = 2 \arctan \exp(s\, \lambda_0), \quad \lambda_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad s = x - v\, t. \tag{1.5}$$

Асимптотика вблизи равновесий описывается формулами

$$\Phi_0(s) = \begin{cases} \exp(\lambda_0\, s)[2 + \mathcal{O}\big(\exp(\lambda_0\, s)\big)], & s \to -\infty, \\ \pi + \exp(-\lambda_0\, s)[2 + \mathcal{O}\big(\exp(-\lambda_0\, s)\big)], & s \to +\infty. \end{cases} \tag{1.6}$$

При коэффициентах $\omega^2 > \Omega^2$ существуют простые волны с другими скоростями, для которых явные представления отсутствуют. Для них известны асимптотики вблизи равновесий:

$$\Phi_0(s) = \begin{cases} \exp(\lambda_- s)[c_- + \mathcal{O}\big(\exp(\lambda_- s)\big)], & s \to -\infty, \\ \pi + \exp(-\lambda_+ s)[c_+ + \mathcal{O}\big(-\exp(\lambda_+ s)\big)], & s \to +\infty, \end{cases} \qquad c_\pm = \mathrm{const} \neq 0. \tag{1.7}$$

Числа $\lambda_\pm > 0$ зависят от v и удовлетворяют алгебраическим уравнениям

$$(v^2 - c^2)(\lambda_\pm)^2 \pm \alpha\, v \lambda_\pm + \Omega^2 \mp \omega^2 = 0. \tag{1.8}$$

В случае (1.4) оба уравнения выполняются при $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda_0$.

Если коэффициенты непостоянные, то простой волны в общем случае не существует. Для анализа задачи возможно применение либо численных [5], либо асимптотических методов [6;7]. Если коэффициенты меняются медленно, например зависят от переменной $\tau = \varepsilon\, t$, содержащей малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$, то можно строить асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ решение, похожее на бегущую волну. На этом пути Звездиным [1] было предложено уравнение

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\, \Omega \Big) + \alpha \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\, \Omega = \omega^2. \tag{1.9}$$

Функция $V(\varepsilon t)$ описывает медленную деформацию скорости для волны, которая в невозмущенной форме задается формулой (1.5). Ниже обсуждается вывод такого уравнения, обосновывается его упрощение и анализируется альтернативный подход, пригодный для волны, отличной от (1.5).

2. Постановка задачи

Коэффициенты $c, \Omega^2, \alpha, \omega^2(\tau)$ в уравнении (1.1) предполагаются положительными функциями, гладко зависящими от переменной $\tau = \varepsilon t$. Малый параметр ε присутствует только в переменной τ. Отдельно обсуждается случай малых коэффициентов $\alpha \approx \omega^2 = \mathcal{O}(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$.

Для полноты постановки математической задачи дифференциальное уравнение (1.1) дополняется начальным условием

$$\phi(x,t)_{t=0} = \Phi_0(x), \quad \partial_t \phi(x,t)_{t=0} = -v_0 \Phi_0'(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Начальные данные берутся в виде следа простой волны; т. е. начальная функция $\Phi_0(s)$ при аргументе $s = x - v_0 t$ с начальной скоростью $0 < v_0 < c$ удовлетворяет невозмущенному уравнению (1.1) с постоянными (начальными) коэффициентами. Если начальная волна задана в форме (1.5), то скорость v_0 связана с начальными значениями коэффициентов соотношением (1.4), которое дает выражение

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{1 + \Omega^2 \alpha^2/\omega^4}}\Big|_{\tau=0},$$

и асимптотика вблизи равновесий определяется формулой (1.6). В этом случае

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{\Omega^2 + \omega^4/\alpha^2}}{c}\Big|_{\tau=0}.$$

В дальнейшем важную роль играет отношение коэффициентов $\beta(\tau) = \alpha\, v/(c^2 - v^2)$, которое определяет вронскиан уравнения (1.3). В случае (1.4) получается

$$\beta(\tau) = \frac{\omega^2}{\Omega^2} \frac{\sqrt{\Omega^2 + \omega^4/\alpha^2}}{c}.$$

Если $\omega^2 > \Omega^2$, то функция $\Phi_0(s)$ может быть отличной от (1.5), начальная скорость v_0 в общем случае не связана с начальными коэффициентами. От значения v_0 зависят показатели $\lambda_\pm$ в асимптотике начальной функции согласно (1.8).

Интерес представляет асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2), (2.1) при $\varepsilon \to 0$, пригодное до времен $t \le \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, когда деформация уравнения становится существенной.

3. Анзатц для асимптотического решения

Исследования долговременных эффектов медленных изменений составляют одно из популярных направлений в теории возмущений. Сюда, например, относятся задачи о медленной деформации осциллирующих систем, с изучением которых связано возникновение и развитие методов усреднения. Однако уравнение (1.1) относится к другому классу задач из-за наличия диссипационного слагаемого с множителем $\alpha > 0$. Здесь характерными являются решения типа простой волны с быстрой стабилизацией на бесконечности. Для интегрируемых уравнений в этом направлении известно много результатов, которые связываются с теорией возмущений солитонов. Для неинтегрируемых уравнений типа КПП либо (1.1) известны асимптотические конструкции, описывающие медленную деформацию простой волны [6; 8; 9]. Следует отметить, что строгие обоснования таких асимптотик отсутствуют. Более того, приводимые ниже результаты численных экспериментов указывают на ограниченность известных конструкций.

Исходный анзатц берется в виде отрезка ряда из слагаемых, которые образуют асимптотическую последовательность при $\varepsilon \to 0$ равномерно в широкой области $|x| + t \le \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$:

$$\phi_{as}(x,t;\varepsilon) = \Phi(s;\tau) + \varepsilon\, \phi_1(x,t;\varepsilon) + \varepsilon^2 \phi_2(x,t;\varepsilon) + \dots . \tag{3.1}$$

Первые члены асимптотики берутся в виде функций с одной быстрой переменной

$$s = x - \varepsilon^{-1} S(\tau) - \sigma(\tau) \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Функция $x - \varepsilon^{-1}S(\tau)$, называемая фазой, а также сдвиг фазы $\sigma(\tau)$ подлежат определению. Такой подход соответствует методу двух масштабов. В данной работе предъявлены способы определения главных членов асимптотики $\Phi(s;\tau), S(\tau)$ и дана оценка первой поправки $\varepsilon\phi_1$.

Подстановка анзатца (3.1) в исходное уравнение (1.1) и выделение главных членов порядка $\mathcal{O}(1)$, $\varepsilon \to 0$ приводит к одному уравнению на две функции: $\Phi(s,\tau)$ и $V_0(\tau) = S'(\tau)$. Оно записывается в форме обыкновенного дифференциального уравнения по быстрой переменной s:

$$[V_0^2 - c^2]\frac{d^2\Phi}{ds^2} + \Omega^2 \sin\Phi\cos\Phi + \omega^2\,\sin\Phi - \alpha\,V_0\frac{d\Phi}{ds} = 0. \tag{3.2}$$

Дополнительно ставится краевое условие, соответствующее исходному:

$$\Phi(s;\tau) \to 0 \ \text{ при } \ s \to -\infty, \quad \Phi(s;\tau) \to \pi \ \text{ при } \ s \to +\infty. \tag{3.3}$$

Таким образом, осуществляется поиск решение $\Phi(s;\tau)$, которое соответствует сепаратрисе, соединяющей неподвижные точки $\Phi = 0$ и $\Phi = \pi$. Решение зависит от медленного времени τ как от параметра, поскольку от τ зависят коэффициенты уравнения. В общей ситуации эту зависимость невозможно исключить никаким подбором скорости $V_0(\tau)$.

Возможны два подхода для отыскания Φ и V_0. Один из них основан на выборе функции $\Phi(s;\tau)$ с последующим определением скорости $V_0(\tau)$ из уравнения (3.2). Например, если исходная невозмущенная волна взята в форме (1.5), то в подобной форме можно искать возмущенную волну

$$\Phi(s,\tau) = 2\arctan\exp(s\,\Lambda), \quad \Lambda = \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V_0^2(\tau)}}, \quad s = x - \varepsilon^{-1}S(\tau) - \sigma(\tau). \tag{3.4}$$

Для такого решения уравнения (3.2) с условием (3.3) скорость $V_0(\tau)$ определяется однозначно из алгебраического уравнения (1.4):

$$\alpha\frac{V_0}{\sqrt{c^2 - V_0^2}}\,\Omega = \omega^2. \tag{3.5}$$

Согласование с начальными данными $V(0) = v_0$ выполняется автоматически в силу исходных ограничений. Фазовая функция $S(\tau)$ восстанавливается через интеграл. Поправка скорости $\varepsilon V_1(\tau) = \varepsilon\sigma'(\tau)$ и сдвиг фазы $\sigma(\tau)$ на этом этапе остаются неопределенными.

Если исходные коэффициенты удовлетворяют неравенству $\omega^2 < \Omega^2$, то никаких других решений для пары $\Phi(s,\tau), V_0(\tau)$ не существует. Подчеркнем, что в приведенной конструкции важно не столько явное выражение (3.4), сколько факт единственности скорости V_0 [9].

Если $\omega^2 > \Omega^2$, то уравнение (3.2) с условием (3.3) имеет решение при любой скорости $0 < V_0(\tau) < c$. Для этого случая возможен другой подход [7; 9]. Он начинается с определения скорости $V_0(\tau)$, а на втором этапе решается уравнение (3.2) для $\Phi(s,\tau)$[1]. Способ вычисления скорости $V_0(\tau)$ для случая $\omega^2 > \Omega^2$ приведен в разд. 6. Он не использует специфику начальной функции $\Phi_0(s)$. Предполагается лишь, что начальная волна соответствует сепаратрисе из $\Phi = 0$ в $\Phi = \pi$. Конструкция опирается на информацию об асимптотике (1.7) вблизи равновесия $\Phi = \pi$.

Поскольку функция $\Phi(s;\tau)$ как решение задачи (3.2), (3.3) быстро стабилизируется на бесконечности по переменной $s \to \pm\infty$, то нуль фазы $x - \varepsilon^{-1}S(\tau) + \sigma(\tau) = 0$ можно идентифицировать с траекторией центра волны. Очевидно, для нахождения траектории на далеких

[1]Конечно, в качестве $V_0(\tau)$ можно было бы взять корень уравнения (3.5). Но это возможно только в случае, когда начальная (невозмущенная) волна имеет специфическую форму (1.5), при этом возмущенная волна сохраняет эту форму со временем в виде (3.4).

временах, когда $\tau \approx 1$ помимо функции $S(\tau)$ требуется найти сдвиг фазы $\sigma(\tau)$ или поправки скорости $V_1(\tau) = \sigma'(\tau)$. Так же как в других подобных задачах теории возмущений, функция $V_1(\tau)$ определяется из требования малости первой поправки по сравнению с главным членом в асимптотическом решении.

4. Первая поправка и сдвиг фазы

Для первой поправки получается линеаризованное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + q(s;\tau)\phi_1 + \alpha\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = f(s;\tau) \tag{4.1}$$

с коэффициентом $q(s;\tau) = \dfrac{d}{d\phi}\big[\Omega^2\sin\phi\,\cos\phi + \omega^2\,\sin\phi\big]_{\phi=\Phi(s;\tau)}$. Правая часть f выражается через предыдущее приближение и зависит от одной быстрой переменной s. Эта функция выделяется из невязки F, которая возникает при подстановке главного члена асимптотики $\Phi(s;\tau)$ в исходное уравнение:

$$F(s;\tau) = \Big[\Big(\varepsilon\frac{d}{d\tau}\frac{x - S/\varepsilon - \sigma}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\Big)^2 - \frac{c^2\Omega^2}{c^2 - V^2}\Big]\Phi_{ss}(s;\tau) + \varepsilon^2\frac{d^2}{d\tau^2}\Big(\frac{x - S/\varepsilon - \sigma}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\Big)\Phi_s(s;\tau)$$

$$+\,\varepsilon\,\alpha\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{x - S/\varepsilon - \sigma}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\Big)\Phi_s(s;\tau) + \Omega^2\sin\Phi\cos\Phi + \omega^2\,\sin\Phi\Big|_{x-S/\varepsilon-\sigma=s}. \tag{4.2}$$

Здесь $V = V_0(\tau) + \varepsilon\,V_1(\tau)$ — скорость с учетом поправки $V_1 = \sigma'(\tau)$. Часть слагаемых в (4.2) порядка $\mathcal{O}(1)$ сокращается в силу выбора $\Phi(s;\tau)$. Нетрудно видеть, что неизвестная пока $V_1(\tau)$ входит в выражение для $f(s,\tau)$, которое составляется из слагаемых порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. На бесконечности $s \to \pm\infty$ асимптотику функции f можно связать с производной Φ_s в виде $f(s;\tau) = \mathcal{O}\big(s\,\Phi_s(s;\tau)\big)$, $s \to \pm\infty$.

В точной математической постановке уравнение (4.1) следует дополнить однородными начальными и краевыми условиями. В данной работе начальная задача для первой поправки не рассматривается. Мы ограничиваемся построением частного решения неоднородного уравнения в виде функции $\phi_1 = \Psi(s;\tau)$, зависящей от одной быстрой переменной:

$$[V_0^2 - c^2]\frac{d^2\Psi}{ds^2} + q(s;\tau)\Psi + \alpha\,V_0\frac{d\Psi}{ds} = f(s;\tau). \tag{4.3}$$

Явное представление для Ψ дается в терминах решения исходного нелинейного уравнения $\Phi(s;\tau)$ на основе фундаментальной системы решений однородного линеаризованного уравнения, соответствующего (4.3). Одно из таких решений дается производной $\Psi_1(s;\tau) = \Phi_s(s;\tau)$. С использованием вронскиана $W(s;\tau) = \exp(-\beta(\tau)\,s)$, где $\beta(\tau) = \alpha V_0(\tau)/[c^2 - V_0(\tau)^2]$, второе решение выписывается по формуле Лиувилля

$$\Psi_2(s;\tau) = \Phi_s(s;\tau)\int_0^s \frac{\exp(-\beta\eta)}{(\Phi_\eta(\eta;\tau))^2}\,d\eta. \tag{4.4}$$

Частное решение неоднородного уравнения можно найти в разной форме, исходя из решения однородного уравнения, например

$$\Psi(s;\tau) = \Phi_s(s;\tau)\int_0^s \frac{\exp(-\beta\eta)}{(\Phi_\eta(\eta;\tau))^2}\int_{-\infty}^{\eta} f(\zeta;\tau)\Phi_\zeta(\zeta;\tau)\exp(\beta\zeta)\,d\zeta\,d\eta. \tag{4.5}$$

Все функции под интегралами являются гладкими по быстрым переменным ζ, η.

В случае, когда для главного члена асимптотического решения используется формула (3.4), показатель β вычисляется с учетом соотношения (3.5):

$$\beta(\tau) = \alpha V_0(\tau)/[c^2 - V_0(\tau)^2] = \frac{\Lambda\omega^2}{\Omega^2}.$$

Отсюда следует, что при коэффициентах $\omega^2 < 2\Omega^2$ выполняется неравенство $2\Lambda > \beta$. Поэтому с учетом асимптотики

$$\Phi_s(s;\tau) \approx \exp(-\Lambda s), \qquad f(s;\tau)\Phi_s(s;\tau) \approx s \cdot \exp(-2\Lambda s), \quad s \to \infty,$$

внутренний интеграл ограничен при $\eta \to \infty$. Такой интеграл по бесконечному промежутку

$$J(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta;\tau)\Phi_\zeta(\zeta;\tau)\exp(\beta\zeta)\,d\zeta. \tag{4.6}$$

определяет главный член асимптотики первой поправки через решение однородного уравнения

$$\Psi(s;\tau) = J(\tau)\Psi_2(s;\tau)\big[1 + o(1)\big], \quad s \to \infty. \tag{4.7}$$

Используемая здесь функция $\Psi_2(s;\tau)$ определена в (4.4) и имеет асимптотику

$$\Psi_2(s;\tau) \approx \frac{1}{2}\exp((\Lambda - \beta)s), \quad s \to \infty.$$

Если $\omega^2 < 2\Omega^2$, то показатель имеет оценку $\Lambda - \beta > -\Lambda$. Следовательно, главный член асимптотики в поправке (4.7) либо неограничен (если $\Lambda - \beta > 0$), либо убывает медленнее $\Psi_1(s;\tau) = \Phi_s(s;\tau)$ при $s \to \infty$. Такие слагаемые интерпретируются как секулярные члены, поскольку ведут к нарушению требования асимптотичности в последовательности приближений (3.1). Они исключаются требованием обращения в нуль интеграла по бесконечному промежутку из (4.6):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta;\tau)\Phi_\zeta(\zeta;\tau)\exp(\beta\zeta)\,d\zeta = 0. \tag{4.8}$$

Из этого соотношения извлекается уравнение для поправки скорости $V_1(\tau)$, и затем определяется сдвиг фазы.

Для задачи с коэффициентами $\omega^2 > 2\Omega^2$ анализ первой поправки и выделение уравнения для $V_1(\tau)$ проводится другим способом в разд. 6.

5. Уравнение Звездина

В случае, когда возмущается специфическая волна в форме (3.4), поправку для скорости $V_1(\tau)$ (а значит, и сдвиг фазы) можно получить из других соображений. Идея состоит в использовании условия разрешимости (3.5). На этом пути возникает уравнение Звездина.

Проанализируем подробнее невязку, представленную в формуле (4.2). Для этого пересчитаем выражения с производными по медленной переменной τ при учете определения быстрой переменной $s = x - \varepsilon^{-1}S + \sigma$ и $V = S' + \varepsilon\sigma'$:

$$\varepsilon\frac{d}{d\tau}\frac{x - S/\varepsilon - \sigma}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega = \varepsilon(x - S/\varepsilon - \sigma)\frac{d}{d\tau}\frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega$$

$$= \varepsilon s\frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{\Omega}\frac{d}{d\tau}\frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\,;$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{x - S/\varepsilon - \sigma}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega = \varepsilon^2 s \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{\Omega} \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} - \varepsilon V \frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} - \varepsilon \frac{d}{d\tau} \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\,.$$

Если в качестве $\Phi(s;\tau)$ взято решение маятника (3.4), то часть слагаемых сокращается, и в невязке F остаются слагаемые с малыми множителями ε, обязанные зависимости функций $S(\tau), V(\tau)$ от медленного времени $\tau = \varepsilon\, t$, а также члены с диссипацией α и накачкой ω^2:

$$F = \Big[(c^2 - V^2)\Big(\frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)^2 \varepsilon^2 s^2 - 2V\Big(\frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)\,\varepsilon s\,\Big]\Phi_{ss}(s;\tau)$$

$$+ \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{\Omega}\Big(\varepsilon^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} + \varepsilon\alpha \frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)\, s\,\Phi_s(s;\tau)$$

$$- \varepsilon \Big[V \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big) + \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\Big)\Big]\Phi_s(s;\tau) - \alpha \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\,\Phi'(s) + \omega^2(\tau)\,\sin\Phi = 0.$$

Это выражение можно преобразовать, объединив два слагаемых с множителем ε:

$$F = \Big[(c^2 - V^2)\Big(\frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)^2 \varepsilon^2 s^2\Big]\Phi_{ss}(s;\tau) - V\Big(\frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)\,\varepsilon \frac{1}{\Phi_s s;\tau()}\Big(s\,(\Phi'(s))^2\Big)'$$

$$+ \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{\Omega}\Big(\varepsilon^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} + \varepsilon\alpha \frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)\, s\,\Phi_s(s;\tau)$$

$$- \varepsilon \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\Big)\Phi_s(s;\tau) - \alpha \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\,\Phi_s(s;\tau) + \omega^2(\tau)\,\sin\Phi\,.$$

Если $\Phi(s;\tau)$ — сепаратрисное решение маятника, то в силу первого интеграла $\sin\Phi = \Phi_s(s;\tau)$. В таком случае выбор скорости из соотношения

$$\alpha \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega = \omega^2(\tau) \tag{5.1}$$

гарантирует выполнение исходного уравнения с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Поскольку уравнение (5.1) не содержит малого параметра, то его решение определяет скорость лишь в главном члене асимптотики $V = V_0(\tau)$. В соотношение для скорости можно включить еще одно слагаемое:

$$\varepsilon \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega\Big) + \alpha \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\,\Omega = \omega^2(\tau). \tag{5.2}$$

Это соответствует уравнению Звездина (1.9) в медленном масштабе времени $\tau = \varepsilon t$. В таком случае невязка в исходном уравнении приобретает вид

$$F = \Big[(c^2 - V^2)\Big(\frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)^2 \varepsilon^2 s^2\Big]\Phi_{ss}(s;\tau) - V\Big(\frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)\,\varepsilon \frac{1}{\Phi_s(s;\tau)}\partial_s\Big(s\,(\Phi_s(s;\tau))^2\Big)$$

$$+ \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{\Omega}\Big(\varepsilon^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}} + \varepsilon\alpha \cdot \frac{d}{d\tau} \frac{\Omega}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Big)\, s\,\Phi_s(s;\tau) = 0.$$

Если диссипация и накачка малы $\alpha \approx \omega^2 \approx \varepsilon \ll 1$, то все коэффициенты в уравнении (5.2) имеют одинаковый порядок по ε. Такой результат соответствует теории возмущений для кинка уравнения синус-Гордона (sine-Gordon). В этом случае меняется линеаризованное уравнение и требование ортогональности (4.5) не содержит множителя с экспонентой:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\zeta;\tau)\Phi_\zeta(\zeta;\tau)\,d\zeta = 0. \tag{5.3}$$

Как раз для случая $\alpha \approx \omega^2 \approx \varepsilon$ при выборе скорости $V = V(\tau;\varepsilon)$ обнаруживается преимущество уравнения (5.2) по сравнению с (5.1): оставшаяся невязка не содержит секулярных слагаемых. В самом деле, оставшиеся слагаемые с $s^2\Phi_{ss}(s;\tau)$ и с $s\,\Phi_s(s;\tau)$ дают нулевую проекцию на функцию $\Phi_s(s;\tau)$ — решение однородного линеаризованного уравнения. Поэтому условие ортогональности в форме (5.3) выполняется. Это обеспечивает малость первой поправки в асимптотическом решении:

$$\phi_{as}(x,t;\varepsilon) = \Phi(s;\tau)\big[1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\big], \quad \varepsilon \to 0,$$

равномерно в широкой области $|x| + t \le \varepsilon^{-1}$. Надо иметь в виду, что в случае $\alpha \approx \omega^2 \approx \varepsilon$ уравнение (5.2) определяет лишь главный член в асимптотике скорости $V = V_0(\tau)$. Поправка скорости и сдвиг фазы находятся после анализа второй поправки $\phi_2(x,t;\tau)$ в асимптотическом решении. Ситуация здесь аналогична теории возмущения солитонов.

В общей ситуации, когда коэффициенты диссипации и накачки не малы: $\alpha \approx \omega^2 \gg \varepsilon$, уравнение (5.2) не дает каких-либо преимуществ по сравнению с (5.1). Более того, попытка использовать (5.2) для нахождения поправки скорости $V = V_0 + \varepsilon V_1$ приводит к ошибочному результату, что обнаруживается в первой поправке. В этом случае соотношение ортогональности надо брать в форме (4.6), и оно не является следствием (5.2) из-за множителя $\exp(\beta\, s)$.

Условие ортогональности (4.6) с учетом приведенных выше вычислений приводит к уравнению

$$\Big[\varepsilon\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}\,\Omega\Big) + \alpha\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}\,\Omega - \omega^2(\tau)\Big]a(\tau) - \varepsilon\Big[(V\beta+\alpha)\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{1}{\sqrt{c^2-V^2}}\,\Omega\Big)\Big]b(\tau) = 0, \quad (5.4)$$

которое можно использовать для нахождения скорости в первых двух членах асимптотики $V = V_0 + \varepsilon V_1$. Здесь коэффициенты a, b вычисляются через интегралы:

$$a(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_s^2(s;\tau)\,\exp(\beta(\tau)s)\,ds, \quad b(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s\,\Phi_s^2(s;\tau)\,\exp(\beta(\tau)s)\,ds.$$

Полученные результаты суммируем в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2), (2.1) *начальная функция задана в форме* (1.5). *Тогда главный член асимптотического решения строится в форме медленно деформирующейся волны* (3.4). *Если медленно деформирующиеся коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям $\omega^2(\tau) < 2\Omega^2(\tau)$ и $\alpha \approx \omega^2 \gg \varepsilon$, то скорость волны в первых членах асимптотики $V = V_0(\tau) + \varepsilon V_1(\tau)$ задается соотношением* (5.4), *а главный член $V_0(\tau)$ определяется алгебраическим уравнением* (5.1). *Если коэффициенты $\alpha \approx \omega^2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ малы, то главный член асимптотики скорости $V_0(\tau)$ определяется дифференциальным уравнением* (5.2); *при этом поправка скорости $\varepsilon V_1(\tau)$ остается неопределенной.* $\square$

6. Уравнение Гамильтона — Якоби

Вычисление фазовой функции $S(\tau)$ составляет ключевой этап в асимптотической конструкции. Описанный выше способ нахождения скорости возмущенной волны $V_0 = S'(\tau)$ годится только для задачи со специфической начальной функцией (1.5) и дает асимптотическое решение в похожей форме (3.4). Если коэффициенты уравнения $\omega^2 > \Omega^2$, то допустимы другие начальные данные, для которых описанная конструкция не годится. Более того, если $\omega^2 > 2\Omega^2$, то даже в случае (1.5) сохранение структуры волны в столь специфической форме (3.4) не гарантировано. Косвенно об этом свидетельствует разрушение соотношения ортогональности (4.6), поскольку фигурирующий в этой форме интеграл расходится при $\omega^2 > 2\Omega^2$.

Альтернативный способ нахождения скорости $V_0(\tau)$ основан на требовании [7], согласно которому *показатель λ_+ в асимптотике на бесконечности остается постоянным и совпадает* *с начальными из* (1.7). При данном подходе не используется никакая другая информация о начальной функции. Такое требование на структуру функции $\Phi(s;\tau)$ приводит к уравнению на скорость $V_0(\tau)$. Оно получается из дифференциального уравнения (3.2) в пределе при $s \to \infty$ с учетом краевого условия (3.3):

$$\big[(V_0^2 - c^2\big]\lambda_+^2 + \alpha V_0 \lambda_+ + \Omega^2 - \omega^2 = 0. \tag{6.1}$$

Фактически это характеристическое уравнение (1.8), в котором неизвестной является скорость V_0 при известном (начальном) λ_+. В более общих задачах [7] соотношение (6.1) соответствует уравнению Гамильтона — Якоби для фазовой функции S. В частном случае при постоянных (начальных) коэффициентах на этом пути получается фаза начальной волны: $x - \varepsilon^{-1}S(\tau) \equiv x - v_0 t$.

Из двух корней алгебраического уравнения (6.1) выбирается тот, который соответствует начальному условию $V_0(0) = v_0$. Такой корень существует, поскольку v_0 удовлетворяет уравнению в начальный момент в силу выбора λ_+.

$$V_0(\tau) = \frac{1}{2\lambda_+}\big[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(c^2\lambda_+^2 + \omega^2 - \Omega^2)}\,\big]. \tag{6.2}$$

После вычисления скорости восстанавливается траектория возмущенной волны

$$x = \varepsilon^{-1}\int\limits_0^\tau V_0(\eta)\,d\eta.$$

с точностью до сдвига фазы. Сдвиг фазы находится после вычисления поправки скорости, как это показано в [7]. Сформулируем результат данного раздела.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2), (2.1) *медленно деформирующиеся коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям* $\omega^2(\tau) > \Omega^2(\tau)$ *и начальная функция имеет асимптотику* (1.7). *Тогда главный член асимптотического решения* (3.1) *в форме медленно деформирующейся волны* $\Phi(s;\tau)$ *определяется из обыкновенного дифференциального уравнения* (3.2) *с краевыми условиями* (3.3). *Скорость волны в главном члене асимптотики* $V = V_0(\tau)$ *задается соотношением* (6.2).

Комментарий. Описанный подход предназначен для задачи с коэффициентами $\omega^2 > \Omega^2$ и с начальной волной, отличной от специальной формы (1.5), когда нет других способов определения скорости. Тем не менее вычисления по формуле (6.2) можно реализовать и в исключительном случае (1.5) при $\omega^2 > \Omega^2$. Получаемые таким способом скорость и траектория на далеких временах, где $\tau \approx 1$, отличаются от тех, что получаются из уравнения (5.1). Это отличие ставит под сомнение пригодность выполненных асимптотических конструкций. Сомнительной может показаться сама идея о постоянстве (независимости от τ) показателя λ_+ в асимптотике на переднем фронте волны $s \to \infty$, поскольку в исключительном случае (1.5) структура (3.4) для функции $\Phi(s;\tau)$ указывает на зависимость от τ соответствующего показателя $\Lambda = \Omega/\sqrt{c^2 - V_0^2(\tau)}$. Однако надо учесть, что функция $\Phi(s;\tau)$ как решение уравнения (3.2) зависит от выбора скорости V_0 и не обязана совпадать с (3.4) при $\omega^2 > \Omega^2$. Поскольку строгое обоснование асимптотики (3.1) отсутствует, то пригодность того или иного приближения можно оценить из численных экспериментов путем сравнения разных аналитических результатов с численным решением исходной задачи (1.1), (1.2), (2.1). □

7. Численные эксперименты

На рис. 1, 2 представлены траектории возмущенной волны для задачи с $\omega^2 > \Omega^2$ при специальной начальной функции (1.5), вычисленные разными способами на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$. На плоскости переменных x, t верхняя пунктирная прямая соответствует невозмущенной волне. Нижняя пунктирная линия получена из численного решения исходной задачи (1.1), (1.2), (2.1). Жирная и тонкая сплошные линии получены при вычислении скорости

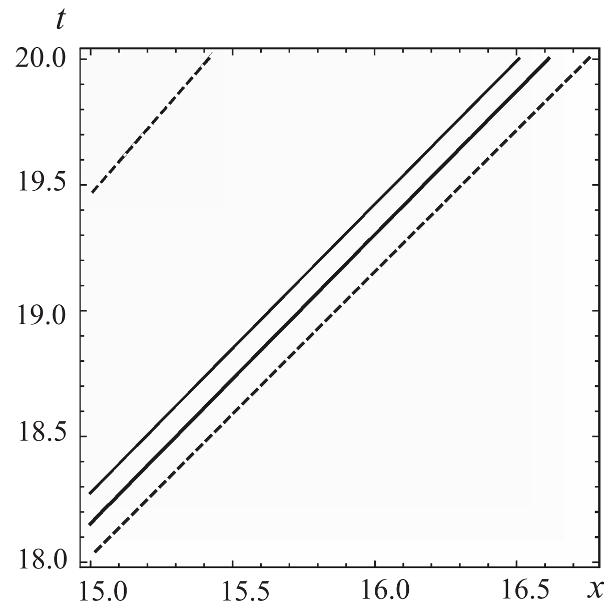

Рис. 1

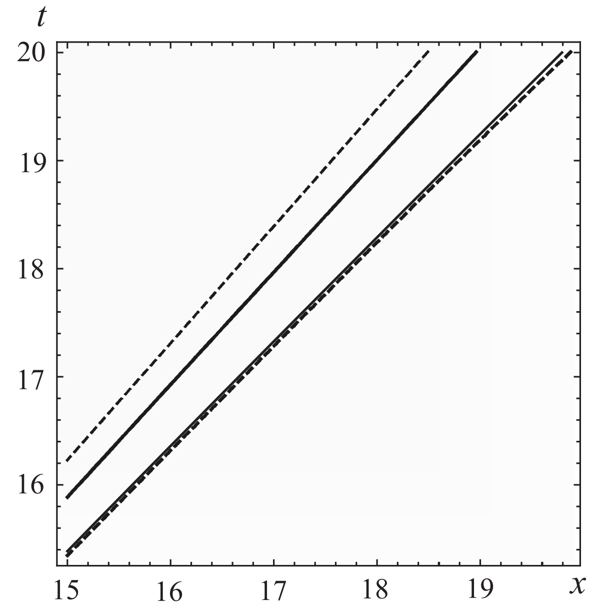

Рис. 2

по формулам (5.1) и (6.2) соответственно. Из рис. 2 видно преимущество формулы (6.2) для случая $\omega^2 > 2\Omega^2$. Вычисления проводились при коэффициентах $c^2 = \Omega^2 = 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$. Линейное по времени возмущение содержится в коэффициенте $\omega^2 = \omega_0^2(1 + 0.5\,\tau)$ при $\omega_0 = 1.1$ и $\omega_0 = 2.2$, $\tau = \varepsilon\, t$, $\varepsilon = 0.05$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zvezdin A.K.** Dynamics of domain walls in weak ferromagnets // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, вып. 10. С. 605–610.
2. **Гареева З.В., Чен С.М.** Сверхбыстрая динамика доменных границ в антиферромагнетиках и ферримагнетиках с температурами компенсации магнитного и углового моментов (Миниобзор) // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114, вып. 4. С. 250–262. doi: 10.31857/S1234567821160084
3. **Канель Я.И.** О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 101 (дополнительный). С. 245–288.
4. **Uchiyama K.** The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time // J. Math. Kyoto Univ. 1978. Vol. 18, no. 3. P. 453–508.
5. **Шапаева Т.Б., Муртазин Р.Р., Екомасов Е.Г.** Динамика доменной границы под действием импульсного и градиентного магнитных полей в редкоземельных ортоферритах // Изв. РАН. Сер. физическая. 2014. Т. 78, №2. С 155–158. doi: 10.7868/S0367676514020264
6. **Маслов В. П., Данилов В.Г., Волосов К.А** Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987. 352 с.
7. **Калякин Л.А.** Возмущение простой волны в системе с диссипацией // Мат. заметки. 2022. Т. 112, вып. 4. С. 553–566. doi: https://doi.org/10.4213/mzm13730
8. **Данилов В.Г.** Глобальные формулы для решений квазилинейных параболических уравнений с малым параметром и некорректность // Мат. заметки. 1989. Т 46, вып. 1. С. 115–117.
9. **Данилов В.Г.** Асимптотические решения типа бегущих волн для полулинейных параболических уравнений с малым параметром // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 2. С. 148–151.

Поступила 29.12.2022
После доработки 17.01.2023
Принята к публикации 23.01.2023

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа
e-mail: klenru@mail.ru

REFERENCES

1. Zvezdin A.K. Dynamics of domain walls in weak ferromagnets. *JETP Letters.*, 1979, vol. 29, iss. 10, pp. 605–610.
2. Gareeva Z.V., Chen X.M. Ultrafast dynamics of domain walls in antiferromagnets and ferrimagnets with temperatures of compensation of the magnetic moment and angular momentum (brief review). *JETP Letters*, 2021, vol. 114, iss. 4, pp. 215–226. doi: 10.1134/S0021364021160062
3. Kanel' Ya.I., Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory. *Mat. Sb.* (suppl.), 1962, vol. 59, no. 101, pp. 245–288.
4. Uchiyama K. The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1978, vol. 18, no. 3, pp. 453–508.
5. Shapaeva T.B., Murtazin R.R., Ekomasov E.G. Dynamics of domain walls under the action of pulse and gradient magnetic fields in rare-earth orthoferrites. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2014, vol. 78, no. 2, pp. 88–91. doi: 10.3103/S1062873814020221
6. Maslov V.P., Danilov V.G., Volosov K.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplomassoperenosa* [Mathematical modelling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka Publ, 1987, 352 p.
7. Kalyakin L.A. Perturbation of a Simple Wave in a System with Dissipation. *Math. Notes*, 2022, vol. 112, no. 4, pp. 549–560. doi: 10.1134/S0001434622090243f
8. Danilov V.G. Global formulas for solutions of quasilinear parabolic equations with a small parameter and ill-posedness. *Mat. Zametki*, 1989, vol. 46, no. 1, pp. 115–117 (in Russian).
9. Danilov V.G. Asymptotic solutions of traveling wave type for semilinear parabolic equations with a small parameter. *Mat. Zametki*, 1990, vol. 48, no. 2, pp. 148–151 (in Russian).

Received December 29, 2022
Revised January 17, 2023
Accepted January 23, 2023

Leonid Anatil'evich Kalyakin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics with Com. Center of the Ufa Sientific Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia,
e-mail: klenru@mail.ru .

Cite this article as: L. A. Kalyakin. Perturbation of a simple wave in a domain wall model. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 91–101 .