ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ

О. В. Акопян, Р. Р. Акопян

Пусть $C_{r,R}$ — кольцо с концентрическими граничными окружностями γ_r и γ_R с центром в нуле, внутренним и внешним радиусами $0<r<R<\infty$. На классе аналитических в кольце $C_{r,R}$ функций, имеющих конечные L^2-нормы угловых пределов на окружности γ_r и производные порядка n (самих функций при $n=0$) на окружности γ_R, исследуются взаимосвязанные экстремальные задачи для оператора ψ_ρ^m, сопоставляющего граничным значениям функции на γ_r ее сужение (при $m=0$) или сужение производной порядка m (при $m>0$) на промежуточную окружность γ_ρ, $r<\rho<R$. Решена задача наилучшего приближения оператора ψ_ρ^m линейными ограниченными операторами из $L^2(\gamma_r)$ в $C(\gamma_\rho)$. Найдена величина и метод оптимального восстановления производной порядка m на промежуточной окружности γ_ρ по L^2-приближенно заданным значениям функции на граничной окружности γ_r. Получено точное неравенство Адамара — Колмогорова, оценивающее равномерную норму производной порядка m на промежуточной окружности γ_ρ через L^2-нормы предельных граничных значений функции и производной порядка n на окружностях γ_r и γ_R.

Ключевые слова: аналитические функции, теорема Адамара о трех кругах, неравенство Колмогорова, оптимальное восстановление.

O. V. Akopyan, R. R. Akopyan. Optimal recovery on classes of functions analytic in a annulus.

Let $C_{r,R}$ be a annulus with boundary circles γ_r and γ_R centered at zero; its inner and outer radii are r and R, respectively. On the class of functions analytic in the annulus $C_{r,R}$ with finite L^2-norms of the angular limits on the circle γ_r and of the nth derivatives (of the functions themselves for $n=0$) on the circle γ_R, we study interconnected extremal problems for the operator ψ_ρ^m that takes the boundary values of a function on γ_r to its restriction (for $m=0$) or the restriction of its mth derivative (for $m>0$) to an intermediate circle γ_ρ, $r<\rho<R$. The problem of the best approximation of ψ_ρ^m by linear bounded operators from $L^2(\gamma_r)$ to $C(\gamma_\rho)$ is solved. A method for the optimal recovery of the mth derivative on a intermediate circle γ_ρ from L^2-approximately given values of the function on the boundary circle γ_r is proposed and its error is found. The Hadamard–Kolmogorov exact inequality, which estimates the uniform norm of the mth derivative on an intermediate circle γ_ρ in terms of the L^2-norms of the limit boundary values of the function and the nth derivative on the circles γ_r and γ_R, is derived.

Keywords: analytic functions, Hadamard three-circle theorem, Kolmogorov's inequality, optimal recovery.

MSC: 30A10, 30E10

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-7-23

1. Введение

1.1. Постановка и обсуждение задач

Работа посвящена обсуждению нескольких взаимосвязанных экстремальных задач на классах функций, аналитических в кольце $C_{r,R}:=\{z\in\mathbb{C}\colon r<|z|<R\}$ с граничными окружностями γ_r и γ_R с центром в нуле, внутренним и внешним радиусами $0<r<R<\infty$.

Обозначим через $\mathcal{A}(C_{r,R})$ пространство аналитических в кольце $C_{r,R}$ функций. Произвольная функция $f\in\mathcal{A}(C_{r,R})$ представима в кольце $C_{r,R}$ суммой ее ряда Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \quad z\in C_{r,R}.$$

Для среднего квадратичного функции $f \in \mathcal{A}(C_{r,R})$ на окружности $\gamma_\rho := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \rho\}$, $r < \rho < R$, справедливо равенство

$$\|f\|_{L^2(\gamma_\rho)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2\, dt\right)^{1/2} = \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2\rho^{2k}\Big)^{1/2}.$$

Пусть n — целое неотрицательное число, т. е. $n \in \mathbb{Z}_+$. В пространстве $\mathcal{A}(C_{r,R})$ выделим подпространство $\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ функций, которые имеют угловые пределы почти всюду на окружности γ_r, у которых производная порядка n (сама функция при $n = 0$) имеет угловые пределы почти всюду на окружности γ_R и которые являются суммируемыми с квадратом функциями на граничных окружностях:

$$\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R}) := \Big\{f \in \mathcal{A}(C_{r,R})\colon \|f\|_{L^2(\gamma_R)} < \infty,\ \|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)} < \infty\Big\}.$$

Для более общего случая при $0 < p, q \le +\infty$ через $\mathcal{H}_n^{p,q}(C_{r,R})$ обозначаем пространство

$$\mathcal{H}_n^{p,q}(C_{r,R}) := \Big\{f \in \mathcal{A}(C_{r,R})\colon \|f\|_{L^p(\gamma_R)} < \infty,\ \|f^{(n)}\|_{L^q(\gamma_R)} < \infty\Big\}.$$

В $\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ определим класс $Q_n^2(C_{r,R})$ следующим образом:

$$Q_n^2 = Q_n^2(C_{r,R}) := \Big\{f \in \mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})\colon \|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)} \le 1\Big\}.$$

Обозначим через ψ_ρ^m, $m \in \mathbb{Z}_+$, оператор, сопоставляющий граничным значениям на γ_r функции из $\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ ее сужение (при $m = 0$) или сужение производной порядка m (при $m > 0$) на окружность γ_ρ, $r < \rho < R$.

Первая из рассматриваемых в статье задач — вычисление модуля непрерывности оператора ψ_ρ^m на классе $\mathcal{H}_n^{2}(C_{r,R})$. *Модулем непрерывности оператора* ψ_ρ^m *на классе* $\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ называют каждую из двух функций, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned}\Omega(\delta_1,\delta_2) &= \Omega(\delta_1,\delta_2;\psi_\rho^m,\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})) :=\\ &= \Big\{\|f^{(m)}\|_{C(\gamma_\rho)}\colon f \in \mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R}),\ \|f\|_{L^2(\gamma_r)} \le \delta_1,\ \|f^{(m)}\|_{L^2(\gamma_R)} \le \delta_2\Big\}, \quad \delta_1,\delta_2 \ge 0;\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\omega(\delta) = \omega(\delta;\psi_\rho^m,Q_n^2) := \sup\Big\{\|f^{(m)}\|_{C(\gamma_\rho)}\colon f \in Q_n^2,\ \|f\|_{L^2(\gamma_R)} \le \delta\Big\}, \quad \delta \ge 0. \tag{1.2}$$

Величины (1.1) и (1.2), очевидно, связаны равенствами

$$\Omega(\delta_1,\delta_2) = \delta_2\,\omega\left(\delta_1/\delta_2\right), \quad \omega(\delta_1) = \Omega(\delta_1,1), \quad \delta_1,\delta_2 > 0.$$

Из определения (1.1) следует *точное неравенство Адамара — Колмогорова*

$$\|f^{(m)}\|_{C(\gamma_\rho)} \le \|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}\,\omega\left(\|f\|_{L^2(\gamma_r)}/\|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}\right), \quad f \in \mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R}). \tag{1.3}$$

Второй из изучаемых в статье является задача оптимального восстановления оператора ψ_ρ^m на классе функций Q_n^2, заданных с известной погрешностью на γ_r. Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(L^2(\gamma_r), C(\gamma_\rho))$ есть множество всех однозначных отображений из $L^2(\gamma_r)$ в $C(\gamma_\rho)$. Для $\phi \in \mathfrak{R}$ величина

$$\mathcal{U}(\delta,\phi) = \mathcal{U}(\delta,\phi;\psi_\rho^m,Q_n^2) := \sup\Big\{\|f^{(m)} - \phi(f_\delta)\|_{C(\gamma_\rho)}\colon f \in Q_n^2,\ f_\delta \in L^2(\gamma_r),\ \|f - f_\delta\|_{L^2(\gamma_r)} \le \delta\Big\}$$

является погрешностью восстановления методом ϕ на классе Q_n^2 производной порядка $m (m \ge 0)$ на окружности γ_ρ, или, что то же самое, оператора ψ_ρ^m по заданным с δ-погрешностью граничным значениям функции на окружности γ_r. Равенством

$$\mathcal{E}(\delta) = \mathcal{E}(\delta;\psi_\rho^m,Q_n^2) := \inf\left\{\mathcal{U}(\delta,\phi)\colon \phi \in \mathfrak{R}\right\} \tag{1.4}$$

определяется *оптимальное восстановление на классе* Q_n^2 *оператора* ψ_ρ^m *по заданным с* δ-*погрешностью граничным значениям функции на окружности* γ_r. Задача состоит в вычислении величины (1.4) и нахождении *оптимального метода восстановления* — оператора, на котором в (1.4) достигается нижняя грань.

Задача оптимального восстановления (1.4) исследуется одновременно и с помощью следующей задачи (задачи Стечкина) наилучшего приближения оператора ψ_ρ^m на классе Q_n^2 множеством $\mathfrak{B}(N) = \mathfrak{B}(N; L^2(\gamma_r), C(\gamma_\rho))$, $N > 0$, линейных операторов из $L^2(\gamma_r)$ в $C(\gamma_\rho)$ с нормой, не превосходящей числа N. Для оператора $\phi \in \mathfrak{B}(N)$ величина

$$U(\phi) = U(\phi; \psi_\rho^m, Q_n^2) := \sup\left\{\|f^{(m)} - \phi(f)\|_{C(\gamma_\rho)} \colon f \in Q_n^2\right\}$$

является уклонением ϕ от ψ_ρ^m на классе Q_n^2. *Наилучшее приближение оператора* ψ_ρ^m *на классе* Q_n^2 *множеством* $\mathfrak{B}(N)$ определяется равенством

$$E(N) = E(N; \psi_\rho^m, Q_n^2) := \inf\left\{U(\phi) \colon \phi \in \mathfrak{B}(N)\right\}. \tag{1.5}$$

Каждая из рассматриваемых задач — точное неравенство (1.3), оптимальное восстановление (1.4) и наилучшее приближение оператора (1.5) — является конкретным вариантом известной, более общей, экстремальной задачи, имеющей богатую историю. Общие результаты по этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [1–8] и в приведенной там библиографии.

Изучаемые в настоящей статье задачи эквивалентны таким же задачам для функционала, сопоставляющего граничным значениям на γ_r производную порядка m, $m \ge 0$ в фиксированной точке ζ, $|\zeta| = \rho$. Известно(см. [3; 4; 7] и в приведенной там библиографии), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом уравновешенном классе существует линейный функционал, являющийся оптимальным методом восстановления, и величина оптимального восстановления равна модулю непрерывности функционала. Как следствие этого факта справедливо соотношение

$$\mathcal{E}(\delta; \psi_\rho^m, Q_n^2) = \omega(\delta; \psi_\rho^m, Q_n^2), \quad \delta \ge 0. \tag{1.6}$$

Кроме того, связь задач (1.2), (1.4) и (1.5) дополнительно к равенству (1.6) выражается следующими равенствами:

$$E(N; \psi_\rho^m, Q_n^2) = \sup\{\omega(\delta; \psi_\rho^m, Q_n^2) - N\delta \,:\, \delta > 0\};$$

$$\omega(\delta; \psi_\rho^m, Q_n^2) = \inf\{E(N; \psi_\rho^m, Q_n^2) + N\delta \,:\, N > 0\}.$$

Приведем некоторые конкретные результаты, относящиеся к задачам, близким к рассматриваемым в данной статье. Как теорема Адамара о трех кругах, для функций, аналитических в кольце, хорошо известно (см., например, [9, отд. 3, гл. 6, § 3]) неравенство

$$\|f\|_{L^p(\gamma_\rho)} \le \|f\|^\alpha_{L^p(\gamma_r)} \|f\|^\beta_{L^p(\gamma_R)}, \quad f \in \mathcal{H}_0^{p,p}(C_{r,R}), \quad 0 \le p \le +\infty, \tag{1.7}$$

в котором показатели задаются равенствами

$$\alpha = \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}.$$

Неравенство (1.7) дает оценку соответствующего модуля непрерывности: $\omega(\delta) \le \delta^\alpha$, в которой равенство имеет место только в точках $\delta_k = (r/R)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что функция ω не имеет производную в точках δ_k. Решения связанных задач оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора аналитического продолжения для значений параметра $\delta_k = (r/R)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $1 \le p \le +\infty$ получены в [10]. Результат Р. М. Робинсона (1943) [11] (см. также [12, гл. 11, § 4]) уточняет неравенство (1.7) при $p = \infty$ и дает точное значение модуля непрерывности при всех значениях параметра $\delta \ge 0$.

В статье Р. Р. Акопяна (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4) получен аналог теоремы Адамара. А именно, получено точное неравенство

$$\|f\|_{C(\gamma_\rho)} \le \mathcal{C}\, \|f\|^{\alpha}_{L^p(\gamma_r)} \|f\|^{\beta}_{L^q(\gamma_R)}, \quad f \in \mathcal{H}^{p,q}_0(C_{r,R}), \quad 0 < p, q \le +\infty. \tag{1.8}$$

Как и в классическом случае, неравенство (1.8) приводит к оценке соответствующего модуля непрерывности: $\omega(\delta) \le \mathcal{C}\delta^{\alpha}$, в которой равенство имеет место только для последовательности точек $\delta_k = \delta_0 (r/R)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. В этой статье получено и решение связанных экстремальных задач для значений параметра δ, равных δ_k при $1 \le p, q \le +\infty$.

В работе [13] для класса $\mathcal{H}^{p,p}_0(C_{r,R})$, $1 \le p \le +\infty$, найдено решение задач, аналогичных (1.4) и (1.5), оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора дифференцирования при $m = 1$ и $n = 0$, для значений параметра $\delta_k = (r/R)^k$ уже не для произвольных $k \in \mathbb{Z}$, а при ограничении $|k| \ge \pi \ln^{-1}(R/r) \sin^{-1}(\alpha\pi)$. В этом случае имеет место равенство $\omega(\delta_k) = |k|(\rho/R)^k$ и в точках δ_k функция ω недифференцируемая [13, теорема 3].

Оценки модуля значений аналитической в многосвязной области функции и ее производных в точке через ее предельные граничные значения исследовали многие математики, в том числе М. Хейнс и Р. М. Робинсон (круговое кольцо), Г. Грунский, Л. Альфорс, С. Я. Хавинсон, З. Нехари, П. Р. Гарабедян, Х. Уидом, Т. С. Кузина (многосвязная область) и др. (см. [14–17] и приведенную там библиографию). Различные задачи оптимального восстановления на классах аналитических функций изучали К. Ю. Осипенко, Ш. Мичелли, Т. Ривлин, С. Д. Фишер, К. Уайлдероттер, Б. Боянов, М. И. Стесин, О. Г. Парфенов, М. П. Овчинцев и др. (см. монографию [7], статьи [18–24] и приведенную там библиографию).

В рассматриваемых в настоящей работе задачах (1.2), (1.4) и (1.5) для тройки пространств $(C(\gamma_\rho), L^2(\gamma_r), L^2(\gamma_R))$ можно выписать полное решение, используя известные идеи построения экстремальных функций и операторов. Первый результат для тройки $(C(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ на оси — неравенство Колмогорова и решение задачи Стечкина — был получен в статье Л. В. Тайкова (1968) [25]. Результаты работы Л. В. Тайкова [25] развивались и обобщались в различных направлениях (см. статьи [26–29] и приведенные там ссылки).

Дальнейшая схема изложения материала в статье следующая. В следующем подразделе сформулированы основные результаты статьи — решения задач (1.2), (1.4) и (1.5). В разд. 2 обсуждаются в достаточно общем случае решения задач оптимального восстановления и наилучшего приближения операторов на классах Соболева в пространстве $L^2(0, 2\pi)$, которые использованы в разд. 3 для доказательства основных утверждений. В подразд. 3.3 обсуждаются некоторые свойства экстремальных функций и операторов.

1.2. Основные результаты

Для произвольной точки $\zeta \in C_{r,R}$ определим функцию $\mathfrak{g}[h, m, n, r, R]$, $h > 0$, переменной z рядом Лорана

$$\mathfrak{g}(\zeta, z) = \mathfrak{g}[h, m, n, r, R](\zeta, z) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}}{r^{2k} + h\alpha^2_{k,n} R^{2(k-n)}} \overline{\zeta}^{k-m} z^k, \tag{1.9}$$

в котором для $k \in \mathbb{Z}$

$$\alpha_{k,s} := \prod_{j=0}^{s-1} (k - j), \quad s \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \alpha_{k,0} := 1.$$

Функция $\mathfrak{g}$ является аналитической в кольце $C_{r',R'}$ с внутренним и внешним радиусами $r' = r^2|\zeta|^{-1}$ и $R' = R^2|\zeta|^{-1}$. Кольцо $C_{r,R}$ содержится в $C_{r',R'}$. Для норм функции $\mathfrak{g}$ и ее производной (по переменной z) порядка n на граничных окружностях кольца $C_{r,R}$ справедливы равенства

$$\|\mathfrak{g}\|_{L^2(\gamma_r)} = \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2_{k,m}}{(r^{2k} + h\alpha^2_{k,n} R^{2(k-n)})^2} |\zeta|^{2(k-m)} r^{2k} \Big)^{1/2},$$

$$\|\mathfrak{g}^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)} = \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}^2 \alpha_{k,n}^2}{(r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)})^2} |\zeta|^{2(k-m)} R^{2(k-n)} \Big)^{1/2}.$$

Таким образом, функция $\mathfrak{g}$ принадлежит $\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$.

В дальнейшем будем считать, что параметры ζ и ρ связаны условием $|\zeta| = \rho$. Для $C(\gamma_\rho)$-нормы $\mathfrak{g}^{(m)}$ на промежуточной окружности γ_ρ имеет место представление

$$\|\mathfrak{g}^{(m)}\|_{C(\gamma_\rho)} = \mathfrak{g}^{(m)}(\zeta, \zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}^2}{r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)}} |\zeta|^{2(k-m)}.$$

Введем обозначения:

$$\mathfrak{w}(h) = \frac{\|\mathfrak{g}^{(m)}\|_{C(\gamma_\rho)}}{\|\mathfrak{g}^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}}, \quad \mathfrak{d}(h) = \frac{\|\mathfrak{g}\|_{L^2(\gamma_r)}}{\|\mathfrak{g}^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}}, \quad \mathfrak{n}(h) = \|\mathfrak{g}\|_{L^2(\gamma_r)}, \quad \mathfrak{u}(h) := h\|\mathfrak{g}^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}.$$

Определим оператор $\Phi[h, m, n, r, R]$ из $\mathfrak{R}(L^2(\gamma_r), C(\gamma_\rho))$ соотношением

$$(\Phi_h f)(\zeta) = (\Phi[h, m, n, r, R]f)(\zeta) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m} r^{2k}}{r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)}} c_k \zeta^{k-m}, \tag{1.10}$$

в котором коэффициенты c_k задаются равенствами

$$r^k c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или, что то же самое, функция f на окружности γ_r представима как сумма (в смысле пространства $L^2(\gamma_r)$) ряда

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \quad |z| = r.$$

Оператор (1.10) можно представить в интегральной форме

$$(\Phi_h f)(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{g}(\zeta, re^{it})} f(re^{it})\, dt. \tag{1.11}$$

Решения задач (1.2), (1.4) и (1.5) даны в следующей теореме.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(I) *Для произвольного $\delta > 0$ существует единственное $h > 0$ такое, что $\mathfrak{d}(h) = \delta$ и справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(\delta) = \omega(\delta) = \mathfrak{w}(h). \tag{1.12}$$

Оптимальным методом восстановления оператора $\psi_{\gamma_\rho}^m$ на классе Q_n^2 является оператор Φ_h, определенный равенством (1.10). *Неравенство* (1.3) *обращается в равенство на функциях вида $c\mathfrak{g}[h, m, n, r, R](\zeta, \cdot)$, $c \in \mathbb{C}$, $h > 0$, $|\zeta| = \rho$.*

(II) *Для произвольного $N > 0$ существует единственное $h > 0$ такое, что $\mathfrak{n}(h) = N$ и справедливо равенство*

$$E(N) = \mathfrak{u}(h). \tag{1.13}$$

Оператором наилучшего приближения оператора $\psi_{\gamma_\rho}^m$ множеством $\mathfrak{B}(N)$ является оператор Φ_h, определенный равенством (1.10).

Функции ω и соответственно Ω не являются элементарными, поэтому выписать явный вид неравенства (1.3) невозможно. Однако можно записать точное аддитивное неравенство.

Утверждение 1. *Для произвольного $h > 0$ справедливо точное неравенство*

$$\|f^{(m)}\|_{C(\gamma_\rho)} \le \mathfrak{n}(h)\|f\|_{L^2(\gamma_r)} + \mathfrak{u}(h)\|f^{(n)}\|_{L^2(\gamma_R)}, \quad f \in \mathcal{H}^{2,2}_n(C_{r,R}). \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) *обращается в равенство на функциях вида $c\mathfrak{g}[h,m,n,r,R](\zeta,\cdot)$, $c \in \mathbb{C}$, $h > 0$, $|\zeta| = \rho$.*

2. Предварительные утверждения. Случай периодических функций вещественной переменной

Рассмотрим пару (λ,μ) последовательностей комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ и $\mu = \{\mu_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) сумма квадратов модулей элементов последовательности λ равна бесконечности, т. е.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda_k|^2 = +\infty; \tag{2.1}$$

2) конечна сумма ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{1+|\mu_k|^2} < +\infty. \tag{2.2}$$

Для $s \in \mathbb{N}$ обозначим через σ_s функцию переменной h, $h > 0$, определяемую равенством

$$\sigma_s(h,\lambda,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^s}. \tag{2.3}$$

Лемма 1. *Для любого $h_0 > 0$ ряд в правой части* (2.3) *равномерно сходится на $[h_0,+\infty)$. При этом имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{h\to+\infty} \sigma_s(h,\lambda,\mu) = 0, \quad \lim_{h\to+0} \sigma_s(h,\lambda,\mu) = +\infty. \tag{2.4}$$

Функция σ_s дифференцируема на $(0,+\infty)$, и справедливо равенство

$$\sigma_s'(h,\lambda,\mu) = -s\,\sigma_{s+1}(h,\lambda\mu,\mu). \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (2.2) следует конечность $\sigma_1(h,\lambda,\mu)$ для всех $h > 0$. Действительно, верны соотношения

$$\min\{1,h\} \le \frac{1+h|\mu_k|^2}{1+|\mu_k|^2} \le \max\{1,h\}.$$

Поэтому ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{1+h|\mu_k|^2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{1+|\mu_k|^2}$$

сходятся и расходятся одновременно. Рассмотрим произвольные фиксированные числа $h_0 > 0$ и $s \in \mathbb{N}$. Для любого $h \ge h_0$ выполняется неравенство

$$\frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^s} \le \frac{|\lambda_k|^2}{1+h_0|\mu_k|^2}.$$

Отсюда по мажорантному признаку Вейерштрасса получаем равномерную сходимость ряда (2.3) на полуоси $[h_0,\infty)$ для произвольных $s\in\mathbb{N}$.

Покажем справедливость равенства (2.5). Дифференцируя общий член ряда в (2.3), получим
$$\frac{d}{dh}\frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^s}=-s\,\frac{|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^{s+1}}.$$
При этом верно неравенство
$$s\,\frac{|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^{s+1}}\le\frac{s}{h}\,\frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^s},$$
из которого следует равномерная сходимость на $[h_0,\infty)$ ряда из производных
$$-s\sigma_{s+1}(h,\lambda\mu,\mu)=-s\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^{s+1}}.$$

Покажем, что имеют место предельные равенства (2.4). Обозначим через $S_K(h)$ и $R_K(h)$ частичную сумму и остаток ряда (2.3), т. е.
$$S_K(h):=\sum_{|k|\le K}\frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^s},\quad R_K(h):=\sum_{|k|>K}\frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^s},\quad \sigma_s(h,\lambda,\mu)=S_K(h)+R_K(h).$$

Из равномерной сходимости ряда (2.3) на $[h_0,+\infty)$, $h_0>0$, имеем, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется номер $K=K(\varepsilon)$ такой, что справедливо неравенство $R_K(h)<\varepsilon/2$, $h>h_0$. Из равенства $\lim\limits_{h\to+\infty}S_K(h)=0$ для частичной суммы следует существование $H(\varepsilon)>h_0$ такого, что для $h>H(\varepsilon)$ справедливо неравенство $S_K(h)<\varepsilon/2$. Таким образом при $h>H(\varepsilon)$ верно соотношение $\sigma_s(h,\lambda,\mu)<\varepsilon$. Это и означает выполнение первого равенства в (2.4).

Перейдем к доказательству второго равенства в (2.4). Из условия (2.1) вытекает, что для произвольного $\varepsilon>0$ существует номер $K=K(\varepsilon)$ такой, что справедливо неравенство $\sum\limits_{|k|\le K}|\lambda_k|^2>2\varepsilon$. С другой стороны, $\lim\limits_{h\to+0}S_K(h)=\sum\limits_{|k|\le K}|\lambda_k|^2$. Поэтому найдется $H(\varepsilon)$ такое, что при $h<H(\varepsilon)$ верна оценка $\Big|S_K(h)-\sum\limits_{|k|\le K}|\lambda_k|^2\Big|<\varepsilon$. Отсюда заключаем:
$$\sigma_s(h,\lambda,\mu)\ge S_K(h)\ge\Big|\sum_{|k|\le K}|\lambda_k|^2\Big|-\Big|S_K(h)-\sum_{|k|\le K}|\lambda_k|^2\Big|>2\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon.$$
Значит, справедливо второе равенство в (2.4).

Лемма доказана.

Из определения (2.3) и равенства (2.5) вытекают такие свойства функции σ_s.

Следствие 1. *Функция $\sigma_s(h,\lambda,\mu)$ является неотрицательной, убывающей и выпуклой на* $(0,+\infty)$.

Введем обозначения:
$$\begin{gathered}v(h)=\frac{\sigma_1(h,\lambda,\mu)}{\sigma_2^{1/2}(h,\lambda\mu,\mu)};\quad d(h)=\frac{\sigma_2^{1/2}(h,\lambda,\mu)}{\sigma_2^{1/2}(h,\lambda\mu,\mu)};\\ \nu(h)=\sigma_2^{1/2}(h,\lambda,\mu);\quad u(h)=h\sigma_2^{1/2}(h,\lambda\mu,\mu).\end{gathered}\tag{2.6}$$
В следующих утверждениях устанавливаются свойства функций v,d,ν и u.

Лемма 2. *Для функций* (2.6) *на полуоси* $h \in (0, +\infty)$ *справедливы равенства*

$$u(h) + \nu(h)d(h) = v(h), \tag{2.7}$$

$$\nu'(h) = -\sigma_3(h, \lambda\mu, \mu)\, \sigma_2^{-1/2}(h, \lambda, \mu), \tag{2.8}$$

$$u'(h) = \sigma_3(h, \lambda\mu, \mu)\, \sigma_2^{-1/2}(h, \lambda\mu, \mu), \tag{2.9}$$

$$u'(h) + \nu'(h)d(h) = 0. \tag{2.10}$$

Доказательство вытекает из определений (2.3) и (2.6). В самом деле, имеем

$$u(h) + \nu(h)d(h) = \sigma_2^{-1/2}(h, \lambda\mu, \mu)\, [h\sigma_2(h, \lambda\mu, \mu) + \sigma_2(h, \lambda, \mu)].$$

Для обоснования (2.7) достаточно показать, что выражение в квадратных скобках равно $\sigma_1(h, \lambda, \mu)$, что видно из следующей цепочки соотношений:

$$h\sigma_2(h, \lambda\mu, \mu) + \sigma_2(h, \lambda, \mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{h|\lambda_k|^2|\mu_k|^2 + |\lambda_k|^2}{(1 + h|\mu_k|^2)^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{1 + h|\mu_k|^2} = \sigma_1(h, \lambda, \mu).$$

Равенство (2.7) доказано.

Непосредственно вычислив производную функции ν, получаем равенство (2.8). Для производной функции u имеем

$$u'(h) = [\sigma_2(h, \lambda\mu, \mu) - h\sigma_3(h, \lambda\mu^2, \mu)]\, \sigma_2^{-1/2}(h, \lambda\mu, \mu) = \sigma_3(h, \lambda\mu, \mu)\, \sigma_2^{-1/2}(h, \lambda\mu, \mu).$$

Отсюда верны равенство (2.9) и соотношение

$$\frac{u'(h)}{\nu'(h)} = -\frac{\sigma_2^{1/2}(h, \lambda, \mu)}{\sigma_2^{1/2}(h, \lambda\mu, \mu)} = -d(h).$$

Равенство (2.10) и лемма 2 доказаны.

Из представлений (2.8) и (2.9) производных функций ν и u и следствия 1 вытекает монотонность этих функций на промежутке $(0, +\infty)$.

Следствие 2. *Функция* ν *убывает на* $(0, +\infty)$. *Функция* u *возрастает на* $(0, +\infty)$.

Исследуем на монотонность функцию d.

Лемма 3. *Функция* d *возрастает на* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Для функции d^2 вычислим производную

$$(d^2)'(h) = \left(\frac{\sigma_2(h, \lambda, \mu)}{\sigma_2(h, \lambda\mu, \mu)}\right)' = \frac{2(\sigma_2(h, \lambda, \mu)\sigma_3(h, \lambda\mu^2, \mu) - \sigma_3(h, \lambda\mu, \mu)\sigma_2(h, \lambda\mu, \mu))}{\sigma_2^2(h, \lambda\mu, \mu)}.$$

Преобразуем числитель последней дроби, обозначив его через A, имеем

$$A = 2 \sum_{k,j=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|\lambda_k|^2|\lambda_j|^2|\mu_j|^4}{(1 + h|\mu_k|^2)^2(1 + h|\mu_j|^2)^3} - \frac{|\lambda_k|^2|\lambda_j|^2|\mu_k|^2|\mu_j|^2}{(1 + h|\mu_k|^2)^3(1 + h|\mu_j|^2)^2} \right)$$

$$= 2 \sum_{k,j=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2|\lambda_j|^2|\mu_j|^2(|\mu_j|^2 - |\mu_k|^2)}{(1 + h|\mu_k|^2)^3(1 + h|\mu_j|^2)^3}.$$

Разбиваем последнее выражение на две одинаковых суммы и во второй индексы k, j поменяем ролями, в результате получим

$$A = \sum_{k,j=-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_k|^2|\lambda_j|^2(|\mu_k|^2 - |\mu_j|^2)^2}{(1 + h|\mu_k|^2)^3(1 + h|\mu_j|^2)^3} > 0.$$

Следовательно, функция d^2 возрастает. Тогда возрастает и функция d.

Лемма доказана.

Следствие 3. *Если расходится ряд*

$$\sum_{k=-\infty,\,\mu_k\neq 0}^{+\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{|\mu_k|^2}=+\infty, \tag{2.11}$$

то для произвольного числа $\delta>0$ *существует единственное число* $h_\delta>0$ *такое, что справедливо равенство* $d(h_\delta)=\delta$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $p_\delta(h)=u(h)+\delta\nu(h)$. Функция p_δ дифференцируема на полупрямой $(0,+\infty)$, и для ее производной имеет место формула $p'_\delta(h)=u'(h)+\delta\nu'(h)$. Если существует точка $h=h_\delta$ такая, что $p'_\delta(h_\delta)=0$, то из (2.10) получим $d(h_\delta)=\delta$. Покажем, что функция p_δ имеет стационарную точку. Используя равенства (2.4) и (2.6), для произвольного $\delta>0$ выводим предельное соотношение

$$\lim_{h\to+0}p_\delta(h)\geq\delta\lim_{h\to+0}\nu(h)=+\infty.$$

С другой стороны, для произвольного $K\in\mathbb{N}$ верны оценки

$$p_\delta(h)\geq u(h)=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{h^2|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^2}\right)^{1/2}\geq\Big(\sum_{k=-K}^{K}\frac{h^2|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^2}\Big)^{1/2},$$

$$\lim_{h\to+\infty}p_\delta(h)\geq\lim_{h\to+\infty}u(h)\geq\Big(\sum_{k=-K,\,\mu_k\neq 0}^{K}\frac{|\lambda_k|^2}{|\mu_k|^2}\Big)^{1/2}.$$

Условие расходимости ряда (2.11) влечет равенство $\lim\limits_{h\to+\infty}p_\delta(h)=+\infty$. Тогда существует точка минимума функции p_δ на полупрямой $(0,+\infty)$. Возьмем ее в качестве искомой точки h_δ. Единственность точки h_δ вытекает из леммы 3.

Следствие доказано.

Рассмотрим функцию ϕ_h, задаваемую на периоде $\mathbb{T}=[0,2\pi)$ суммой тригонометрического ряда:

$$\phi_h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\lambda_k}}{1+h|\mu_k|^2}e^{ikt}. \tag{2.12}$$

Умножая коэффициенты на элементы последовательностей λ и μ, определим функции

$$\lambda\phi_h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{1+h|\mu_k|^2}e^{ikt}, \tag{2.13}$$

$$\mu\phi_h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\lambda_k}\mu_k}{1+h|\mu_k|^2}e^{ikt}. \tag{2.14}$$

Вычислим нормы функций (2.12)–(2.14).

Лемма 4. *В предположениях* (2.1) *и* (2.2) *ряды в правых частях* (2.12) *и* (2.14) *сходятся в пространстве* $L^2(\mathbb{T})$, *при этом*

$$\|\phi_h\|_{L^2(\mathbb{T})}=\sigma_2^{1/2}(h,\lambda,\mu),\quad \|\mu\phi_h\|_{L^2(\mathbb{T})}=\sigma_2^{1/2}(h,\lambda\mu,\mu);$$

ряд в правой части (2.13) *сходится равномерно на* $\mathbb{T}$, *при этом*

$$\|\lambda\phi_h\|_{C(\mathbb{T})}=\lambda\phi_h(0)=\sigma_1(h,\lambda,\mu).$$

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из равенства Парсеваля и сходимостей рядов, следующих из леммы 1.

Ряд в правой части (2.13) абсолютно равномерно по t на $\mathbb{T}$ сходится. Действительно,

$$\Big|\frac{|\lambda_k|^2}{1+h|\mu_k|^2}e^{ikt}\Big| = \frac{|\lambda_k|^2}{1+h|\mu_k|^2}, \quad t\in\mathbb{T}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

и ряд $\sigma_1(h,\lambda,\mu)$ сходится. Неотрицательность коэффициентов ряда (2.13) влечет равенство $\max\big\{|\lambda\phi_h(t)|\colon t\in T\big\} = \lambda\phi_h(0)$.

Лемма доказана.

С помощью последовательностей λ и μ на функциях $\varphi\in L^2(\mathbb{T})$ вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_k e^{ikt}$$

определим линейные операторы, которые также обозначим как λ и μ равенствами

$$(\lambda\varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k e^{ikt}; \quad (\mu\varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mu_k\varphi_k e^{ikt}.$$

Лемма 5. *Для произвольной функции $\varphi\in L^2(\mathbb{T})$ такой, что $\mu\varphi\in L^2(\mathbb{T})$, функция $\lambda\varphi$ принадлежит пространству $C(\mathbb{T})$. При этом для произвольного $h>0$ справедливо точное неравенство*

$$\|\lambda\varphi\|_{C(\mathbb{T})} \le \nu(h)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})} + u(h)\|\mu\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{2.15}$$

Неравенство (2.15) *обращается в равенство на функциях вида $c\phi_h(\cdot-t_0)$, $c\in\mathbb{C}$, $h>0$, $t_0\in\mathbb{R}$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценок

$$\Big|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k e^{ikt}\Big| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\lambda_k||\varphi_k| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda_k||\varphi_k|}{1+h|\mu_k|^2} + h\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda_k||\mu_k|^2|\varphi_k|}{1+h|\mu_k|^2}$$

$$\le \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\varphi_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$+ h\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\mu_k|^2|\varphi_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$= \nu(h)\|\varphi\|_{L^2(\pi)} + u(h)\|\mu\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$ □

В пространстве $L^2(\mathbb{T})$ выделим класс Q функций φ таких, что функция $\mu\varphi$ также принадлежит пространству $L^2(\mathbb{T})$ и справедливо неравенство $\|\mu\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}\le 1$. На классе функций Q рассмотрим три взаимосвязанные задачи для оператора λ.

- Первая задача — это вычисление модуля непрерывности оператора λ на классе Q, определяемого соотношением

$$\tilde\omega(\delta) = \tilde\omega(\delta;\lambda,Q) := \sup\big\{\|\lambda\varphi\|_{C(\mathbb{T})} : \varphi\in Q,\ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}\le\delta\big\}, \quad \delta>0. \tag{2.16}$$

Непосредственно из определения (2.16) следует точное неравенство

$$\|\lambda\varphi\|_{C(\mathbb{T})} = \|\mu\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}\tilde\omega\Big(\frac{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}}{\|\mu\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}}\Big). \tag{2.17}$$

- Вторая — задача оптимального восстановления значений оператора λ по заданным с известной $L^2(\mathbb{T})$-погрешностью элементам класса Q. Пусть $\mathfrak{R}(L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ — множество всех операторов из $L^2(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$. Для отображения $\tau \in \mathfrak{R}(L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ и $\delta > 0$ величина

$$\tilde{\mathcal{U}}(\delta,\tau) = \tilde{\mathcal{U}}(\delta,\tau;\lambda,Q) := \sup\left\{\|\lambda\varphi - \tau\varphi_\delta\|_{C(\mathbb{T})} : \varphi \in Q,\, \varphi_\delta \in L^2(\mathbb{T}),\, \|\varphi - \varphi_\delta\|_{L^2(\mathbb{T})} < \delta\right\}$$

является погрешностью восстановления оператора λ методом τ на классе Q. Тогда величина

$$\tilde{\mathcal{E}}(\delta) = \inf\left\{\tilde{\mathcal{U}}(\delta,\tau) : \tau \in \mathfrak{R}(L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))\right\}. \tag{2.18}$$

является величиной оптимального восстановления. Задача состоит в вычислении величины (2.18) и нахождении метода, на котором достигается нижняя грань, — оптимального метода восстановления.

- Наконец, третьей задачей является конкретный вариант задачи Стечкина — наилучшее приближение оператора λ линейными ограниченными операторами на классе Q. Обозначим через $\mathfrak{B}(N; L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$, $N > 0$, множество линейных ограниченных операторов из $L^2(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$, норма которых не превосходит числа N. Для оператора $\tau \in \mathfrak{B}(N; L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ рассмотрим величину

$$\tilde{U}(\tau) = \sup\left\{\|\lambda\varphi - \tau\varphi\|_{C(\mathbb{T})} \colon \varphi \in Q\right\}$$

уклонения τ от λ на классе Q. Наилучшим приближением оператора λ множеством линейных ограниченных операторов $\mathfrak{B}(N; L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ называется величина

$$\tilde{E}(N) = \inf\left\{\tilde{U}(\tau) \colon \tau \in \mathfrak{B}(N; L^2(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))\right\}. \tag{2.19}$$

Задача состоит в вычислении величины (2.19) и нахождении оператора, на котором в (2.19) достигается нижняя грань, т. е. оператора наилучшего приближения.

Как обсуждалось выше, из общих результатов следует, что величины (2.17), (2.18) и (2.19) связаны равенствами

$$\tilde{\mathcal{E}}(\delta) = \tilde{\omega}(\delta) = \inf\left\{\tilde{E}(N) + N\delta \colon N > 0\right\}, \quad \delta > 0; \tag{2.20}$$

$$\tilde{E}(N) = \sup\left\{\tilde{\omega}(\delta) - N\delta \colon \delta > 0\right\}, \quad N > 0. \tag{2.21}$$

Определим оператор свертки из $L^2(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$ формулой

$$(\tau_h\varphi)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{\phi_h(t-\theta)}\varphi(\theta)\,d\theta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_k\varphi_k}{1 + h|\mu_k|^2} e^{ikt}, \quad h > 0, \tag{2.22}$$

в которой функция $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ — с рядом Фурье (2.12). Оператор τ_h является линейным ограниченным. Для его нормы верно равенство

$$\|\tau_h\|_{L^2(\mathbb{T})\to C(\mathbb{T})} = \|\phi_h\|_{L^2(\mathbb{T})} = \sigma_2^{1/2}(h,\lambda,\mu) = \nu(h).$$

Норма достигается на функциях вида $c\phi_h(\cdot - t_0)$, где $|c| = \sigma_2^{-1/2}(h,\lambda,\mu)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Вычислим уклонение $\tilde{U}(\tau_h)$ оператора τ_h от оператора λ на классе Q.

Лемма 6. *Для произвольного $h > 0$ справедливо равенство $\tilde{U}(\tau_h) = u(h)$.*

Доказательство. Используя определение (2.22) и неравенство Коши — Буняковского, получаем соотношения

$$\|\lambda\varphi-\tau\varphi\|_{C(\mathbb{T})}=\Big\|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(\lambda_k-\frac{\lambda_k}{1+h|\mu_k|^2}\Big)\varphi_k\,e^{ikt}\Big\|_{C(\mathbb{T})}\le\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{h|\mu_k|^2|\lambda_k|}{1+h|\mu_k|^2}|\varphi_k|$$

$$\le\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{h^2|\lambda_k|^2|\mu_k|^2}{(1+h|\mu_k|^2)^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\mu_k|^2|\varphi_k|^2\Big)^{1/2}=u(h)\|\mu\varphi\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

На функциях $c\phi_h(\cdot-t_0)$, $c\in\mathbb{C}$, $t_0\in\mathbb{R}$, неравенства обращаются в равенство.

Лемма доказана.

Теперь из леммы 6, определения (2.19), равенства (2.20) и леммы 2 получаем утверждение.

Следствие 4. *Для произвольного $h>0$ справедливы неравенства*

$$\tilde{E}(\nu(h))\le u(h), \tag{2.23}$$

$$\tilde{\omega}(d(h))\le u(h)+\nu(h)d(h)=v(h). \tag{2.24}$$

Неравенства (2.23) и (2.24) являются на самом деле равенствами. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. (1) *Для произвольного $h>0$ справедливо равенство*

$$\tilde{\mathcal{E}}(d(h))=\tilde{\omega}(d(h))=v(h). \tag{2.25}$$

Оптимальным методом восстановления оператора λ на классе Q является оператор τ_h, определенный равенством (2.22). *Неравенство* (2.17) *обращается в равенство на функциях вида $c\phi_h(\cdot-t_0)$, $c\in\mathbb{C}$, $h>0$, $t_0\in\mathbb{R}$. При этом если справедливо* (2.11)*, то для произвольного $\delta>0$ существует единственное $h>0$ такое, что $d(h)=\delta$.*

(2) *Для произвольного $N>0$ существует единственное $h>0$ такое, что $\nu(h)=N$ и имеет место равенство*

$$\tilde{E}(N)=u(h). \tag{2.26}$$

Оператором наилучшего приближения оператора λ множеством $\mathcal{B}(N)$ является оператор τ_h, определенный равенством (2.22).

3. Доказательство основных утверждений

3.1. Доказательство теоремы 2

Существование и единственность решения уравнения $d(h)=\delta$ для всех $\delta>0$ при условии (2.11) доказаны в следствии 3.

Из предельных соотношений (2.4) леммы 1 и следствия 2 имеем, что функция ν убывает на полупрямой $(0,+\infty)$ от $+\infty$ до нуля. Отсюда следуют существование и единственность решения уравнения $\nu(h)=N$ для любого $N>0$.

Покажем справедливость равенства (2.25). Функция $c\phi_h(\cdot-t_0)$, $c=\|\mu\phi_h\|^{-1}_{L^2(\mathbb{T})}$, при любом $h>0$ и $t_0\in\mathbb{R}$ принадлежит классу Q. Из леммы 4 следуют равенства $\|c\lambda\phi_h\|_{C(\mathbb{T})}=v(h)$ и $\|c\phi_h\|_{L^2(\mathbb{T})}=d(h)$. Из чего по определению (2.16) получаем неравенство $\tilde{\omega}(d(h))\ge v(h)$. Последнее неравенство, равенство (2.20) и оценка (2.24) дают цепочку соотношений $v(h)\le\tilde{\mathcal{E}}(d(h))=\tilde{\omega}(d(h))\le v(h)$, которая доказывает (2.25).

Убедимся в справедливости (2.26). Объединяя равенство (2.7) леммы 2, равенство (2.25), соотношение (2.21) и неравенство (2.23) следствия 4, получим

$$u(h)=v(h)-\nu(h)d(h)=\tilde{\omega}(d(h))-\nu(h)d(h)\le E(\nu(h))\le u(h).$$

Равенство (2.26) и теорема 2 доказаны.

3.2. Доказательство теоремы 1 и утверждения 1

Рассмотрим конкретную пару последовательностей (λ, μ), определяемых равенствами

$$\lambda_k = \alpha_{m,k}\rho^{k-m}r^{-k}, \quad \mu_k = \alpha_{n,k}R^{k-n}r^{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, выбранные последовательности λ и μ удовлетворяют условиям (2.2) и (2.11) (следовательно, и (2.1)). Для функции $f \in \mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ и ее предельных значений φ на окружности γ_r, связанных равенством

$$f(re^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k r^k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k e^{ikt} = \varphi(t), \quad c_k r^k = \varphi_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

получаем соотношения

$$\lambda\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m,k}\rho^{k-m}r^{-k}\varphi_k e^{ikt} = e^{imt}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m,k}c_k\rho^{k-m}e^{i(k-m)t} = e^{imt}f^{(m)}(\rho e^{it}),$$

$$\mu\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n,k}R^{k-n}r^{-k}\varphi_k e^{ikt} = e^{int}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{m,k}c_k R^{k-n}e^{i(k-n)t} = e^{int}f^{(n)}(Re^{it}).$$

Значит, функция f принадлежит классу Q_n^2 тогда и только тогда, когда функция φ принадлежит классу Q. При этом справедливо равенство

$$(\lambda\varphi)(t) = e^{imt}(\psi_\rho^m f)(\rho e^{it}).$$

Соответственно, функции (1.9) и (2.12), операторы (1.10)–(1.11) и (2.22) связаны соотношениями

$$\phi_h(t-t_0) = e^{-imt_0}g[h,m,n,r,R](\rho e^{it_0}, re^{it}),$$
$$(\tau_h\varphi)(t) = e^{imt}(\Phi[h,m,n,r,R]f)(\rho e^{it}).$$

Отсюда и из теоремы 2 получим утверждение теоремы 1, а из леммы 5 — утверждение 1.

3.3. Дополнительные утверждения

Утверждение, аналогичное теореме 1, верно и в предельном случае $\rho = R$, но уже не для всех значений параметров m и n.

Утверждение 2. *В случае $r \le \rho = R$ при $m < n$ для величин* (1.2), (1.4) *и* (1.5) *для произвольного $h > 0$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}(\mathfrak{d}(h)) = \omega(\mathfrak{d}(h)) = \mathfrak{w}(h), \quad E(\mathfrak{n}(h)) = \mathfrak{u}(h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству теоремы 1. □

Отметим, что в этом случае условие (2.2) справедливо только при $m < n$, а условие (2.11) не выполняется.

Утверждение 3. *Для произвольных $m, n \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$ для функции $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[h,m,n,r,R]$, определенной равенством* (1.9)*, справедливо соотношение*

$$\mathfrak{g}[h,m,n,r,R](\zeta,z) = \frac{\partial^m}{\partial\overline{\zeta}^m}\mathfrak{g}[h,0,n,r,R](\zeta,z), \quad \zeta, z \in C_{r,R}.$$

Как следствие, для оператора $\Phi_h = \Phi[h,m,n,r,R]$, определенного равенствами (1.10), (1.11)*, имеет место соотношение*

$$(\Phi[h,m,n,r,R]f)(\zeta) = \frac{\partial^m}{\partial\zeta^m}(\Phi[h,0,n,r,R]f)(\zeta), \quad f \in \mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R}), \quad \zeta \in C_{r,R}.$$

Доказательство утверждения 3 несложно получить из определения (1.9) функции $\mathfrak{g}$ путем почленного дифференцирования степенного ряда. □

В следующем утверждении приведена формула, выражающая производную порядка m ($m \geq 0$) аналитической функции класса $\mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ через предельные значения функции и производной порядка n на граничных окружностях.

Утверждение 4. *Для произвольных $m, n \in \mathbb{Z}_+$ и $h > 0$ для произвольной функции $f \in \mathcal{H}_n^{2,2}(C_{r,R})$ справедливо равенство*

$$f^{(m)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{g}(\zeta, re^{it})}\, f(re^{it})\,dt + \frac{h}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{g}^{(n)}(\zeta, Re^{it})}\, f^{(n)}(Re^{it})\,dt, \quad \zeta \in C_{r,R}, \tag{3.1}$$

в котором функция $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[h, m, n, r, R]$ определена соотношением (1.9), *а $\mathfrak{g}^{(n)}$ — ее производная* (*по переменной z*) *порядка n.*

Доказательство утверждения 4 получим, вычислив интегралы в (3.1):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{g}(\zeta, re^{it})}\, f(re^{it})\,dt + \frac{h}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{\mathfrak{g}^{(n)}(\zeta, Re^{it})}\, f^{(n)}(Re^{it})\,dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}}{r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)}} \zeta^{k-m} c_k r^{2k} + h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,m}}{r^{2k} + h\alpha_{k,n}^2 R^{2(k-n)}} \zeta^{k-m} \alpha_{k,n}^2 c_k R^{2(k-n)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{k,m} c_k \zeta^{k-m} = f^{(m)}(\zeta). \qquad \square$$

Замечание. Для произвольных $m, n \in \mathbb{Z}_+$ модуль непрерывности (1.2) (и совпадающая с ним величина оптимального восстановления (1.4)) являются дифференцируемыми функциями переменной δ на полупрямой $(0, +\infty)$.

Авторы выражает благодарность профессору В. В. Арестову за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
2. **Арестов В.В.** Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН: сб. тр. Всесоюз. шк. по теории функций (Душанбе, август 1986 г.). Т. 189. С. 3–20.
3. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
4. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
5. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
6. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 85–93.
7. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NOVA Science Publ. Inc., 2000. 229 p.
8. **Осипенко К.Ю.** Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 10. С. 77–106.
9. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 398 с.

10. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 3–13.
11. **Robinson R.M.** Analytic functions in circular rings // Duke Math. J. 1943. Vol. 10, no. 2. P. 341–354. doi: 10.1215/S0012-7094-43-01031-2
12. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. М.: Наука, 1966. 628 с.
13. **Akopyan R.R.** Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 6–13. doi: 10.15826/umj.2017.2.002
14. **Тумаркин Г.Ц., Хавинсон С.Я.** Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов // Исследование по современным проблемам теории функций комплексного переменного: сб. тр. М.: Физматгиз, 1960. С. 77–95.
15. **Хавинсон С.Я.** Аналитические функции ограниченного вида (граничные и экстремальные свойства) // Итоги науки. Мат. анализ. 1963. ВИНИТИ, М. 1965. С. 5–80.
16. **Хавинсон С.Я.** О представлении экстремальных функций в классах E_q через функции Грина и Неймана // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 707–716.
17. **Khavinson S.Ya., Kuzina T.S.** The structural formulae for extremal functions in Hardy classes on finite Riemann surfaces // Operator Theory: Advances and Applications. 2005. Vol. 158. P. 37–57. doi: 10.1007/3-7643-7340-7_4
18. **Osipenko K.Y., Stessin M.I.** Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx. 2010. Vol. 31. P. 37–67. doi: 10.1007/s00365-009-9043-5
19. **Акопян Р.Р.** Аналог теоремы о двух константах и оптимальное восстановление аналитических функций // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 10. С. 3–36. doi: 10.4213/sm8952
20. **Осипенко К.Ю.** Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди — Соболева // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 2. С. 67–86.
21. **Gonzalez-Vera P., Stessin M.I.** Joint spectra of Toeplitz operators and optimal recovery of analytic functions // Constr. Approx. 2012. Vol. 36, no. 1. P. 53–82. doi: 10.1007/s00365-012-9169-8
22. **DeGraw A.** Optimal recovery of holomorphic functions from inaccurate information about radial integration // Amer. J. Comput. Math. 2012. Vol. 2, no. 4. P. 258–268. doi: 10.4236/ajcm.2012.24035
23. **Осипенко К.Ю.** Неравенство Харди — Литтлвуда — Полиа для аналитических функций из пространств Харди — Соболева // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 15–34.
24. **Ovchintsev M.** Linear best method for recovering the second derivatives of Hardy class functions // E3S Web of Conferences. 2020. Vol. 164. Article no. 02013. doi: 10.1051/e3sconf/20201640201
25. **Тайков Л.В.** Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 233–238.
26. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение операторов дифференцирования на классе Соболева аналитических в полосе функций // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1286–1298. doi: 10.33048/semi.2021.18.098
27. **Babenko V., Babenko Yu., Kriachko N., Skorokhodov D.** On Hardy–Littlewood–Pólya and Taikov type inequalities for multiple operators in Hilbert spaces // Analysis Mathematica. 2021. Vol. 47. P. 709–745. doi: 10.1007/s10476-021-0104-8
28. **Введенская Е. В., Осипенко К. Ю.** Дискретные аналоги неравенства Л. В. Тайкова и восстановление последовательностей, заданных неточно // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 515–527.
29. **Шадрин А.Ю.** Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн-интерполяции для периодических классов W_2^m // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 132–139.

Поступила 10.02.2023
После доработки 27.02.2023
Принята к публикации 27.02.2023

Акопян Ольга Владимировна
доцент
Институт естественных наук и математики
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: olga_akopjan@rambler.ru

Акопян Роман Размикович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru
г. Екатеринбург

REFERENCES

1. Arestov V.V. Uniform regularization of the problem of calculating the values of an operator. *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 618–626. doi: 10.1007/BF01780971
2. Arestov V.V. Optimal recovery of operators and related problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, no. 4, pp. 1–20.
3. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded ones. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 1995, vol. 39, no. 11, pp. 38–63.
4. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001
5. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A. and Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 2003, 590 p. ISBN: 966-00-0074-4 .
6. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of functionals based on inaccurate data. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 6, pp. 1274–1279. doi: 10.1007/BF01158269
7. Osipenko K.Yu. *Optimal recovery of analytic functions*. Huntington: NOVA Science Publ. Inc., 2000, 229 p. ISBN: 1-56072-821-3 .
8. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 10, pp. 1442–1472. doi: 10.1070/SM2014v205n10ABEH004425
9. Pólya G., Szegő G. *Problems and theorems in analysis*. Vol. 1. Berlin, Springer, 1972, 392 p. doi: 10.1007/978-1-4757-1640-5
10. Akopyan R.R. Best approximation for the analytic continuation operator on the class of analytic functions in a ring. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 3–13 (in Russian).
11. Robinson R.M. Analytic functions in circular rings. *Duke Math. J.*, 1943, vol. 10, no. 2, pp. 341–354. doi: 10.1215/S0012-7094-43-01031-2
12. Goluzin G.M. *Geometric theory of functions of a complex variable*. Ser. Transl. Math. Monogr., vol. 26, Providence, R.I.: American Math. Soc., 1969, 676 p. ISBN: 978-0-8218-1576-2 . Original Russian text published in Goluzin G.M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo: uchebnoe posobie*, Moscow, Leningrad: Nauka GITTL Publ., 1952, 628 p.
13. Akopyan R.R. Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 6–13. doi: 10.15826/umj.2017.2.002
14. Tumarkin G.Ts., Khavinson S.Ya. Qualitative properties of solving extreme problems of certain types. In: *Issled. Sovrem. Probl. Teor. Funkcij Kompleks. Peremen.* Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, pp. 77–95 (in Russian).
15. Khavinson S.Ya. Analytic functions of bounded type. *Itogi Nauki. Mat. Anal.*, 1963, *VINITI*, Moscow, 1965, pp. 5–80 (in Russian).
16. Khavinson S.Ya. Representation of extremal functions in the classes Eq in terms of Green's and Neumann's functions. *Math. Notes*, 1974, vol. 16, no. 5, pp. 1018–1023. doi: 10.1007/BF01149790
17. Khavinson S.Ya., Kuzina T.S. The Structural formulae for extremal functions in Hardy classes on finite Riemann surfaces. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2005, vol. 158, pp. 37–57. doi: 10.1007/3-7643-7340-7_4
18. Osipenko K.Y., Stessin M.I. Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions. *Constr. Approx.*, 2010, vol. 31, pp. 37–67. doi: 10.1007/s00365-009-9043-5
19. Akopyan R.R. An analogue of the two-constants theorem and optimal recovery of analytic functions. *Sb. Math.*, 2019, vol. 210, no. 10, pp. 1348–1360. doi: 10.1070/SM8952
20. Osipenko K.Yu. On optimal recovery methods in Hardy–Sobolev spaces. *Sb. Math., 2001*, vol. 192, no. 2, pp. 225–244. doi: 10.1070/SM2001v192n02ABEH000543

21. Gonzalez-Vera P., Stessin M.I. Joint spectra of Toeplitz operators and optimal recovery of analytic functions. *Constr. Approx.*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 53–82. doi: 10.1007/s00365-012-9169-8
22. DeGraw A. Optimal recovery of holomorphic functions from inaccurate information about radial integration. *Amer. J. Comput. Math.*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 258–268. doi: 10.4236/ajcm.2012.24035
23. Osipenko K.Yu. The Hardy–Littlewood–Polya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 315–334. doi: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003760
24. Ovchintsev M. Linear best method for recovering the second derivatives of Hardy class functions. In: *E3S Web of Conferences*, 2020, vol. 164, article no. 02013. doi: 10.1051/e3sconf/202016402013
25. Taikov L.V. Kolmogorov-type inequalities and the best formulas for numerical differentiation, *Math. Notes*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 631–634. doi: 10.1007/BF01094964
26. Akopyan R.R. Best approximation of differentiation operators on the Sobolev class of functions analytic in a strip. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 1286–1298 (in Russian). doi:10.33048/semi.2021.18.098
27. Babenko V., Babenko Yu., Kriachko N., Skorokhodov D. On Hardy–Littlewood–Plóya and Taikov type inequalities for multiple operators in Hilbert spaces. *Anal. Math.*, 2021, vol. 47, pp. 709–745. doi: 10.1007/s10476-021-0104-8
28. Vvedenskaya E.V., Osipenko K.Yu. Discrete analogs of Taikov's inequality and recovery of sequences given with an error. *Math. Notes*, 2012, vol. 92, no. 4, pp. 473–484. doi: 10.1134/S0001434612090192
29. Shadrin A.Yu. Inequalities of Kolmogorov type and estimates of spline interpolation on periodic classes W_2^m. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 1058–1063. doi: 10.1007/BF01139609

Received February 10, 2023
Revised February 27, 2023
Accepted February 27, 2023

Olga Vladimirovna Akopyan, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: olga_akopjan@rambler.ru .

Roman Razmikovich Akopyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

Cite this article as: O. V. Akopyan, R. R. Akopyan. Optimal recovery on classes of functions analytic in a annulus, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 7–23 .