ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ ПРОСТОЙ КРАЕВОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

С. В. Захаров

Для параболического уравнения типа Гамильтона — Якоби $S_t + 2^{-1}(S_x)^2 + V(x,\varepsilon) = S_{xx}$ строится специальное асимптотическое решение с заданной асимптотикой функции потенциала. Поскольку для простоты эта асимптотика выбирается в виде ряда по натуральным степеням малого параметра ε, асимптотическое решение уравнения представляется, соответственно, в виде ряда теории возмущений по целым степеням ε: $S(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n(x,t)$. Главное приближение решения выражается через экспоненциальный интеграл следующим образом:

$$S_0(x,t) = -2\ln \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma,$$

где фазой служит версальная деформация ростка простой краевой особенности B_3. Асимптотическое поведение этого интеграла на бесконечности по пространственной переменной исследовано методом Лапласа. На основе интегральной рекуррентной формулы с однородным начальным условием для остальных коэффициентов $S_n(x,t)$ доказана теорема существования. Установлены также экспоненциальные оценки этих коэффициентов, гарантирующие сходимость соответствующих интегральных сверток. Показано, что имеет место последовательное нарастание порядка малости невязки, остающейся после подстановки частичных сумм асимптотического решения в рассматриваемое уравнение. Кроме того, доказано существование единственного классического решения, асимптотикой которого является построенный асимптотический ряд. В работе также обсуждается постановка рассматриваемой задачи в свете известных подходов к изучению уравнения Гамильтона — Якоби. Показана связь полученного результата с общей теорией особенностей дифференцируемых отображений.

Ключевые слова: параболическое уравнение типа Гамильтона — Якоби, простая краевая особенность, версальная деформация, асимптотическое решение, метод Лапласа.

S. V. Zakharov. Solution of a parabolic Hamilton–Jacobi type equation determined by a simple boundary singularity.

For a parabolic Hamilton–Jacobi type equation $S_t + 2^{-1}(S_x)^2 + V(x,\varepsilon) = S_{xx}$, a special asymptotic solution with a prescribed asymptotic expansion of the potential function is constructed. Since this asymptotic expansion is chosen for simplicity in the form of a series in natural powers of the small parameter ε, the asymptotic solution of the equation is presented in the form of a series from perturbation theory in integer powers of ε: $S(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n(x,t)$. The leading approximation of the solution is expressed in terms of an exponential integral as follows:

$$S_0(x,t) = -2\ln \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma,$$

where the versal deformation of the germ of the simple boundary singularity B_3 serves as the phase. The asymptotic behavior of this integral in the space variable at infinity is studied by the Laplace method. On the basis of an integral recurrence formula with a homogeneous initial condition for the remaining coefficients $S_n(x,t)$, an existence theorem is proved. Exponential estimates of these coefficients are also established; they provide the convergence of the corresponding integral convolutions. A successive growth is shown for the orders of smallness of the residuals remaining after the substitution of the partial sums of the asymptotic solution into the equation under consideration. In addition, it is proved that there exists a unique classical solution and the constructed asymptotic series is its asymptotic expansion. The statement of the problem under consideration is also discussed in the light of known approaches to studying the Hamilton–Jacobi equation. The connection of the obtained result with the general theory of singularities of differentiable maps is shown.

Keywords: parabolic Hamilton–Jacobi type equation, simple boundary singularity, versal deformation, asymptotic solution, Laplace method.

MSC: 14B07, 34E05, 34E10, 34K26, 35K15

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-77-90

1. Введение

1.1. Постановка задачи

В данной работе мы построим специальное решение уравнения[1]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x,\varepsilon) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

с произвольным параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ и заданной функцией потенциала $V(x,\varepsilon)$, для которой выполняется следующее условие:

$$V(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x), \quad \varepsilon \to +0, \tag{1.2}$$

где $v_n \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $n \in \mathbb{N}$; саму же функцию $V(x,\varepsilon)$ для определенности можно пока считать, скажем, локально интегрируемой по Лебегу относительно переменной x при любом фиксированном допускаемом значении параметра ε; это предположение не является для нас принципиальным, поскольку основная цель настоящей работы не максимально общие теоретико-функциональные утверждения, а получение и обоснование явных аналитических формул.

Ряд в правой части асимптотического соотношения (1.2) при предварительных построениях из разд. 2 понимается формально, а точный смысл этого условия установлен в теореме 1 (разд. 4), где вводятся дополнительные ограничения на поведение коэффициентов v_n.

1.2. Связь задачи с вязкостными решениями

Чтобы пояснить связь данной работы с известными направлениями близких по тематике исследований, отметим, что скейлинговая замена независимых переменных $t = \varepsilon^3\omega,\ x = \varepsilon\rho$ и соответствующая ей подстановка $S(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\widetilde{S}(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-3}t, \varepsilon)$ в (1.1) приводят к диссипативно регуляризованному уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \omega} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \rho}\Big)^2 + \varepsilon^4 V(\varepsilon\rho,\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial \rho^2}.$$

Хорошо известно, что данный способ регуляризации, состоящий в добавлении к дифференциальному выражению первого порядка вязкостной (по другой терминологии: диффузионной) части с параметром $\varepsilon \to +0$, нашел применение при построении обобщенных решений собственно уравнений Гамильтона — Якоби [1].

Замечательное сглаживающее свойство вторых производных по пространственным переменным и их незаменимость для моделирования вероятностных процессов позволили естественным образом применить параболические уравнения указанного типа в стохастической теории управления [2] и в моделях нелинейной диффузии [3].

Отметим еще, что для многомерного уравнения типа Гамильтона — Якоби поведение решений задачи Коши на больших временах и их сходимость в соболевских пространствах к решениям уравнения теплопроводности или к специальным автомодельным решениям полулинейных уравнений изучались во многих работах (см., например, [4;5]). Краткий обзор довольно стандартных теорем существования и некоторых полезных результатов по асимптотическому поведению решений уравнения $u_t + |\nabla u|^q = \triangle u$ в зависимости от степени q имеется во вводной части работы [5].

[1]Подобные (1.1) уравнения имеют в литературе различные названия: регуляризованное уравнение Гамильтона — Якоби, viscous Hamilton–Jacobi equation, diffusive Hamilton–Jacobi equation.

1.3. Особенности решений

Специфическая связь решаемой в настоящей работе задачи с теорией особенностей дифференцируемых отображений, развитой в частности и в значительной степени научной школой В. И. Арнольда, выяснится после выбора формы нулевого приближения асимптотического решения.

Общеизвестно, что в случае обычного уравнения Гамильтона — Якоби первого порядка с начальными данными общего вида благодаря наличию нелинейности неизбежно возникают особенности решений, представляющие собой их разрывы, которые сглаживаются при введении регуляризации, оставаясь тем не менее в виде аномально большого градиента вблизи определенных подмногообразий в пространстве независимых переменных.

Фундаментальные результаты о реализации обобщенными решениями уравнения Гамильтона — Якоби лагранжевых особенностей читатель может найти в монографии Арнольда [6, гл. 2, § 2.5; гл. 5, § 5.6] и в цитированной там литературе. Теоретико-функциональное описание динамики распространения сингулярностей вязкостных решений см., например, в обзоре [7], где особое внимание уделяется, кроме того, связи этой динамики с актуальными задачами топологии и римановой геометрии.

Однако, даже если параметр регуляризации не стремится к нулю, поведение решений вблизи некоторых точек может существенным образом определяться особенностями гладких отображений, которые в этом случае появляются в скрытом виде посредством их версальных деформаций. Показательный пример доставляет реализация сборки Уитни C^∞-гладким решением уравнения типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w(x,t) = -2\ln\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-s^4 + ts^2 + xs\right) ds,$$

соответствующим универсальному решению Ильина уравнения Бюргерса [8, § 4, формулы (4.16), (4.17)]. Здесь уместно добавить, что тем же образом возникают и другие особенности, в частности при построении асимптотических решений тесно связанного с уравнением (1.1) квазилинейного параболического уравнения даже в простейшем пространственно одномерном случае [9, теоремы 2, 3], а указанная здесь форма проявления особенностей работает для уравнений самых различных типов [10].

Что касается общих результатов, известны глубокие дифференциально-геометрические теоремы, относящиеся к микролокальной структуре решений нелинейных эволюционных уравнений около сингулярностей, основанные на представлении дифференциальных уравнений и их решений в форме, гладких подмногообразий многообразий струй и интегральных многообразий распределений соответственно [11, §§ 3–5].

1.4. Дальнейшая структура настоящей работы

В разд. 2 прежде всего вводится формальный функциональный ряд по степеням малого параметра ε — анзац будущего асимптотического решения уравнения (1.1) — и постулируется его нулевое приближение в виде преобразования Хопфа специального экспоненциального интеграла, а затем выводится рекуррентная система уравнений для всех коэффициентов ряда.

В разд. 3 устанавливаются вспомогательные результаты об асимптотическом поведении экспоненциального интеграла, определяющего главное приближение решения.

В разд. 4 даются доказательство существования решений полученной в разд. 2 рекуррентной системы, полностью определяющих асимптотическое решение уравнения (1.1), и доказательство существования настоящего классического решения уравнения (1.1), такого что его асимптотикой является построенный формальный ряд.

В разд. 5 даны некоторые комментарии к основным объектам нашей работы и указаны естественные обобщения ее результатов.

2. Формальный асимптотический ряд

Мы будем искать полное асимптотическое решение уравнения (1.1) в виде простейшего ряда стандартной теории возмущений:

$$S(x,t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n S_n(x,t),\quad \varepsilon\to+0. \tag{2.1}$$

2.1. Главное приближение

Построение ряда (2.1) мы начинаем, предполагая *a priori*, что главное (нулевое) приближение определяется через экспоненциальный интеграл — специальное решение уравнения теплопроводности — следующим образом:

$$S_0(x,t)=-2\ln\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\sigma^3+t\sigma^2+x\sigma\right)d\sigma. \tag{2.2}$$

Аргументом экспоненты в постулированной нами формуле (2.2) служит усеченная версальная деформация ростка[2] простой, или — что то же самое — нуль-модальной, *краевой особенности* B_3 (см. [12, § 2].)

Известно, что особенность B_3 — через посредство выражения (2.2) — очень естественным образом возникает в асимптотике решения тесно связанного с уравнением (1.1) сингулярно возмущенного квазилинейного параболического уравнения вблизи точки перехода слабого разрыва предельного решения в сильный разрыв [13, § 3, формулы (3.17), (3.18)]; именно данное обстоятельство послужило принципиальным моментом при выборе функции (2.2) в настоящей работе для построения ее центрального объекта. В этой связи независимым переменным (x,t) следует дать дополнительную интерпретацию, считая их внутренними переменными задачи в некоторой малой окрестности начала координат.

2.2. Система уравнений для коэффициентов ряда

Теперь, формально подставляя ряд (2.1) в уравнение (1.1), пользуясь асимптотическим условием (1.2) для функции потенциала $V(x,\varepsilon)$ и собирая воедино все выражения при одинаковых степенях малого параметра ε, для коэффициентов $S_n(x,t)$ получаем рекуррентную систему параболических уравнений

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial S_0}{\partial x}\Big)^2-\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}=0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}+\frac{\partial S_0}{\partial x}\frac{\partial S_1}{\partial x}-\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2}=-\,v_1(x), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial t}+\frac{\partial S_0}{\partial x}\frac{\partial S_n}{\partial x}-\frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2}=-\,v_n(x)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial S_j}{\partial x}\frac{\partial S_{n-j}}{\partial x}, \tag{2.5}$$

решением первого уравнения (2.3) которой (что элементарно проверить прямой подстановкой) является функция (2.2); решения линейных уравнений (2.4), (2.5) находятся последовательно, и для них справедлива приведенная далее теорема 1.

[2]В англоязычной литературе версальную деформацию иногда обозначают термином unfolding of singularity.

3. Исследование асимптотики экспоненциального интеграла

Для доказательства теоремы существования решений уравнений (2.4), (2.5) нам понадобятся два простых вспомогательных утверждения об асимптотическом поведении при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ экспоненциального интеграла

$$\Phi(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma, \tag{3.1}$$

определяющего нулевое приближение (2.2) строящегося асимптотического решения.

Мы воспользуемся общепринятыми обозначениями [14, гл. I, § 1] для необходимых в дальнейшем асимптотических соотношений и применим стандартные асимптотические методы исследования зависящих от параметра интегралов [14, гл. II, § 1].

Лемма 1. *При каждом фиксированном* $t \in \mathbb{R}$ *для функции* (3.1) *справедлива следующая формула асимптотической эквивалентности*:

$$\Phi(x,t) \sim \sqrt{\pi}\,(3x)^{-1/4} \exp\left(\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{27}}\right)e, \quad x \to +\infty. \tag{3.2}$$

Доказательство. В формуле (3.1) удобно сделать следующую замену переменной интегрирования: $\sigma = R(x,t) + Q(x,t)z$, где

$$Q(x,t) = \sqrt{t^2+3x}, \quad R(x,t) = \frac{t+Q(x,t)}{3}. \tag{3.3}$$

В результате получается выражение с интегралом классического лапласовского типа:

$$\Phi(x,t) = \exp\left(\frac{1}{3}tR^2 + \frac{2}{3}xR\right) \int\limits_{-R/Q}^{+\infty} \exp\left(-Q^3 f(z)\right) dz, \quad Q \to +\infty, \tag{3.4}$$

где $f(z) = z^3 + z^2$; здесь и далее аргументы у функций $Q = Q(x,t)$ и $R = R(x,t)$ для краткости опущены.

Следуя стандартному методу Лапласа, мы без особого труда находим две критические точки фазовой функции:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2; \quad f(-2/3) = 4/27, \quad f'(-2/3) = 0, \quad f''(-2/3) = -2,$$

причем при $x \to +\infty$ для нижнего предела интегрирования в (3.4) имеем

$$-\frac{2}{3} < -\frac{R}{Q} \equiv \frac{t}{3\sqrt{t^2+3x}} - \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{R}{Q} = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to+\infty} f\Big(-\frac{R}{Q}\Big) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{R^2(2Q-t)}{3Q^3} = \frac{2}{27}.$$

Поэтому асимптотика интеграла в формуле (3.4) определяется только критической точкой $z_0 = 0$ функции f в подэкспоненциальном выражении; то обстоятельство, что нижний предел интегрирования может стремиться к нулю при $x \to +\infty$, не мешает воспользоваться методом Лапласа, поскольку в этом случае, сдвигая его до фиксированной точки $z_1 = -1/6$, мы изменим весь интеграл лишь на экспоненциально малую величину.

Таким образом, по известной формуле метода Лапласа [14, гл. II, § 1, формула (1.24)], приходим к выражению

$$\Phi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{Q}} \exp\left(\frac{2t^3 + 9xt + 2Q^3}{27}\right) \left[1 + O\left(Q^{-3}\right)\right] \quad \text{при} \quad Q \to +\infty,$$

из которого, согласно определению (3.3) величины Q, и вытекает утверждение леммы 1. $\square$

Лемма 2. *При каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ для функции* (3.1) *справедлива следующая формула асимптотической эквивалентности*:

$$\Phi(x,t) \sim -x^{-1}, \quad x \to -\infty. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из вида дискриминанта $\sqrt{t^2+3x}$, посредством которого определяются нули первой производной фазовой функции

$$F(\sigma,x,t) = -\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma \tag{3.6}$$

в формуле (3.1), вытекает, что при $x \to -\infty$ вещественных критических точек вообще нет, а значит, в данном случае максимум фазовой функции достигается на краю промежутка интегрирования — в нуле; элементарными вычислениями легко показать, что

$$\frac{\partial F(\sigma,x,t)}{\partial\sigma} = -3\sigma^2 + 2t\sigma + x\Big|_{\sigma_{\max}} = x + \frac{t^2}{3},$$

где $\sigma_{\max} = t/3$ — точка, в которой достигается максимум производной F_σ, и, стало быть, если $x < -t^2/3$, то

$$\forall\sigma \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial F(\sigma,x,t)}{\partial\sigma} < 0. \tag{3.7}$$

После применения к интегралу (3.1) формулы интегрирования по частям получается следующее выражение:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{x}\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^3 + t\sigma^2\right) d\exp(x\sigma)$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\int\limits_0^{+\infty} (3\sigma^2 - 2t\sigma)\exp\left(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma. \tag{3.8}$$

Согласно (3.7) при $\sigma > 0$ у фазовой функции (т. е. у аргумента подынтегральной экспоненты) нет локальных максимумов, и отсюда максимум подынтегральной функции достигается на левом краю интервала интегрирования. Представляя тогда второе слагаемое в правой части формулы (3.8) в виде суммы

$$\int\limits_0^{+\infty} (3\sigma^2 - 2t\sigma)\exp\big(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\big) d\sigma = \int\limits_0^{-x} \ldots\, d\sigma + \int\limits_{-x}^{+\infty} \ldots\, d\sigma,$$

при $x \to -\infty$ имеем

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} (3\sigma^2 - 2t\sigma)\exp\big(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\big) d\sigma\right|$$

$$\leqslant \left[(3|x|^3 + 2|t|x^2)\exp\big(-|x|^3/2\big) + (3x^2 + 2|tx|^2)\int\limits_{-x}^{+\infty} \exp\big(-\sigma^3/2\big) d\sigma\right] \exp\big(-|x|^3/2 + (t-1)x^2\big).$$

Очевидно, что с учетом этого неравенства формула (3.8) немедленно влечет справедливость утверждения леммы 2. □

4. Доказательство основных результатов

Перейдем теперь непосредственно к точной формулировке и доказательству центральных теорем настоящей работы.

4.1. Существование асимптотического решения

В первую очередь мы докажем утверждение о существовании коэффициентов ряда (2.1), при которых он определяет искомое асимптотическое решение уравнения (1.1).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $v_n(x)$ ряда в условии* (1.2) *при всех натуральных $n \geqslant 1$ удовлетворяют оценке*

$$|v_n(x)| \leqslant M_n \exp\left(-\delta x^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

с некоторыми положительными постоянными M_n и δ. Тогда при всех $n \geqslant 1$ в полуплоскости $\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0\}$ существуют решения $S_n(x,t)$ линейных параболических уравнений (2.4) *и* (2.5) *с функцией $S_0(x,t)$, определенной формулой* (2.2), *такие, что $S_n(x,0)=0$, и выполняются неравенства*

$$|S_n(x,t)| \leqslant M_n^* \exp\left(-\delta^* x^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

с некоторыми положительными постоянными M_n^*, δ^* и t^*. При этом ряд (2.1) *является асимптотическим решением уравнения* (1.1) *в смысле нарастания порядка малости невязки, остающейся после подстановки частичных сумм этого ряда в* (1.1).

Доказательство. Будем искать решения линейных уравнений (2.4) и (2.5) в следующем виде:

$$S_n(x,t) = u_n(x,t) \exp\left(\frac{1}{2} S_0(x,t)\right). \tag{4.2}$$

Тогда для амплитуд — функций $u_n(x,t)$ — получаем рекуррентную систему неоднородных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\,v_1(x) \exp\Big(-\frac{1}{2} S_0(x,t)\Big),$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\Big(v_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial S_j}{\partial x}\frac{\partial S_{n-j}}{\partial x}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{2} S_0(x,t)\Big),$$

решения которых с однородным начальным условием $u_n(x,0)=0$, что элементарно проверяется прямым дифференцированием, могут быть представлены в виде явного выражения

$$u_1(x,t) = -\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_1(\eta)\Phi(\eta,\theta)}{2\sqrt{\pi(t-\theta)}} \exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big) d\eta\, d\theta \tag{4.3}$$

и рекуррентной формулы

$$u_n(x,t) = -\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\eta,\theta)}{2\sqrt{\pi(t-\theta)}} \exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big)$$

$$\times \Big[v_n(\eta) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{u_j(\eta,\theta)}{\Phi(\eta,\theta)}\Big) \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{u_{n-j}(\eta,\theta)}{\Phi(\eta,\theta)}\Big)\Big] d\eta\, d\theta \tag{4.4}$$

при $n \geqslant 2$, включающих функцию (3.1) и коэффициенты v_n из условия (1.2).

Пользуясь установленными в леммах 1, 2 асимптотиками (3.2), (3.5) функции (3.1), неравенством (4.1) при $n=1$ для $v_1(x)$ и очевидными соотношениями

$$\exp\Big(-\frac{1}{2} S_0(x,t)\Big) = \Phi(x,t), \quad \exp\Big(\frac{1}{2} S_0(x,t)\Big) = \frac{1}{\Phi(x,t)},$$

получаем необходимую оценку для $S_1(x,t)$. Далее доказательство первого утверждения теоремы, почти в точности повторяя предыдущие рассуждения, без особого труда завершается по индукции на основе рекуррентной формулы (4.4).

Теперь необходимо проверить, что ряд (2.1)) с функцией $S_0(x,t)$, определенной формулой (2.2)), действительно является асимптотическим решением уравнения (1.1) в смысле последовательного повышения порядка малости невязки, остающейся после подстановки частичных сумм этого ряда в (1.1). С этой целью прежде всего заметим, что согласно предполагаемой оценке (4.1) условие (1.2) естественно считать асимптотикой в смысле Пуанкаре:

$$\forall N \geqslant 1 \quad \Big|V(x,\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n v_n(x)\Big| \leqslant M'_{N+1}\varepsilon^{N+1}, \quad M'_{N+1} > 0. \tag{4.5}$$

Тогда, рассматривая частичную сумму ряда (2.1)

$$\widetilde{S}_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n S_n(x,t)$$

и пользуясь уравнениями (2.3)–(2.5)), из неравенства (4.5) при $\varepsilon \to +0$ для произвольного $N \in \mathbb{N}$ находим следующее соотношение:

$$\frac{\partial \widetilde{S}_N}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \widetilde{S}_N}{\partial x}\Big)^2 + V(x,\varepsilon) - \frac{\partial^2 \widetilde{S}_N}{\partial x^2}$$
$$= \sum_{n=N+1}^{2N} \varepsilon^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial S_j}{\partial x}\frac{\partial S_{n-j}}{\partial x} + V(x,\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n v_n(x) = O\big(\varepsilon^{N+1}\big).$$

Таким образом, можно утверждать, что формулы (2.1), (2.2), (4.2), (4.3), (4.4) дают полное асимптотическое решение параболического уравнения типа Гамильтона—Якоби, определяемое простой краевой особенностью B_3, в смысле повышения при $N \to \infty$ порядка малости невязки, остающейся после подстановки частичных сумм ряда (2.1) в уравнение (1.1).

Теорема 1 полностью доказана. □

4.2. Существование истинного решения

Сейчас мы переходим к доказательству существования настоящего классического решения уравнения (1.1), асимптотикой которого является построенное выше асимптотическое решение. Для формулировки достаточных условий и доказательства точного утверждения нам понадобятся гёльдеровские классы $H^{\mu}(\mathbb{R})$ и $H^{\mu,\mu/2}(\overline{\Omega})$ — банаховы пространства функций $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $w : \Omega \to \mathbb{R}$, непрерывных вместе со всеми производными до порядка $[\mu]$ включительно и, соответственно, со всеми производными вида $\partial_t^r \partial_x^l w$ при $2r + l < \mu$; подробное определение можно найти в [15, гл. I, § 1].

Теорема 2. *Пусть функция потенциала $V(x,\varepsilon)$ и коэффициенты $v_n(x)$ ряда в условии (1.2) при всех $n \geqslant 1$ удовлетворяют неравенствам*

$$|V(x,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon M_0 \exp\big(-\delta x^2\big), \quad |v_n(x)| \leqslant M_n \exp\big(-\delta x^2\big) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

с некоторыми положительными постоянными M_0, M_n и δ. И пусть по пространственной переменной x функция $V(x,\varepsilon)$ и все коэффициенты $v_n(x)$ ее асимптотики (1.2) принадлежат гёльдеровскому классу $H^{\mu}(\mathbb{R})$, где $\mu > 0$.

Тогда в полосе

$$\Omega = \{(x,t)\colon x \in \mathbb{R},\ 0 < t < t^*\}, \tag{4.7}$$

где $t^* = \text{const} > 0$, *существует классическое решение* $S(x,t,\varepsilon)$ *задачи Коши для уравнения типа Гамильтона — Якоби* (1.1) *с начальным условием*

$$S(x,0,\varepsilon) = -2\ln\int_0^{+\infty}\exp\left(-\sigma^3 + x\sigma\right)d\sigma. \tag{4.8}$$

При этом ряд (2.1) *является асимптотикой этого решения, т. е. при всех* $N \geqslant 1$ *справедлива формула*

$$S(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon^n S_n(x,t) + O\left(\varepsilon^N\right), \quad \varepsilon \to +0,$$

с функциями $S_0(x,t) = -2\ln\Phi(x,t)$ *и* $S_n(x,t)$, *определенными в теореме 1.*

Доказательство. Подстановка[3]

$$S(x,t,\varepsilon) = -2\ln\Big(\Phi(x,t) + \sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^n w_n(x,t) + \varepsilon^N\widetilde{w}_N(x,t,\varepsilon)\Big) \tag{4.9}$$

в уравнение (1.1) после относительно простых вычислений приводит к выражению

$$\varepsilon\Big(Tw_1 - \frac{1}{2}v_1\Phi\Big) + \sum_{n=2}^{N-1}\varepsilon^n\Big(Tw_n - \frac{1}{2}v_n\Phi - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}v_{n-j}w_j\Big)$$

$$+\,\varepsilon^N\Big[T\widetilde{w}_N - \frac{1}{2}V(x,\varepsilon)\widetilde{w}_N - \frac{1}{2}\widetilde{v}_N\Phi - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\Big(v_{N-j}w_j + \varepsilon^j\widetilde{v}_N w_j + \varepsilon^{j-1}\sum_{p=j}^{N-1}v_{N+j-1-p}w_p\Big)\Big] = 0,$$

где использованы следующие обозначения:

$$Tw \equiv \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \widetilde{v}_N(x,\varepsilon) \equiv V(x,\varepsilon) - \sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^n v_n(x).$$

Отсюда ясно, что если функции w_n и $\widetilde{w}_N$ будут решениями уравнений

$$Tw_1 = \frac{1}{2}v_1\Phi, \quad Tw_n = \frac{1}{2}v_n\Phi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}v_{n-j}w_j, \tag{4.10}$$

$$T\widetilde{w}_N - \frac{1}{2}V(x,\varepsilon)\widetilde{w}_N = \frac{1}{2}\widetilde{v}_N\Phi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\Big(v_{N-j}w_j + \varepsilon^j\widetilde{v}_N w_j + \varepsilon^{j-1}\sum_{p=j}^{N-1}v_{N+j-1-p}w_p\Big) \tag{4.11}$$

с нулевыми начальными данными, то функция (4.9) будет являться решением задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным условием (4.8).

Из формул (3.2), (3.5) и неравенств (4.6) вытекает оценка

$$|v_n(x)\Phi(x,t)| \leqslant M_n''\exp\Big(-\delta\frac{x^2}{2}\Big), \quad M_n'' > 0,$$

из которой, в свою очередь, следует существование в полосе (4.7) C^∞-гладких решений уравнений (4.10) с нулевыми начальными данными:

$$w_1(x,t) = \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v_1(\eta)\Phi(\eta,\theta)}{4\sqrt{\pi(t-\theta)}}\exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big)d\eta\,d\theta,$$

[3]При $N = 1$ суммы вида $\sum_{:}^{N-1}$ считаем равными нулю.

$$w_n(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(\eta,\theta)}{4\sqrt{\pi(t-\theta)}}\Big(v_n(\eta)+\sum_{j=1}^{n-1}v_{n-j}(\eta)w_j(\eta,\theta)\Big)\exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big)d\eta\,d\theta.$$

По условию теоремы $V\in H^{\mu}(\mathbb{R})$ и $v_n\in H^{\mu}(\mathbb{R})$, а стало быть, этим же свойством обладает функция $\widetilde{v}_N$. Согласно [15, гл. IV, § 5, теорема 5.1] отсюда вытекает существование единственного решения $\widetilde{w}_N\in H^{\mu+2,\mu/2+1}(\overline{\Omega})$ уравнения (4.11) в полосе (4.7) с нулевыми начальными данными, при этом справедлива оценка

$$\|\widetilde{w}_N\|_{H^{\mu+2,\mu/2+1}(\overline{\Omega})}\leqslant \mathrm{g}_N(t^*)\,\|R\|_{H^{\mu,\mu/2}(\overline{\Omega})},$$

где $\mathrm{g}_N(t^*)>0$, а R — это правая часть уравнения (4.11).

Теперь можно утверждать, что классическое решение $S(x,t,\varepsilon)$ задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным условием (4.8) полностью определено формулой (4.9), из которой получается его асимптотика:

$$S(x,t,\varepsilon)=-2\ln\Phi(x,t)+\sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^nS_n^*(x,t)+O\big(\varepsilon^N\big),\quad \varepsilon\to+0.$$

Очевидно, что коэффициенты $S_n^*(x,t)$ удовлетворяют тем же дифференциальным уравнениям и начальным данным, что и построенные выше функции $S_n(x,t)$, а значит, $S_n^*(x,t)=S_n(x,t)$ и справедлива формула асимптотического приближения

$$S(x,t,\varepsilon)=-2\ln\Phi(x,t)+\sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^nS_n(x,t)+O\big(\varepsilon^N\big),\quad \varepsilon\to+0. \tag{4.12}$$

Докажем, что решение $S(x,t,\varepsilon)$ не зависит от выбора N, от противного. Пусть для некоторых N_1 и N_2 находятся различные решения $S_{(N_1)}(x,t,\varepsilon)$ и $S_{(N_2)}(x,t,\varepsilon)$. Тогда мы получим два различных решения

$$\varphi_1(x,t,\varepsilon)=-\Phi(x,t)+\exp\Big(-\frac12S_{(N_1)}(x,t,\varepsilon)\Big),\quad \varphi_2(x,t,\varepsilon)=-\Phi(x,t)+\exp\Big(-\frac12S_{(N_2)}(x,t,\varepsilon)\Big)$$

линейной задачи Коши

$$T\varphi-\frac12V(x,\varepsilon)\varphi=\frac12V(x,\varepsilon)\Phi(x,t),\quad \varphi(x,0,\varepsilon)=0,$$

где $V\Phi\in H^{\mu,\mu/2}(\overline{\Omega})$, что противоречит единственности ее решения [15, гл. IV, § 5, теорема 5.1].

Таким образом, теорема 2 полностью доказана. □

5. Замечания

A posteriori уместно, во-первых, дать дополнительные пояснения, относящиеся к аналитической структуре рассмотренного выше экспоненциального интеграла (3.1), определяющего полученное нами решение уравнения (1.1), во-вторых, в свете затронутых во введении связей изучаемых вопросов с близкими по направлению задачами теории дифференциальных уравнений интерпретировать установленные результаты и, в-третьих, указать возможные их обобщения.

5.1. Об экспоненциальном интеграле

Полная структура асимптотики интеграла (3.1) не очень проста: баланс значений подэкспоненциальной фазовой функции в точке $\sigma=0$ (т. е. на нижнем пределе интегрирования) и в точке внутреннего максимума (в случае его наличия) определяет на плоскости независимых переменных четыре области принципиально различного поведения, схематично показанные на рис. 1.

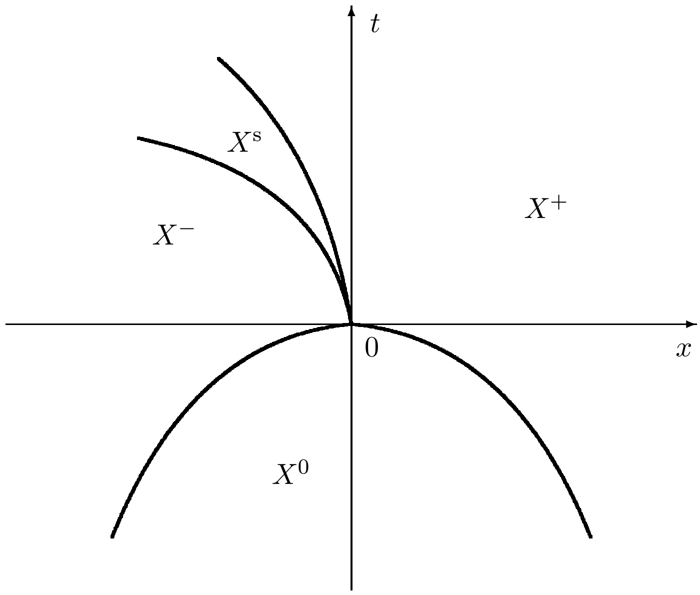

Рис. 1. Области специфического поведения функции $\Phi(x,t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^3 + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma$.

Утверждения лемм 1 и 2 из разд. 3 относятся к областям X^+ и X^-, в которых преобладает вклад соответственно от максимума внутри интервала интегрирования[4] и от максимума на нижнем пределе. Часть параболы $t^2+4x = 0$ при $t > 0$, а именно лежащее в области X^{s} множество точек, в которых значения указанных максимумов равны друг другу, представляет собой траекторию распространения диссипативно сглаженной ударной волны, а луч $\{x = 0,\ t < 0\}$, который есть лежащее в области X^0 множество точек слияния максимумов, — это линия диссипативно сглаженного контактного (слабого) разрыва.

5.2. Интерпретация построенного решения

Поскольку формулами (2.2), (4.2) и (4.3) указан явный вид нулевого и первого приближений асимптотического решения, для него справедливо следующее соотношение:

$$S(x,t,\varepsilon) = -2\ln\Phi(x,t) - \frac{\varepsilon}{\Phi(x,t)} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_1(\eta)\Phi(\eta,\theta)}{2\sqrt{\pi(t-\theta)}} \exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big) d\eta\, d\theta + O\left(\varepsilon^2\right)$$

при $\varepsilon \to +0$, где $\Phi(x,t)$ — это функция (3.1), а формула (4.12) показывает, что точность приближения решения последовательно улучшается при $N \to \infty$. Начальная функция

$$S(x,0,\varepsilon) = -2\,\ln \int_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^3 + x\sigma\right) d\sigma \ \sim \begin{cases} -\dfrac{4\,x^{3/2}}{\sqrt{27}}, & x \to +\infty, \\ 2\,\ln|x|, & x \to -\infty, \end{cases}$$

поведение которой определяется по формулам (3.2) и (3.5), — это логарифм “овеществленной” функции Эйри

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\Big(\frac{\sigma^3}{3} + x\sigma\Big) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big[i\Big(\frac{\sigma^3}{3} + x\sigma\Big)\Big] d\sigma.$$

[4]Интересно, что сама точка внутреннего максимума удовлетворяет уравнению Хопфа $\sigma_t = (\sigma^2)_x$, что легко проверяется дифференцированием по x и t уравнения $-3\sigma^2+2t\sigma+x = 0$ — условия равенства нулю производной фазовой функции (3.6).

Если теперь вернуться к приведенной в подразд. 2.1 интерпретации независимых переменных (x,t), считая их *внутренними* переменными,

$$x = \frac{\Lambda}{\varepsilon^{\alpha}}, \quad t = \frac{\Theta}{\varepsilon^{\beta}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

а (Λ, Θ) соответственно — *внешними* переменными, то получится решение, пространственный градиент которого будет иметь настоящее сингулярное поведение при $\varepsilon \to +0$.

5.3. Обобщение результатов

Полученное в данной работе решение можно обобщить на случай краевой особенности B_{2n+1} при всех $n \geqslant 2$, представив нулевое приближение в следующем виде:

$$S_0^{B_{2n+1}}(x,t) = -2\ln \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^{2n+1} + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma,$$

где аргументом экспоненты служит усеченная деформация ростка особенности B_{2n+1} [12, § 2]; соответствующее решение уравнения Бюргерса было найдено в [9, теорема 3]. Единственное существенное, хотя и чисто техническое, изменение в доказательствах — замена утверждения леммы 1 асимптотической эквивалентностью

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\sigma^{2n+1} + t\sigma^2 + x\sigma\right) d\sigma \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}\, \frac{x^{-1/2+1/4n}}{(2n+1)^{1/4}} \exp\left[2n\Big(\frac{x}{2n+1}\Big)^{1+1/2n}\right], \quad x \to +\infty.$$

Заметим еще, что $\Phi(x,t)$ и $S_0(x,t) = -2\ln\Phi(x,t)$ являются аналитическими функциями, определенными *во всей плоскости независимых переменных x и t*, а значит, можно также построить *глобальное* асимптотическое решение уравнения (1.1) с условием (1.2), если взять коэффициенты ряда (2.1) при $n \geqslant 1$ в следующем виде:

$$S_1^{\mathrm{gl}}(x,t) = -\frac{1}{\Phi(x,t)} \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_1(\eta)\Phi(\eta,\theta)}{2\sqrt{\pi(t-\theta)}} \exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big) d\eta\, d\theta,$$

$$S_n^{\mathrm{gl}}(x,t) = -\frac{1}{\Phi(x,t)} \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\eta,\theta)}{2\sqrt{\pi(t-\theta)}} \Big(v_n(\eta) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial S_j^{\mathrm{gl}}}{\partial \eta} \frac{\partial S_{n-j}^{\mathrm{gl}}}{\partial \eta}\Big) \exp\Big(-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\theta)}\Big) d\eta\, d\theta.$$

Не слишком быстрый рост функции $\Phi(x,t)$ гарантирует сходимость повторных интегралов. При этом, правда, из-за "расплывающейся" при $\theta \to -\infty$ экспоненты — ядра теплопроводности — понадобится провести отдельное, технически довольно трудоемкое, исследование, чтобы получить аккуратные оценки сингулярно зависящих от времени интегралов, например методом вспомогательного параметра [16, гл. 7, § 30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Crandall M.G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Am. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
2. **Fleming W.H., Soner H.M.** Controlled Markov processes and viscosity solutions. NY: Springer, 1993. 429 p.
3. **Bardi M., Crandall M.G., Evans L.C., Soner H.M., Souganidis P.E.** Viscosity solutions and applications / eds. by I. Capuzzo Dolcetta, Lions P.-L. Berlin: Springer, 1997. 259 p. (Lecture Notes in Math., vol. 1660).

4. **Benachour S., Karch G., Laurençot Ph.** Asymptotic profiles of solutions to viscous Hamilton–Jacobi equations // J. Math. Pures Appl. 2004. Vol. 83, no. 9. P. 1275–1308. doi: 10.1016/j.matpur.2004.03.002
5. **Biler P., Guedda M., Karch G.** Asymptotic properties of solutions of the viscous Hamilton–Jacobi equation // J. Evol. Eq. 2004. Vol. 4, iss. 1. P. 75–97. doi: 10.1007/s00028-003-0079-x
6. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
7. **Cannarsa P., Cheng W.** Singularities of solutions of Hamilton–Jacobi equations // Milan J. Math. 2021. Vol. 89, no. 3. P. 187–215. doi: 10.1007/s00032-021-00330-1
8. **Ильин А.М.** Об асимптотике решений одной задачи с малым параметром // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1989. Т. 53, вып. 2. С. 258–275.
9. **Захаров С.В.** Особенности типов A и B в асимптотическом анализе решений параболического уравнения // Функц. анализ и его приложения. 2015. Т. 49, №4. С. 82–85.
10. **Konopelchenko B.** Unfolding of singularities and differential equations // Note di Matematica. 2012. Vol. 32, no. 1. P. 125–145. doi: 10.1285/i15900932v32n1p125
11. **Лычагин В.В.** Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 20. С. 207–247.
12. **Арнольд В.И.** Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, №5. С. 91–105.
13. **Захаров С.В.** Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 47–62.
14. **Федорюк М.В.** Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
15. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
16. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

Поступила 18.10.2022
После доработки 12.12.2022
Принята к публикации 19.12.2022

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: svz@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
2. Fleming W.H., Soner H.M. *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* NY: Springer, 1993. ISBN 0-387-97927-1
3. Bardi M., Crandall M.G., Evans L.C., Soner H.M., Souganidis P.E. In: *Viscosity solutions and applications*, ed. by I. Capuzzo Dolcetta, Lions P.-L., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1660, Berlin: Springer, 1997. 259 p.
4. Benachour S., Karch G., Laurençot Ph. Asymptotic profiles of solutions to viscous Hamilton–Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl.*, 2004, vol. 83, no. 9, pp. 1275–1308. doi: 10.1016/j.matpur.2004.03.002
5. Biler P., Guedda M., Karch G. Asymptotic properties of solutions of the viscous Hamilton–Jacobi equation. *J. Evol. Eq.*, 2004, vol. 4, iss. 1, pp. 75–97. doi: 10.1007/s00028-003-0079-x
6. Arnold V.I. *Singularities of caustics and wave fronts.* Dordrecht: Kluwer, 1990, Math. and Its Appl. Ser., vol. 62, 259 p. ISBN: 0-7923-1038-1 . Translated under the title *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov*, Moscow, Fazis Publ., 1996, 334 p.
7. Cannarsa P., Cheng W. Singularities of solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Milan J. Math.*, 2021, vol. 89, no. 3, pp. 187–215. doi: 10.1007/s00032-021-00330-1
8. Il'in A.M. On the asymptotics of the solution of a problem with a small parameter. *Math. USSR-Izvestiya*, 1990, vol. 34, no. 2, pp. 261–279. doi: 10.1070/IM1990v034n02ABEH000629

9. Zakharov S.V. Singularities of A and B types in asymptotic analysis of solutions of a parabolic equation. *Funct. Anal. Appl.*, 2015, vol. 49, no. 4, pp. 307–310. doi: 10.1007/s10688-015-0120-1
10. Konopelchenko B. Unfolding of singularities and differential equations. *Note di Matematica*, 2012, vol. 32, no. 1, pp. 125–145. doi: 10.1285/i15900932v32n1p125
11. Lychagin V.V., Geometrical theory of singularities of solutions to nonlinear differential equations. *J. Math. Sci.* (NY), 1990, vol. 51, no. 6, pp. 2735–2757.
12. Arnold V.I. Critical point of functions on a manifold with an edge, simple Lie groups B_k, C_k, F_4, and singularities of evolutes. *Russian Math. Surveys*, 1978, vol. 33, no. 5, pp. 99–116.
13. Zakharov S.V. Asymptotic solution to a Cauchy problem in a neighborhood of gradient catastrophe *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 6, pp. 835–851. doi: 10.4213/sm1574
14. Fedoryuk M.V. *Asimptotika: Integraly i ryady* [Asymptotics: Integrals and series]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 544 p.
15. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence: AMS, 1968, 648 p. ISBN: 0821815733. Original Russian text published O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa.* Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
16. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3

Received October 18, 2022
Revised December 12, 2022
Accepted December 19, 2022

Sergei Viktorovich Zakharov, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: svz@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. V. Zakharov. Solution of a parabolic Hamilton–Jacobi type equation determined by a simple boundary singularity. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 77–90 .