ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 512.556

ПОЛУКОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ С РАСШИРЕННЫМ СЛОЖЕНИЕМ[1]

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

Исследуется полукольцо всех непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве X со значениями в топологическом поле действительных чисел $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$, пополненном изолированным нулем $\varnothing$, с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций. Такое полукольцо совпадает с полукольцом $CP(X)$ всевозможных непрерывных частичных действительнозначных функций, областями определения которых являются открыто-замкнутые подмножества топологического пространства X. Описаны максимальные идеалы и максимальные конгруэнции полуколец $CP(X)$. Найден один класс максимальных подалгебр в полукольцах $CP(X)$. Доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X полукольцом $CP(X)$ над ним. Изучен случай конечных дискретных пространств X.

Ключевые слова:расширенное поле действительных чисел, топологическое пространство, полукольцо непрерывных функций, частичная функция, идеал, конгруэнция, подалгебра, определяемость.

E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. Semirings of continuous partial numerical functions with extended addition.

The article deals with the semiring of all continuous functions on a topological space X with values in the topological field of real numbers $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$, which is completed by the isolated zero $\varnothing$. Operations of addition and multiplication over functions are pointwise. This semiring coincides with the semiring $CP(X)$ of all continuous partial real-valued functions whose domains are clopen subsets of the topological space X. The maximal ideals and maximal congruences of the semirings $CP(X)$ are described. A class of maximal subalgebras in the semirings $CP(X)$ is found. It is proved that any Hewitt space X is defined by the semiring $CP(X)$. The case of a finite discrete space X is studied.

Keywords: extended field of real numbers, topological space, semiring of continuous functions, partial function, ideal, congruence, subalgebra, definability.

MSC: 16Y60

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-56-66

Введение

Статья относится к теории колец и полуколец непрерывных функций — составной части функциональной алгебры (см. [2]). В теории функциональных (пучковых) представлений абстрактных полуколец полукольца непрерывных функций служат наглядным аналогом, предтечей полуколец глобальных сечений пучков полуколец [7].

Полукольца непрерывных частичных числовых функций на топологических пространствах изучаются нами с 2013 г. (см. [2, гл. 8]). Сначала рассматривались полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций, в которых областью определения суммы и произведения частичных функций f и g служит пересечение областей определения f и g (см. замечание 2).

Данная работа является первой статьей по полукольцам непрерывных частичных действительнозначных функций с расширенным сложением, когда область определения суммы двух частичных функций есть объединение областей определения слагаемых. Носителями таких полуколец естественно являются множества непрерывных частичных $\mathbb{R}$-значных функций, заданных на топологических пространствах и имеющих открыто-замкнутые области определения.

[1]При финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания “Полукольца и их связи” (проект № 1.5879.2017/8.9).

Результаты работы в случае дискретных пространств анонсированы в материалах Международной конференции в МГУ имени М. В. Ломоносова [1] и в общем случае, для тихоновских пространств, доложены на секции “Общая топология” Всероссийской конференции с международным участием “Теория управления и математическое моделирование”, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, в Удмуртском государственном университете (Ижевск, 15 июня 2022 г.).

Изучаются полукольца $C(X, \mathbb{R} \cup \{\varnothing\})$ всех непрерывных функций, заданных на топологических пространствах X, со значениями в топологическом поле $\mathbb{R}$ действительных чисел с добавленным изолированным нулем $\varnothing$. Полукольцо $C(X, \mathbb{R} \cup \{\varnothing\})$ фактически представляет собой полукольцо $CP(X)$ всех непрерывных частичных действительнозначных функций f с открыто-замкнутыми областями определения $D(f) \subseteq X$ с описанными ниже операциями сложения и умножения частичных функций.

Таким образом,

$$C(X, \mathbb{R} \cup \{\varnothing\}) = CP(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \text{ — открыто-замкнутое множество в } X\},$$

где $C(Y) = C(Y, \mathbb{R})$ — кольцо всех непрерывных действительнозначных функций на топологическом пространстве Y с поточечными операциями сложения и умножения функций.

Исследуются алгебраические свойства полуколец $CP(X) = C(X, \mathbb{R} \cup \{\varnothing\})$. Описаны все максимальные идеалы в полукольцах $CP(X)$ по аналогии с классической теоремой Гельфанда — Колмогорова (теорема 1). Доказано, что максимальные конгруэнции на полукольцах $CP(X)$ либо двухклассовые, либо являются отношениями Берна по максимальным идеалам (теорема 2). Выявлен один класс максимальных подалгебр в $CP(X)$ (теорема 3). Для конечных дискретных пространств X описаны решетки идеалов и конгруэнций полуколец $CP(X)$, а также максимальные подалгебры в $CP(X)$ (теорема 4).

Отметим, что общетопологические понятия и факты можно найти в трудах [6; 9], информация о решетках и булевых алгебрах содержится в [4; 5], теория полуколец излагается в книге [10], классической теории колец непрерывных функций посвящена монография [9].

1. Предварительные сведения

Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ с нейтральным элементом нуль 0 и ассоциативной операцией умножения $\cdot$ с нейтральным элементом единица 1, такая что умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и 0 является поглощающим элементом по умножению [10].

Рассмотрим полукольцо $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$, полученное добавлением к полю $\mathbb{R}$ действительных чисел нового нулевого элемента $\varnothing$. Наделим множество $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$ топологией, оставляя топологию на $\mathbb{R}$ естественной и считая одноточечное множество $\{\varnothing\}$ открыто-замкнутым. В результате получаем топологическое полукольцо $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$.

Пусть X — произвольное топологическое пространство.

Положим $C(X, \mathbb{R} \cup \{\varnothing\})$ — полукольцо всех непрерывных функций на топологическом пространстве X со значениями в топологическом полукольце $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$ с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций.

Пусть $CP(X) = \bigcup\{C(Y) \colon Y$ — открыто-замкнутое множество в $X\} = \{f \in C(Y) \colon Y = D(f)$ открыто-замкнуто в $X\}$. Через $D(f)$ обозначена область определения частичной функции f из X в $\mathbb{R}$. На множестве $CP(X)$ зададим операции сложения и умножения частичных функций поточечно: для $f, g \in CP(X)$ имеем $D(f+g) = D(f) \cup D(g)$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ при $x \in D(f) \cap D(g)$, $f + g = f$ на $D(f) \setminus D(g)$ и $f + g = g$ на $D(g) \setminus D(f)$, $D(fg) = D(f) \cap D(g)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ при $x \in D(f) \cap D(g)$. Относительно введенных операций $CP(X)$ становится полукольцом с коммутативным умножением с нулем $\varnothing$ и единицей — функцией-константой 1 на X, подполукольцами которого служат кольцо $C(X)$ и нулевое кольцо $\{\varnothing\}$.

Очевидно, что полукольца $C(X, \mathbb{R} \cup \{\varnothing\})$ и $CP(X)$ совпадают. Далее будем использовать обозначение $CP(X)$. Если пространство X связно, то $CP(X) = C(X) \cup \{\varnothing\}$. Если пространство X дискретно, то $CP(X)$ есть полукольцо всех частичных функций из X в $\mathbb{R}$ [1].

Для тихоновского пространства X через βX обозначается его *компактификация Стоуна — Чеха*, а через νX — *расширение Хьюитта*. Для всякого топологического пространства X полукольца $CP(X)$, $CP(\tau X)$ и $CP(\nu\tau X)$ канонически изоморфны, где τX, по общепринятому определению, — *тихоновизация* пространства X.

Напомним, что хаусдорфово пространство называется *нульмерным*, если открыто-замкнутые множества образуют в нем открытую базу. Топологическое пространство называется *тихоновским* (*хьюиттовским*), если оно гомеоморфно подпространству (замкнутому подпространству) прямой степени числовой прямой $\mathbb{R}$. Нульмерные пространства являются тихоновскими. Тихоновское пространство X называется *сильно нульмерным*, если его компактификация βX будет нульмерным пространством. Компактные хаусдорфовы пространства называются *компактами*.

Аналогично кольцам для полуколец вводятся общеалгебраические понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, фактор-полукольца, гомоморфизма и изоморфизма.

Для коммутативных полуколец S приведем некоторые определения.

Непустое подмножество J полукольца S называется *идеалом* полукольца S, если $\forall a, b \in J\, \forall s \in S\, (a + b, as \in J)$. Идеал J в S называется *собственным*, если $J \neq S$. Собственный идеал J полукольца S называется *простым*, если $\forall a, b \in S\, (ab \in J \Rightarrow (a \in J$ или $b \in J))$, либо *максимальным*, если J — максимальный элемент упорядоченного по включению множества всех собственных идеалов в S. Хорошо известно, что максимальные идеалы полуколец S являются простыми идеалами.

Отношение эквивалентности ρ на полукольце S называется *конгруэнцией* на S, если $\forall a, b, c \in S\, (a\rho b \Rightarrow ((a + c)\rho(b + c)$ и $(ac)\rho(bc))$. Через S/ρ обозначается соответствующее *фактор-полукольцо*. Конгруэнция на S называется *максимальной*, если она максимальный элемент упорядоченного по включению множества всех собственных (неодноклассовых) конгруэнций на S. Для произвольного идеала J полукольца S определена *конгруэнция Берна* $\rho(J)$ на S:

$$\forall a, b \in S\, (a\rho(J)b \Leftrightarrow \exists u, v \in J\, (a + u = b + v)).$$

Заметим, что для колец конгруэнция Берна по идеалу J будет отношением сравнимости по модулю J.

Полукольцо S называется

∘ *гельфандовым*, если для любых его максимальных идеалов $M \neq N$ существуют элементы $a \in S \setminus M$ и $b \in S \setminus N$, для которых $ab = 0$;

∘ *pm-полукольцом*, если каждый его простой идеал содержится в единственном максимальном идеале полукольца S.

Подполукольцо A полукольца $CP(X)$ называется *подалгеброй*, если A выдерживает умножение на числа из $\mathbb{R}$. Пустое множество $\varnothing$ также считаем подалгеброй в $CP(X)$.

Далее, если не оговорено иное, будем рассматривать только тихоновские пространства X.

Для функции $f \in CP(X)$ полагаем $Z(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X\colon f(x) = 0\}$ — *нуль-множество* на X, $\varnothing(f) = f^{-1}(\varnothing) = \{x \in X\colon f(x) = \varnothing\} = \{x \in X\colon f(x) \notin \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Ann} f = \{g \in CP(X) : fg = \varnothing\}$ — *аннулятор элемента* f в полукольце $CP(X)$. Имеем $Z(f) \subseteq D(f) = X \setminus \varnothing(f)$ для всех $f \in CP(X)$.

Если Y — открыто-замкнутое множество в X, то $0_Y, 1_Y \in CP(X)$ — такие функции, что $D(0_Y) = D(1_Y) = Y$, $0_Y = 0$ на Y и $1_Y = 1$ на Y. В частности, $0_X = 0$ и $1_X = 1$ — функции-константы 0 и 1 на X, $0_\varnothing = 1_\varnothing = \varnothing$ — нулевой элемент полукольца $CP(X)$.

Через $[Y]$ обозначим замыкание в βX произвольного множества $Y \subseteq X$.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in CP(X)$ множества $[D(f)]$ и $[\varnothing(f)]$ образуют открыто-замкнутое разбиение компакта βX.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непересекающиеся множества $D(f)$ и $\varnothing(f)$ открыто-замкнуты в тихоновском пространстве $X = D(f) \cup \varnothing(f)$. При этом $[D(f)] \cup [\varnothing(f)] = [D(f) \cup \varnothing(f)] = [X] = \beta X$. Рассмотрим функцию $g \in C(X)$, равную 1 на $D(f)$ и 0 на $\varnothing(f)$. Функция g имеет продолжение $g^\beta \in C(\beta X)$. Очевидно, что $Z(g^\beta) = [\varnothing(f)]$ и $Z(1 - g^\beta) = [D(f)]$. $\square$

Легко видеть, что верна следующая лемма.

Лемма 2. *Для произвольной функции $f \in CP(X)$ справедливы следующие утверждения:*

1) $f = 0_Y$ *для некоторого открыто-замкнутого множества Y в X* $\Leftrightarrow$ f — *аддитивный идемпотент, т. е. $f + f = f$;*
2) $f = 0 \Leftrightarrow fg = g \Leftrightarrow f + g = f$ *для всех аддитивных идемпотентов $g \in CP(X)$;*
3) $D(g) \subseteq D(f)$ *при* $g \in CP(X) \Leftrightarrow \operatorname{Ann} f \subseteq \operatorname{Ann} g$;
4) $D(g) = D(f)$ *при* $g \in CP(X) \Leftrightarrow \operatorname{Ann} f = \operatorname{Ann} g$;
5) $f = 1_Y$ *для некоторого открыто-замкнутого множества Y в X* $\Leftrightarrow \operatorname{Ann} g = \operatorname{Ann} f \Rightarrow fg = g$ *для любой функции* $g \in CP(X)$;
6) $f \in C(X) \Leftrightarrow \operatorname{Ann} f = \{\varnothing\} \Leftrightarrow f \cdot 0 = 0$.

Заметим, что свойства левых частей эквиваленций 1)–6) выражаются на алгебраическом языке полукольца $CP(X)$.

Возьмем в βX точки $p \neq q$. Определим множества в полукольце $CP(X)$:

$$M^p = \bigl\{f \in CP(X)\colon p \in [Z(f)] \text{ или } p \notin [D(f)]\bigr\},$$
$$P^q = \bigl\{f \in CP(X)\colon q \in [\varnothing(f)]\bigr\},$$
$$A^q = \bigl\{f \in CP(X)\colon q \in [D(f)]\bigr\} = CP(X) \setminus P^q \text{ (по лемме 1)},$$
$$A^{pq} = M^p \cup A^q.$$

По лемме 1 $M^p = \bigl\{f \in CP(X)\colon p \in [Z(f)] \cup [\varnothing(f)] = [Z(f) \cup \varnothing(f)]\bigr\}$.

В полукольце $CP(X)$ получаем идеалы M^p и P^q, подалгебры A^q и A^{pq} (доказательства даны ниже).

Ясно, что $M^p \cup A^p = CP(X)$ и $M^p \cap A^p = \bigl\{f \in CP(X)\colon p \in [Z(f)]\bigr\}$.

Если $p, q \in X$ и $p \neq q$, то

$$M^p = M_p = \bigl\{f \in CP(X)\colon f(p) = 0 \text{ или } f(p) = \varnothing\bigr\},$$
$$P^q = P_q = \bigl\{f \in CP(X)\colon f(q) = \varnothing\bigr\},$$
$$A^q = A_q = \bigl\{f \in CP(X)\colon f(q) \in \mathbb{R}\bigr\}$$
$$\text{и } A^{pq} = A_{pq} = \bigl\{f \in CP(X)\colon f(p) = 0 \text{ или } \varnothing, f(q) \neq \varnothing\bigr\}.$$

Множество $\operatorname{Max} CP(X)$ всех максимальных идеалов полукольца $CP(X)$ с топологией Стоуна — Зарисского называется его *максимальным спектром*.

В теореме 1 центральную роль играет классическая теорема Гельфанда — Колмогорова о строении максимальных идеалов колец $C(X)$ (см. [3; 8; 9, Theorem 7.3]).

Теорема Гельфанда — Колмогорова. *Максимальные идеалы кольца $C(X)$ суть в точности множества M^p по всем точкам $p \in \beta X$. Более того, отображение $p \mapsto M^p$ является гомеоморфизмом βX на максимальный спектр* $\operatorname{Max} C(X)$ *кольца $C(X)$.*

При доказательстве этой теоремы применются

Предложение A [9, Theorem 6.5 (IV)]. *Для любых функций $f, g \in C(X)$ имеет место равенство $[Z(f)] \cap [Z(g)] = [Z(f) \cap Z(g)]$.*

Теорема Хьюитта [9, Theorem 8.3]. *Хьюиттовские пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны кольца $C(X)$ и $C(Y)$.*

Предложение Б [2, предложение 7.2, теорема 7.4]. *Кольцо $C(X)$ гельфандово и является pm-кольцом.*

Следующее утверждение вытекает из результатов §§ 6, 17 книги [5].

Предложение В. *Максимальные конгруэнции на произвольной булевой алгебре B — это в точности двухклассовые конгруэнции, классами нуля которых служат максимальные идеалы в B.*

Предложение Г [2, теорема 3.1]. *Решетка $\mathrm{Con}(S\times T)$ всех конгруэнций прямого произведения полуколец S и T изоморфна прямому произведению $\mathrm{Con}\,S\times\mathrm{Con}\,T$ решеток конгруэнций сомножителей.*

Аналогично предложению Г имеет место

Предложение Д. *Решетка $\mathrm{Id}(S\times T)$ всех идеалов прямого произведения полуколец S и T изоморфна прямому произведению $\mathrm{Id}\,S\times\mathrm{Id}\,T$ решеток идеалов сомножителей.*

Лемма 3. *Для любой точки $p\in\beta X$ множество P^p является простым идеалом полукольца $CP(X)$, строго содержащимся во множестве M^p.*

Лемма 4. *Пересечение всевозможных простых идеалов полукольца $CP(X)$ есть нулевой идеал $\{\varnothing\}$.*

Леммы 3 и 4 вытекают из определений и лемм 1 и 2.

Лемма 5. *Для любых двух точек $p,q\in\beta X$ эквивалентны следующие утверждения:*

1) *точки p и q отделяются открыто-замкнутым множеством в βX;*
2) *существуют функции $f,g\in CP(X)$, для которых $f\notin M^p$, $g\notin M^q$ и $f\cdot g=\varnothing$;*
3) *$A^p\neq A^q$ (равносильно $P^p\neq P^q$);*
4) *$A^{pq}\neq CP(X)$.*

Доказательство. Пусть верно утверждение 1). Тогда в βX существует открыто-замкнутое множество U, содержащее точку p и не содержащее точку q. Рассмотрим такие функции $f,g\in CP(X)$, что $f=1$ на $U\cap X$, $f=\varnothing$ на $X\setminus U$ и $g=\varnothing$ на $U\cap X$, $g=1$ на $X\setminus U$. В силу леммы 1 $f\notin M^p$, $g\notin M^q$ и $f\cdot g=\varnothing$ — нуль полукольца $CP(X)$. Более того, $f\in A^p\setminus A^{pq}$. Поэтому 1) влечет утверждения 2)– 4).

Очевидно, $f\in A^p\setminus A^{pq}$ для функции f из утверждения 2). Поэтому из 2) следуют утверждения 3) и 4).

3)⇒1). Предположим, что $f\in A^p\setminus A^q$. По лемме 1 множество $[D(f)]$ открыто-замкнуто в βX. Поскольку $p\in[D(f)]$ и $q\notin[D(f)]$, то $[D(f)]$ разделяет точки p и q.

4)⇒1). Предположим, что $A^{pq}\neq CP(X)$. Для любой функции $f\in CP(X)\setminus A^{pq}$ имеем $f\notin M^p$ и $f\notin A^q$. Как и в предыдущей импликации, открыто-замкнутое множество $[D(f)]$ разделяет точки p и q. □

Для любых функций $f,g\in CP(X)$ положим: $fDg\Leftrightarrow D(f)=D(g)$. Получаем конгруэнцию D на полукольце $CP(X)$. Произвольную конгруэнцию ρ на полукольце $CP(X)$, содержащую конгруэнцию D ($D\subseteq\rho$), назовем *D-конгруэнцией.*

Лемма 6. *Фактор-полукольцо $CP(X)/D$ будет булевой алгеброй.*

Доказательство. Действительно, фактор-полукольцо $CP(X)/D$ изоморфно булевой алгебре всех открыто-замкнутых множеств топологического пространства X. □

2. Основные результаты

Сначала выясним строение максимальных идеалов полуколец CP(X).

Теорема 1. *Для любого тихоновского пространства X множествами M^p по всем точкам $p \in \beta X$ исчерпываются все максимальные идеалы полукольца $CP(X)$. Максимальный спектр $\operatorname{Max} CP(X)$ полукольца $CP(X)$ гомеоморфен стоун-чеховской компактификации βX тихоновского пространства X.*

Доказательство. Сначала покажем, что для произвольной точки $p \in \beta X$ множество M^p является идеалом полукольца $CP(X)$. Для этого возьмем функции $f, g \in M^p$ и $h \in CP(X)$. Поскольку $p \in [Z(f) \cup \varnothing(f)] \subseteq [Z(fh) \cup \varnothing(fh)]$, то $fh \in M^p$. Убедимся, что $f + g \in M^p$. Множества $D(f)$, $\varnothing(f)$, $D(g)$, $\varnothing(g)$ являются нуль-множествами на пространстве X. По условию в силу предложения A имеем

$$\begin{gathered} p \in ([Z(f)] \cup [\varnothing(f)]) \cap ([Z(g)] \cup [\varnothing(g)]) \\ = ([Z(f)] \cap [Z(g)]) \cup ([Z(f)] \cap [\varnothing(g)]) \cup ([\varnothing(f)] \cap [Z(g)]) \cup ([\varnothing(f)] \cap [\varnothing(g)]) \\ = ([Z(f) \cap Z(g)] \cup [Z(f) \cap \varnothing(g)] \cup [\varnothing(f) \cap Z(g)]) \cup [\varnothing(f) \cap \varnothing(g)] \subseteq [Z(f+g)] \cup [\varnothing(f+g)]. \end{gathered}$$

Значит, $f + g \in M^p$.

Далее, для различных точек $p, q \in \beta X$ идеалы M^p и M^q различны. Действительно, множества $C(X) \cap M^p$ и $C(X) \cap M^q$ суть различные максимальные идеалы кольца $C(X)$ согласно теореме Гельфанда — Колмогорова.

Для завершения доказательства первой части теоремы остается установить, что любой собственный идеал J полукольца $CP(X)$ содержится в некотором идеале M^p этого полукольца. Предположим от противного, что идеал J не содержится ни в каком идеале M^p, $p \in \beta X$. Это означает, что для каждой точки $p \in \beta X$ найдется функция $f_p \in J \backslash M^p$, т. е. p лежит в открытом в βX множестве $U_p = [D(f_p)] \setminus [Z(f_p)]$. Множества U_p, $p \in \beta X$, образуют открытое покрытие компактного пространства βX. Поэтому βX есть объединение конечного числа множеств U_p при $p = p_1, \ldots, p_n \in \beta X$. Соответствующие функции обозначим через $f_1, \ldots, f_n$. Имеем $X = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n) = D(f_1^2 + \ldots + f_n^2)$, функция $f_1^2 + \ldots + f_n^2 \in J$ и положительна на X. Следовательно, $J = CP(X)$ — несобственный идеал, так как содержит обратимый элемент. Полученное противоречие завершает доказательство первой части теоремы.

Докажем второе утверждение теоремы. В силу уже доказанного выводим взаимно однозначное отображение $\varphi : \beta X \to \operatorname{Max} CP(X)$, $\varphi(p) = M^p$ для любой точки $p \in \beta X$. Проверим непрерывность биекции φ. В максимальном спектре $\operatorname{Max} CP(X)$ множества $\mathcal{Z}(f) = \{M^p : f \in M^p\}$, $f \in CP(X)$, образуют базу замкнутых множеств. Поэтому достаточно показать, что любое множество $\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(f))$ замкнуто в βX. Имеем

$\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(f)) = \{p \in \beta X : f \in M^p\} = \{p \in \beta X : p \in [Z(f) \cup \varnothing(f)]\} = [Z(f) \cup \varnothing(f)]$.

Далее, пространство $\operatorname{Max} CP(X)$ компактно как непрерывный образ компактного пространства βX. Возьмем точки $p \neq q$ в βX. Мы уже отмечали, что $C(X) \cap M^p \neq C(X) \cap M^q$ суть максимальные идеалы кольца $C(X)$, являющегося гельфандовым в силу предложения Б. Поэтому в $C(X) \subset CP(X)$ существуют функции $f \notin M^p$ и $g \notin M^q$, для которых $f \cdot g = 0$ — функция-константа $0 \in \bigcap\{M^y : y \in \beta X\}$. Так как максимальные идеалы полукольца $CP(X)$ — простые, то элементы M^p и M^q максимального спектра $\operatorname{Max} CP(X)$ имеют непересекающиеся (открытые) окрестности $U(f) = \{M^y : f \notin M^y\}$ и $U(g) = \{M^y : g \notin M^y\}$. Стало быть, пространство $\operatorname{Max} CP(X)$ хаусдорфово. Хорошо известно, что всякая непрерывная биекция компакта на компакт есть гомеоморфизм. Значит, φ — гомеоморфизм. □

Как следствие, получаем

Предложение 1. *Пересечение всех максимальных идеалов полукольца $CP(X)$ равно идеалу, состоящему из всех его аддитивных идемпотентов.*

Предложение 2. *Эквивалентны следующие утверждения*:

1) *полукольцо* $CP(X)$ *гельфандово*;
2) $CP(X)$ *является* pm*-полукольцом*;
3) X *— сильно нульмерное пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1)$\Rightarrow$2). Легко видеть, что любое гельфандово полукольцо является pm-полукольцом.

2)$\Rightarrow$3) на основании лемм 3 и 5 и теоремы 1.

3)$\Rightarrow$1) в силу леммы 5. □

Опишем максимальные конгруэнции на полукольцах $CP(X)$.

Теорема 2. *Всякая максимальная конгруэнция на полукольце* $CP(X)$ *над тихоновским пространством* X *— либо двухклассовая* D*-конгруэнция, либо является конгруэнцией Берна по некоторому максимальному идеалу полукольца* $CP(X)$*. Кроме того, любая собственная конгруэнция на полукольце* $CP(X)$ *содержится в некоторой максимальной конгруэнции на* $CP(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим собственную конгруэнцию ρ на полукольце $CP(X)$. Возможны два случая.

1. $0\rho 1$. Тогда кольцо $C(X)$ попадает в один класс конгруэнции ρ, а именно, $C(X) \subseteq [0]_\rho$. Возьмем частичные функции $f, g \in CP(X)$, для которых $D(f) = D(g)$. Имеем $(f+0)\rho(g+0)$, $f = (f+0)1_{D(f)}$ и $g = (g+0)1_{D(f)}$, откуда $f\rho g$. Значит, ρ является D-конгруэнцией, то есть $D \subseteq \rho$. Согласно лемме 6 фактор-полукольцо $CP(X)/D$ — это булевая алгебра и ρ/D — собственная конгруэнция на ней. По предложению B конгруэнция ρ/D содержится в подходящей двухклассовой конгруэнции σ/D на булевой алгебре $CP(X)/D$. Поэтому ρ содержится в двухклассовой D-конгруэнции σ, являющейся максимальной конгруэнцией на $CP(X)$.

2. Неверно, что $0\rho 1$. Тогда ограничение конгруэнции ρ на кольцо $C(X)$ будет собственной конгруэнцией ρ_1 на $C(X)$. Конгруэнции на кольце суть в точности конгруэнции Берна по его идеалам. Поэтому конгруэнция ρ_1 включена в максимальную конгруэнцию на кольце $C(X)$, являющуюся конгруэнцией Берна по некоторому максимальному идеалу M кольца $C(X)$. В соответствии с теоремой Гельфанда — Колмогорова и теоремой 1 $M = C(X) \cap M^p$ для однозначно определенной точки $p \in \beta X$.

Покажем, что исходная конгруэнция ρ содержится в конгруэнции Берна $\rho(M^p)$ по максимальному идеалу M^p полукольца $CP(X)$. Пусть $f\rho g$ для частичных функций $f, g \in CP(X)$. Тогда $(f+0)\rho(g+0)$, $(f+0)\rho_1(g+0)$ и $(f+0)\rho(M^p)(g+0)$. Поскольку $0 \in M^p$ и $f+0 = (f+0)+0$, то $f\rho(M^p)(f+0)$. Аналогично $(g+0)\rho(M^p)g$. Значит, $f\rho(M^p)g$. Следовательно, $\rho \subseteq \rho(M^p)$. □

Затронем тему подалгебр в полукольцах $CP(X)$.

Предложение 3. *Для любых двух различных точек* $p, q \in \beta X$ *множества* A^q *и* A^{pq} *являются подалгебрами полукольца* $CP(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что A^q — подалгебра. Возьмем $f, g \in A^q$, $h \in CP(X)$ и $e \in C(X)$. Имеем $q \in [D(f)]$ и $q \in [D(g)]$. Открыто-замкнутые множества $D(f)$ и $D(g)$ — это нуль-множества на X. Тогда по предложению A $q \in [D(f)] \cap [D(g)] = [D(f) \cap D(g)] = [D(fg)]$, стало быть, $fg \in A^q$. $D(f) \subseteq D(f+h)$ и $D(f) = D(fe)$, отсюда $f+h, fe \in A^q$. Тем самым A^q — это не просто подалгебра в $CP(X)$, но и аддитивный идеал ($A^q + CP(X) \subseteq A^q$) и $C(X)$-полумодуль ($A^q \cdot C(X) \subseteq A^q$).

Докажем, что $A^{pq} = M^p \cup A^q$ — подалгебра. M^p есть идеал полукольца $CP(X)$ по теореме 1 и A^q — его подалгебра со свойствами $A^q + CP(X) \subseteq A^q$ и $A^q \cdot C(X) \subseteq A^q$, поэтому $A^{pq} = M^p \cup A^q$ будет подалгеброй и $C(X)$-подполумодулем полукольца $CP(X)$. □

Теорема 3. *Для точек $p \neq q$ из βX подалгебра A^{pq} будет максимальной тогда и только тогда, когда точки p и q отделяются открыто-замкнутым множеством пространства βX.*

Доказательство. По предложению 3 множество A^{pq} является подалгеброй в полукольце $CP(X)$. Если подалгебра A^{pq} — максимальная, то $A^{pq} \neq CP(X)$. И тогда в силу леммы 5 точки p и q отделяются открыто-замкнутым множеством пространства βX.

Обратно, пусть p и q отделяются открыто-замкнутым множеством в βX. Снова по лемме 5 подалгебра A^{pq} будет собственной. Для доказательства ее максимальности возьмем функцию $f \in CP(X) \setminus A^{pq}$ и покажем, что точная верхняя грань (относительно включения $\subseteq$) $A^{pq} \vee (f)$ подалгебры $A^{pq} = M^p \cup A^q$ и однопорожденной подалгебры (f) совпадает с $CP(X)$. Поскольку M^p — максимальный идеал, то $M^p + fCP(X) = CP(X)$. Убедимся, что $fCP(X) = fA^q$. Возьмем функцию $fg, g \in CP(X)$. Так как $f \notin A^q$, то $q \in [\varnothing(f)]$. Рассмотрим функцию h, равную g на $[D(f)]$ и 1 на $[\varnothing(f)]$. Имеем $h \in A^q$ и $fg = fh \in fA^q$. Следовательно, $CP(X) = M^p + fA^q \subseteq A^{pq} \vee (f)$, что завершает доказательство теоремы. □

Из теоремы 3 вытекает

Предложение 4. *Для тихоновского пространства X подалгебры вида A^{pq}, $p \neq q$ из βX, являются максимальными подалгебрами полукольца $CP(X)$ тогда и только тогда, когда пространство X сильно нульмерно.*

Предложение 5. *Произвольное хьюиттовское пространство X определяется однозначно — с точностью до гомеоморфизма — своим полукольцом $CP(X)$.*

Доказательство. Пусть даны хьюиттовские пространства X, Y и изоморфизм α полукольца $CP(X)$ на полукольцо $CP(Y)$. В силу утверждения 6 леммы 2 $\alpha(C(X)) = C(Y)$. Поэтому кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны. Остается применить теорему Хьюитта. □

3. Конечные дискретные пространства

Рассмотрим полукольцо $CP(X)$ над n-элементным дискретным топологическим пространством X $(n \in \mathbb{N})$.

Случай $n = 1$. Полукольцо $R \cup \{\varnothing\}$, изоморфное полукольцу $CP(X)$ при одноэлементном пространстве X, имеет

∘ три идеала, образующие трехэлементную цепь $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing, 0\} \subset \mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$, причем, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, 0\}$ — простые идеалы, $\{\varnothing, 0\}$ — максимальный идеал;

∘ четыре конгруэнции: отношение равенства (наименьшая), конгруэнцию с двумя классами, $\{\varnothing\}$ и $\mathbb{R}$, с одним неодноэлементным классом $\{\varnothing, 0\}$, одноклассовую (наибольшая), причем вторая и третья конгруэнции — максимальные, при этом решетка конгруэнций изоморфна прямому произведению двух двухэлементных цепей;

∘ шесть подалгебр: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{0\}$, $\{\varnothing, 0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cup \{\varnothing\}$, в числе которых $\{\varnothing, 0\}$, $\mathbb{R}$ — максимальные подалгебры.

Теорема 4. *Для n-элементного дискретного пространства X $(2 \leq n \in \mathbb{N})$ справедливы следующие утверждения:*

1) *решетка идеалов полукольца $CP(X)$ есть прямое произведение n трехэлементных цепей, значит, содержит 3^n элемента, среди которых n максимальных идеалов и $2n$ простых идеала;*

2) *решетка конгруэнций полукольца $CP(X)$ есть прямое произведение $2n$ двухэлементных цепей, стало быть, содержит 4^n элемента, среди которых $2n$ максимальных конгруэнций: n максимальных D-конгруэнций и n конгруэнций Берна по максимальным идеалам;*

3) *максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ суть в точности подалгебры A_{xy} по различным точкам x, y пространства X, следовательно, их число равно $n(n-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1) и 2) верны на основании предложений Д и Г соответственно. Отметим только, что максимальные идеалы в полукольце $CP(X)$ — это идеалы M_x, а немаксимальные простые идеалы суть P_x по всем n точкам $x \in X$.

3) По предложению 4 подалгебры A_{xy} максимальны. Докажем, что максимальные подалгебры полукольца $CP(X)$ можно представить в виде $A_{xy} = M_x \cup A_y$. Для этого достаточно показать, что любая собственная подалгебра A полукольца $CP(X)$ содержится в некоторой его подалгебре A_{xy}. Предположим противное. Тогда для любой пары различных точек $x, y \in X$ существует функция $f_{xy} \in A \setminus A_{xy}$. Имеем $f_{xy}(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f_{xy}(y) = \varnothing$. Зафиксируем точку $x \in X$ и рассмотрим произведение g функций f_{xy} по всем точкам $y \in X \setminus \{x\}$. Умножив функцию g на число $g(x)^{-1}$, получим функцию $1_{\{x\}} \in A$. Итак, для каждой точки $x \in X$ подалгебра A содержит функцию $1_{\{x\}}$. Для различных точек $x, y \in X$ имеем $\varnothing = 1_{\{x\}}1_{\{y\}} \in A$. Произвольная функция $f \in CP(X)$ равна сумме функций $f(x)1_{\{x\}} \in A$. Значит, $A = CP(X)$, что невозможно. □

4. Замечания

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы Гельфанда — Колмогорова следует, что пересечение всех максимальных идеалов произвольного кольца $C(X)$ есть нулевой идеал, а по предложению Б кольцо $C(X)$ гельфандово и является pm-кольцом. Сформулированные выше предложения 1 и 2 показывают, что в полукольцах $CP(X)$ ситуация отличается от случая колец $C(X)$. Это подтверждают и другие приведенные результаты. Например, в кольцах конгруэнции совпадают с отношениями сравнимости по модулю их идеалов, в то время как в полукольцах $CP(X)$ D-конгруэнции не являются конгруэнциями Берна.

З а м е ч а н и е 2. В монографии [2, гл. 8] мы изучали полукольца $\bigcup\{C(Y)\colon Y \subseteq X\}$ всевозможных непрерывных частичных действительнозначных функций на топологических пространствах X с поточечно заданными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общих областях определения $D(f) \cap D(g)$. Обозначим такие полукольца через $S(X)$. Полукольца $S(X)$ не имеют нуля, но обладают элементом $\varnothing$ поглощающим как по умножению, так и по сложению. Теория полуколец $S(X)$ существенно отличается от теории полуколец $CP(X)$. Так, максимальные идеалы в произвольном полукольце $S(X)$ суть в точности множества $(S(X) \setminus C(X)) \cup M$ по всем максимальным идеалам M кольца $C(X)$ [2, предложение 40.2], а все максимальные конгруэнции двухклассовые [2, теорема 41.1].

З а м е ч а н и е 3. В случае произвольного связного тихоновского пространства X получаем полукольцо $CP(X) = C(X) \cup \{\varnothing\}$, в котором можно выделить три вида максимальных подалгебр: $C(X)$; M^p при $p \in \nu X$; $A(p,q) = \{f \in C(X)\colon f^\nu(p) = f^\nu(q)$ для точек $p \neq q$ из $\nu X\} \cup \{\varnothing\}$. Здесь $f^\nu \in C(\nu X)$ — непрерывное продолжение функции $f \in C(X)$ на хьюиттовское расширение νX тихоновского пространства X. Отметим, что остается нерешенной проблема описания максимальных подалгебр колец $C(X)$ даже для компактов X [2, задача 9.34].

З а м е ч а н и е 4. В случае конечных дискретных пространств X можно описать все подалгебры полуколец $CP(X)$ через разбиения множества X по аналогии с кольцами $C(X)$ [2, теорема 9.3].

З а м е ч а н и е 5. Предполагается публикация статьи, продолжающая данную работу. В нее войдут следующие анонсируемые нами результаты.

(1) Характеризации F-пространств X и P-пространств X в терминах полуколец $CP(X)$.

(2) Определяемость любого хьюиттовского пространства X каждой из следующих решеток: решеткой всех идеалов, решеткой всех конгруэнций, решеткой всех подалгебр полукольца $CP(X)$.

(3) Теорема двойственности (антиэквивалентности) категории всех хьюиттовских пространств X с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категории полуколец $CP(X)$ и их гомоморфизмов, сохраняющих единицу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вечтомов Е.М.** О полукольцах частичных функций с расширенным сложением // Междунар. конф., посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры мех.-мат. фак. МГУ: тез. докл. МГУ. Москва , 2019. С. 18–19.
2. **Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Сидоров В.В., Чупраков Д.В.** Элементы функциональной алгебры: в 2 т. Киров: ООО «Изд-во «Радуга-ПРЕСС», 2016. Т. 1, 384 с.; Т. 2, 316 с.
3. **Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н.** О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22, № 1. С. 11–15.
4. **Гретцер Г.** Общая теория решеток / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 456 с.
5. **Сикорский Р.** Булевы алгебры / пер. с анг. М.: Мир, 1969. 376 с.
6. **Энгелькинг Р.** Общая топология / пер. с англ. М.: Мир, 1986. 752 с.
7. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings // J. Math. Sci. (NY). 2012. Vol. 187, no. 2. P. 187–267.
8. **Gillman L., Henriksen M., Jerison M** On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 5, no. 3. P. 447–455.
9. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. NY: Springer-Verlag, 1960. 300 p.
10. **Golan J.S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 382 p.

Поступила 12.10.2022
После доработки 16.11.2022
Принята к публикации 21.11.2022

Вечтомов Евгений Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
заведующий кафедрой фундаментальной математики
Вятский государственный университет, г. Киров
e-mail: vecht@mail.ru

Лубягина Елена Николаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры фундаментальной математики
доцент
Вятский государственный университет, г. Киров
e-mail: shishkina.en@mail.ru

REFERENCES

1. Vechtomov E.M. On semirings of partial functions with extended addition. In: *International conference dedicated to the 90th anniversary of the Department of Higher Algebra, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University*, Abstracts of reports, Moscow: Moscow State University Publ., 2019, pp. 20–22 (in Russian).
2. Vechtomov E.M., Lubyagina E.N., Sidorov V.V., Chuprakov D.V. *Elementy funktsional'noi algebry* [Elements of functional algebra], vol. 1, 384 p, vol. 2, 316 p. Kirov: Raduga-PRESS Publishing House Publ., 2016. ISBN: 975-5-9909330-0-2 .
3. Gelfand I.M., Kolmogorov A.N. On rings of continuous functions on topological spaces. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1939, vol. 22, no. 1, pp. 11–15 (in Russian).
4. Gratzer G. *General lattice theory.* Acad. Press, 1978, 380 p. ISBN: 008087391X . Translated to Russian under the title Gratzer G. Obshchaya teoriya reshetok, Moscow: Mir Publ., 1982, 456 p.
5. Sikorski R. *Boolean algebras*, Berlin, Heidelberg: Springer, 1969, 240 p. ISBN: 9783540044697 . Translated to Russian under the title Sikorski R. Bulevy algebry, Moscow: Mir Publ., 1969, 376 p.
6. Engelking R. *General topology.* Warsaw, PWN/Polish Scientific Publishers, 1977. ISBN: 0800202090. Translated to Russian under the title R. Engelking, Obshchaya topologiya, Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
7. Chermnykh V.V. Functional representations of semirings. *J. Math. Sci. (NY)*, 2012, vol. 187, no. 2, pp. 187–267.

8. Gillman L., Henriksen M., Jerison M On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1954, vol. 5, no. 3, pp. 447–455.
9. Gillman L., Jerison M. *Rings of continuous functions.* NY: Springer-Verlag, 1960, 300 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7819-2
10. Golan J.S. *Semirings and their applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999, 382 p. doi: 10.1007/978-94-015-9333-5

Received October 12, 2022
Revised November 16, 2022
Accepted November 21, 2022

Funding Agency: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the state contract "Semirings and Their Connections" (project no. 1.5879.2017/8.9).

Evgenii Mikhailovich Vechtomov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vyatka State University, Kirov, 610000, Russia, e-mail: vecht@mail.ru .

Elena Nikolaevna Lubyagina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Vyatka State University, Kirov, 610000, Russia, e-mail: shishkina.en@mail.ru .

Cite this article as: E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. Semirings of continuous partial numerical functions with extended addition. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 56–66 .