ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.984

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ЧАСТЕЙ С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ[1]

Д. И. Борисов

В работе исследуется двумерная краевая задача для скалярного эллиптического уравнения второго порядка общего вида с частой сменой краевых условий. Смена задаётся на малых близко расположенных частях границы, на которых поочередно выставляются краевое условие Дирихле и нелинейное третье краевое условие. Распределение и размеры данных отрезков произвольны. Рассматривается случай, когда при усреднении краевое условие Дирихле полностью пропадает и остаётся только исходное нелинейное третье краевое условие. Основной результат — оценки на W_2^1- и L_2-нормы разности решений возмущённой и усреднённой задач, равномерные по L_2-норме правой части, характеризующие скорость сходимость. Показано, что данные оценки точны по порядку малости.

Ключевые слова: двумерная краевая задача, эллиптическое уравнение, частая смена, усреднение, операторная оценка.

D. I. Borisov. Operator estimates in two-dimensional problems with a frequent alternation in the case of small parts with the Dirichlet condition.

A two-dimensional boundary value problem is studied for a scalar elliptic second-order equation of the general form with frequent alternation of boundary conditions. The alternation is defined on small, closely spaced parts of the boundary, on which the Dirichlet boundary condition and the nonlinear third boundary condition are set alternately. The distribution and size of these segments are arbitrary. The case is considered when, upon averaging, the Dirichlet boundary condition completely disappears and only the original nonlinear third boundary condition remains. The main result is estimates for the W_2^1- and L_2-norms of the difference between the solutions of the perturbed and averaged problems, which are uniform in the L_2-norm of the right-hand side and characterize the rate of convergence. It is shown that these estimates are exact in the order of smallness.

Keywords: two-dimensional boundary value problem, elliptic equation, frequent alternation, homogenization, operator estimate.

MSC: 35B27, 35B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-36-55

Введение

Задачи с частой сменой краевых условий – один из классических примеров современной граничной теории усреднения. Суть возмущения в таких задачах состоит в разбиении границы области или части границы на мелкие куски, на которых поочередно задаются краевые условия разного типа, обычно условие Дирихле и второе или третье краевое условие. Вопросам сходимости таких задач посвящено достаточно много работ, см., например, [1–8]. Классические результаты описывают вид усредненных краевых задач в зависимости от геометрии чередования и утверждают сильную или слабую сходимость в W_2^1 или L_2 для заданной правой части уравнения.

В последние 15 лет интерес к задачам с частой сменой краевых условий возник в связи с интенсивным развитием нового направления, посвященного доказательству операторных

[1]Работа частично поддержана Чешским грантовым агенством (грант No. 22-18739S) и Министерством просвещения Российской Федерации в рамках государственного задания (соглашение № 073-03-2023-010 от 26.01.2023).

оценок для задач из теории усреднении. Речь идет о доказательстве сходимости решений возмущенных задач к усредненным равномерно по L_2-норме правой части в рассматриваемых уравнениях. Если в линейном случае такого рода задачи интерпретировались на языке спектральной теории операторов, а решения задач — как действия резольвент, то операторные оценки фактически устанавливали сходимость резольвент в операторных нормах и давали оценки скорости сходимости. Для задач с частой сменой краевых условий такие оценки в различных случаях были установлены в работах [9–13]. В статьях [9–11] исследовались задачи в плоских бесконечных полосах, на одной из границ которых устраивалась частая смена условия Дирихле и третьего краевого условия. Смена была либо строго периодической [9;10], либо близкой к периодической [11]. В качестве дифференциального выражения в уравнении выбиралось уравнение Пуассона или магнитный оператор Шрёдингера. В [12;13] уже рассматривались задачи в произвольных многомерных областях, а смена была существенно непериодической. В указанных работах были установлены операторные оценки для W_2^1-нормы разности решений возмущенных и усредненных задач. В двумерном случае был также получен ряд оценок для L_2-нормы разности решений возмущенных и усредненных задач. При этом факт периодичной или близкой к периодичной структуры чередования в [9–11] использовался по существу. Вопросы оптимальности полученных оценок в [9–13] не обсуждались.

Совсем недавняя статья [14] вновь посвящена двумерной краевой задаче для уравнения второго порядка общего вида с частым чередованием условия Дирихле и нелинейного третьего краевого условия. Чередование задавалось в общем виде без каких-либо предположений о периодичности и включало в себя широкий класс различных непериодических случаев. Изучался случай, когда усреднение приводит к краевому условию Дирихле. Были получены операторные оценки для W_2^1- и L_2-нормы разности решений возмущенных и усредненных задач. В случае L_2-нормы скорость сходимости оказывалась выше. Было отдельно показано, что полученные оценки оптимальны, а именно точны по порядку малости.

В настоящей работе мы продолжаем исследование модели работы [14], но теперь рассматриваем случай, когда при усреднении краевое условие Дирихле пропадает и остается лишь третье нелинейное краевое условие. Смена краевых условий вновь задается в общем виде и включает в себя даже более широкий по сравнению с [14] класс различных непериодических случаев. Основной результат работы — операторные оценки для W_2^1- и L_2-нормы разности решений возмущенных и усредненных задач, которые оказываются точными по порядку малости.

1. Задача и результаты

Пусть Ω — плоская область с непустой границей, а Γ — одна из связных компонент ее границы, имеющая гладкость C^2. Компонента Γ может быть конечной или бесконечной; в первом случае она обязательно замкнута. Символом s обозначим натуральный параметр на Γ, который меняется по отрезку $[s_-, s_+]$, причем либо s_- и s_+ — одновременно конечные числа либо $s_\pm = \pm\infty$. Предполагаем, что кривизна Γ равномерно ограничена.

Через $\nu = \nu(s)$ обозначим вектор единичной нормали к Γ, направленный внутрь области Ω, а через τ — расстояние до точки, измеренное вдоль $\nu(s)$. Равномерная ограниченность кривизны гарантирует, что локальные переменные (τ, s) корректно определены в замыкании области $\Pi_{\tau_0} := \{x \in \Omega\colon \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \tau_0\}$ с некоторым фиксированным $\tau_0 > 0$, причем соответствующие якобианы перехода от переменных x к (τ, s) и все производные переменных x по (τ, s) и переменных (τ, s) по x равномерно ограничены в $\overline{\Pi_{\tau_0}}$.

Символом ε обозначим малый положительный параметр и затем на Γ произвольно выберем семейство точек M_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, которым соответствуют значения s_k^ε натурального параметра s, где $\mathbb{M}^\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ — некоторое множество, которое может зависеть от выбора ε. Через a_k^ε, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ обозначим семейство положительных чисел и положим $\Gamma_\varepsilon := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon} \Gamma_{k,\varepsilon}$, $\gamma := \partial\Omega \setminus \Gamma$, где $\Gamma_{k,\varepsilon}$ —

некоторые части кривой Γ, имеющие положительную одномерную меру и удовлетворяющие вложениям

$$\Gamma_{k,\varepsilon} \subset \big\{x \in \Gamma\colon s \in (s_k^\varepsilon - \varepsilon a_k^\varepsilon, s_k^\varepsilon + \varepsilon a_k^\varepsilon)\big\}. \tag{1.1}$$

Будем считать, что точки M_k^ε и числа a_k^ε выбраны так, что части $\Gamma_{k,\varepsilon}$ кривой Γ_ε попарно не пересекаются.

Пусть $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_j = A_j(x)$, $A_0 = A_0(x)$ — заданные на области $\overline{\Omega}$ функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} A_{ij} \in W_\infty^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Pi_{\tau_0} \cap \Omega}), \quad A_j, A_0 \in L_\infty(\Omega), \quad i,j = 1,\ldots,2, \\ \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(x) z_i \overline{z_j} \geqslant c_0|z|^2, \quad x \in \Omega, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad A_{ij} = A_{ji}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $c_0 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от x и z_i. Функции A_{ij} считаем вещественными, функции A_j, A_0 — комплекснозначными. Через $b = b(x,u)$ обозначим комплекснозначную функцию в $\mathbb{C}^n$, заданную на $\Pi_{\tau_0} \times \mathbb{C}$, принадлежащую пространству $W_\infty^1(\Pi_{\tau_0} \times \mathbb{C})$ и такую, что

$$b(x,0) = 0, \qquad \left|\frac{\partial b}{\partial x_i}(x,u)\right| \leqslant c_1|u|, \tag{1.3}$$

где c_1 — некоторая константа, не зависящая от x и u.

Основной объект исследования настоящей работы — это следующая краевая задача:

$$(\hat{\mathcal{H}} - \lambda) u_\varepsilon = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\varepsilon \cup \gamma, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nu}} = b(\,\cdot\,, u_\varepsilon) \ \text{ на } \ \Gamma \setminus \overline{\Gamma^\varepsilon}; \tag{1.4}$$

здесь дифференциальное выражение в уравнении имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + A_0(x),$$

а производная по конормали определяется равенством

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} := \sum_{i,j=1}^{2} \nu_i A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2).$$

Целью работы является изучение сходимости решения задачи (1.4) при $\varepsilon \to 0$ и получение оценок скорости сходимости, равномерных по $L_2(\Omega)$-норме функции f. В работе рассматривается случай, когда усреднение в пределе приводит к исчезновению кусков границы с краевым условием Дирихле. А именно мы предполагаем, что

$$\mu(\varepsilon) := -\frac{1}{\varepsilon \ln a^\varepsilon} \to +0, \quad \varepsilon \to +0, \quad a^\varepsilon := \sup_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} a_k^\varepsilon, \tag{1.5}$$

и существует число $R_1 > a^\varepsilon$, не зависящее от ε такое, что для любой пары соседних точек s_k^ε, s_j^ε, $k, j \in \mathbb{M}^\varepsilon$, выполнено

$$|s_j^\varepsilon - s_k^\varepsilon| \leqslant 2R_1\varepsilon. \tag{1.6}$$

В данном случае оказывается, что усредненная задача описывается формулой

$$(\hat{\mathcal{H}} - \lambda) u_0 = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_0 = 0 \ \text{ на } \ \gamma, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \boldsymbol{\nu}} = b(\,\cdot\,, u_0) \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{1.7}$$

Наш первый основной результат можно представить следующим образом.

Теорема 1. *Существует фиксированное вещественное число λ_0, не зависящее от ε такое, что при λ, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$, задачи* (1.4), (1.7) *однозначно разрешимы для всех $f \in L_2(\Omega)$ и верна оценка*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon+\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}; \tag{1.8}$$

здесь $C = C(\lambda)$ — некоторая константа, не зависящая от ε и f. Если дополнительно

$$A_j \in W_\infty^1(\Omega), \quad b(x,u) = b_0(x)u, \quad A_1\nu_1 + A_2\nu_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1.9}$$

где $b_0 \in W_\infty^1(\Pi_{\tau_0}\cap\Omega)$ — заданная комплекснозначная функция, то верна оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon^{3/2}+\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{1.10}$$

($C = C(\lambda)$ *— некоторая константа, не зависящая от ε и f). Оценка* (1.8) *точна по порядку. Множитель μ в оценке* (1.10) *точен по порядку.*

Через $\mathring{W}_2^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon\cup\gamma)$ обозначим подпространство в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$, состоящее из функций с нулевым следом на $\Gamma_\varepsilon\cup\gamma$. В случае, когда функция b зависит линейно от u, а именно $b(x,u) = b_0(x)u$, где $b_0 \in W_\infty^1(\Pi_{\tau_0}\cap\Omega)$ — заданная функция, решение задачи (1.4) выражается через резольвенту $(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1}f$ линейного оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, соответствующего этой задаче. Этот оператор задается дифференциальным выражением $\hat{\mathcal{H}}$ и краевыми условиями из (1.4) с указанной линейной по u функцией b. Он определяется как m-секториальный оператор в $L_2(\Omega)$, соответствующий полуторалинейной форме

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(u,v) := \sum_{i,j=1}^{2}\Big(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}, v\Big)_{L_2(\Omega)} + (A_0u,v)_{L_2(\Omega)} + (b_0u,v)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}$$

на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) := \mathring{W}_2^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon\cup\gamma)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ в силу первой теоремы о представлении [15, гл. VI, §2.1]. Аналогично в терминах формы

$$\mathfrak{h}_0(u,v) := \sum_{i,j=1}^{2}\Big(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}, v\Big)_{L_2(\Omega)} + (A_0u,v)_{L_2(\Omega)} + (b_0u,v)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}$$

на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_0) := \mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ определяется m-секториальный оператор, соответствующий задаче (1.7) в случае линейной функции b. Тогда теорема 1 фактически утверждает, что оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходится к $\mathcal{H}_0$ в смысле равномерной резольвентной сходимости. Отсюда уже следует сходимость спектров, а в случае самосопряженных операторов — и сходимость спектральных проекторов. Такой результат доказывается практически дословным воспроизведением доказательств теорем 1.3, 1.4 из работ [16; 17], и потому мы приводим соответствующие утверждения без доказательств.

Для произвольного компакта K в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$ обозначим

$$\Lambda(K) := \sup_{\lambda\in K}|\lambda-\lambda_0|.$$

Теорема 2. *Спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходится к спектру оператора $\mathcal{H}_0$. А именно для любого компакта K при достаточно малых ε верны вложения*

$$\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)\cap K \subseteq \Big\{\lambda\in K\colon \|(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{(C(\lambda_0)+1)\Lambda^2(K)(\varepsilon+\mu)}\Big\};$$

здесь $C(\,\cdot\,)$ — константа из оценки (1.8), *а в случае выполнения условия* (1.9) *верно вложение*

$$\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)\cap K \subseteq \Big\{\lambda\in K\colon \|(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \geqslant \frac{1}{(C(\lambda_0)+1)\Lambda^2(K)(\varepsilon^{3/2}+\mu)}\Big\},$$

где $C(\,\cdot\,)$ — константа из оценки (1.10).

Через $\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}(\mathcal{H})$ обозначим спектральный проектор произвольного самосопряженного оператора $\mathcal{H}$, соответствующий отрезку $[\alpha,\beta]$ вещественной прямой.

Теорема 3. *Пусть операторы $\mathcal{H}_\varepsilon$, $\mathcal{H}_0$ самосопряжены. Тогда для любого компакта K, лежащего в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$, при достаточно малых ε выполнено вложение*

$$\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)\cap K \subseteq \Big\{\lambda\in K\cap\mathbb{R}\colon\ \operatorname{dist}(\lambda,\sigma(\mathcal{H}_0)\cap K)\leqslant (C(\lambda_0)+1)\Lambda^2(K)(\varepsilon+\mu)\Big\}$$

с $C(\lambda_0)$ из (1.8)*, а в случае выполнения условия* (1.9) *верно вложение*

$$\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)\cap K \subseteq \Big\{\lambda\in K\cap\mathbb{R}\colon\ \operatorname{dist}(\lambda,\sigma(\mathcal{H}_0)\cap K)\leqslant (C(\lambda_0)+1)\Lambda^2(K)(\varepsilon^{3/2}+\mu)\Big\},$$

с константой $C(\lambda_0)$ из (1.10)*. Для произвольных вещественных $\alpha<\beta$ таких, что $\alpha,\beta\notin\sigma(\mathcal{H}_D^0)$, верна сходимость соответствующих спектральных проекторов*

$$\big\|\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}(\mathcal{H}_\varepsilon)-\mathcal{P}_{[\alpha,\beta]}(\mathcal{H}_0)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\to 0,\quad \varepsilon\to+0.$$

Кратко обсудим основные результаты работы. Возмущенная задача (1.4) формулируется для скалярного уравнения второго порядка общего вида. Смена краевых условий задается на части границы Γ и описывается множествами $\Gamma_{k,\varepsilon}$, на которых ставится краевое условие Дирихле, в то время как на оставшейся части границы Γ выставляется нелинейное третье краевое условие с нелинейностью $b(x,u)$. Единственное условие для множеств $\Gamma_{k,\varepsilon}$ — вложения (1.1), при этом сами множества $\Gamma_{k,\varepsilon}$ не обязательно связны и могут иметь достаточно причудливую структуру. Это позволяет включить в рассмотрение широкий класс непериодический чередований. Условие (1.5) выделяет случай, когда при усреднении участки границы $\Gamma_{k,\varepsilon}$ с краевым условием Дирихле пропадают и в пределе остается только третье краевое условие. Основной результат — оценки скорости сходимости (1.8), (1.10), равномерные по $L_2(\Omega)$-норме правой части уравнения в (1.4). Первая из этих оценок — для $W_2^1(\Omega)$-нормы разности решений возмущенной и усредненной задач со скоростью сходимости $(\varepsilon+\mu)$. Отдельно показывается, что она точна по порядку малости, т. е. является неулучшаемой. Оценка (1.10) дает схожий результат, но уже для $L_2(\Omega)$-нормы разности решений возмущенной и усредненной задач. Поскольку оцениваемая норма слабее по сравнению с (1.8), скорость сходимости здесь ожидаемо выше, а именно вместо ε присутствует $\varepsilon^{3/2}$. Слагаемое μ остается без изменений и показано, что оно точное по порядку. Вопрос о точности слагаемого $\varepsilon^{3/2}$ остался открытым.

В частном случае, когда третье краевое условие в (1.4) линейно, решения и возмущенной, и усредненной задач можно понимать как действие резольвент соответствующих линейных операторов $\mathcal{H}^\varepsilon$ и $\mathcal{H}^0$, которые вводятся после теоремы 1. Тогда оценки (1.8), (1.10) оказываются операторными оценками, описывающими сходимость этих резольвент в соответствующих операторных нормах. А именно в случае (1.8) разность резольвент рассматривается как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, в то время как в случае оценки (1.10) эта разность рассматривается как оператор в $L_2(\Omega)$. Эти оценки позволяют установить стандартную сходимость спектров, а в самосопряженном случае также удается показать и сходимость спектральных проекторов (см. теоремы 2, 3).

2. Разрешимость задач

В настоящем разделе мы доказываем разрешимость задач (1.4), (1.7), утверждаемую в теореме 1. Определим вспомогательную полуторалинейную форму

$$\mathfrak{h}(u,v):=\sum_{i,j=1}^{2}\Big(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{L_2(\Omega)}+\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial u}{\partial x_j},v\Big)_{L_2(\Omega)}+(A_0u,v)_{L_2(\Omega)}$$

на области определения $\mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (1.4) называется функция $u_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}_\lambda^\varepsilon):=\mathring{W}_2^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon\cup\gamma)$, удовлетворяющая тождеству

$$\mathfrak{h}_\lambda^\varepsilon(u_\varepsilon,v)=(f,v)_{L_2(\Omega)},\quad \mathfrak{h}_\lambda^\varepsilon(u,v):=\mathfrak{h}(u,v)+(b(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}-\lambda(u,v)_{L_2(\Omega)},\tag{2.1}$$

для всех $v\in\mathring{W}_2^1(\Omega,\Gamma_\varepsilon\cup\gamma)$. Обобщенное решение задачи (1.7) — это функция $u_0\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}_\lambda^0):=\mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma)$, удовлетворяющая тождеству

$$\mathfrak{h}_\lambda^0(u,v)=(f,v)_{L_2(\Omega)},\quad \mathfrak{h}_\lambda^0(u,v):=\mathfrak{h}(u,v)+(b(\,\cdot\,,u),v)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}-\lambda(u,v)_{L_2(\Omega)}\tag{2.2}$$

для всех $v\in\mathring{W}_2^1(\Omega,\gamma)$.

Согласно общим результатам о монотонных операторах из [18, гл. VI, § 18.4; 19, гл. 1, § 1.2^0] для проверки однозначной разрешимости обеих задач достаточно убедиться в справедливости следующих трех условий.

1. Для любых $u,v,w\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}_\lambda^\delta)$ функция $t\mapsto\mathfrak{h}_\lambda^\delta(u+tv,w)$ непрерывна.
2. Для любых $u,v\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}_\lambda^\delta)$, $u\neq v$ выполнено $\operatorname{Re}\big(\mathfrak{h}_\lambda^\delta(u,u-v)-\mathfrak{h}_\lambda^\delta(v,u-v)\big)>0$.
3. Справедливо соотношение $\dfrac{\operatorname{Re}\mathfrak{h}_\lambda^\delta(u,u)}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}\to+\infty,\quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)}\to+\infty.$

где для задачи (1.4) следует выбирать $\delta=\varepsilon$, а для задачи (1.7) полагаем $\delta=0$.

Для проверки этих условий приведем стандартную оценку

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)}^2\leqslant\epsilon\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2+C(\epsilon)\|u\|_{L_2(\Omega)}^2\tag{2.3}$$

для произвольного фиксированного $\epsilon>0$ с некоторой константой $C(\epsilon)$, не зависящей от $u\in W_2^1(\Omega)$. Также отметим, что из принадлежности $b\in W_\infty^1(\Pi_{\tau_0}\times\mathbb{C})$ сразу следует, что

$$|b(x,u_1)-b(x,u_2)|\leqslant c_2|u_1-u_2|$$

для почти всех x, u_1, u_2 с константой c_1, не зависящей от x, u_1, u_2. Тогда из условия (1.3) вытекает, что

$$|b(x,u)|\leqslant c_2|u|.\tag{2.4}$$

Используя последнюю оценку и (2.3), на основе неравенства Коши — Буняковского элементарно можно доказать, что

$$\operatorname{Re}\mathfrak{h}(u,u)\geqslant\frac{2c_0}{3}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2+C\|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\big|(b(\,\cdot\,,u),u)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}\big|\leqslant\frac{c_0}{6}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2+C\|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\big|(b(\,\cdot\,,u),u)_{L_2(\Gamma)}\big|\leqslant\frac{c_0}{6}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2+C\|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\big|(b(\,\cdot\,,u)-b(\,\cdot\,,v),u-v)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}\big|\leqslant\frac{c_0}{6}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}(u-v)\Big\|_{L_2(\Omega)}^2+C\|u-v\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$\big|(b(\,\cdot\,,u)-b(\,\cdot\,,v),u-v)_{L_2(\Gamma)}\big|\leqslant\frac{c_0}{6}\sum_{i=1}^{2}\Big\|\frac{\partial}{\partial x_i}(u-v)\Big\|_{L_2(\Omega)}^2+C\|u-v\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где C — некоторая константа, возможно отрицательная, не зависящая от $u \in W_2^1(\Omega)$ и ε. Используя эти оценки, несложно показать, что существует вещественное λ_0, такое что для $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$, выполнены оценки

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left(\mathfrak{h}(u,u) - \lambda\|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \geqslant C\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}\\
&\operatorname{Re}\left(\mathfrak{h}^\varepsilon_\lambda(u,u-v) - \mathfrak{h}^\varepsilon_\lambda(v,u-v)\right) \geqslant C\|u-v\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad \operatorname{Re}\mathfrak{h}^\varepsilon_\lambda(u,u) \geqslant C\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)},\\
&\operatorname{Re}\left(\mathfrak{h}^0_\lambda(u,u-v) - \mathfrak{h}^0_\lambda(v,u-v)\right) \geqslant C\|u-v\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \quad \operatorname{Re}\mathfrak{h}^0_\lambda(u,u) \geqslant C\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

для всех $u, v \in W_2^1(\Omega)$ с положительной константой C, не зависящей от ε, u и v. Условия 2, 3 немедленно следуют из приведенных оценок.

Отметим еще, что из оценок (2.5) для формы $\mathfrak{h}^0_\lambda$ вытекает, что для решения задачи (1.7) справедливо неравенство

$$\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.6}$$

где константа C не зависит от функции f. Отсюда и из оценок в (1.3), (2.4) имеем, что функция $b(x, u_0(x))$ есть элемент пространства $W_2^1(\Pi_{\tau_0})$ и верна оценка

$$\|b(\,\cdot\,, u_0)\|_{W_2^1(\Pi_{\tau_0})} \leqslant C\|u_0\|_{W_2^1(\Pi_{\tau_0})} \tag{2.7}$$

с константой C, не зависящей от u_0. Следовательно, правая часть в краевом условии на Γ в (1.7) является следом функции из $W_2^1(\Pi_{\tau_0})$, и в силу стандартных теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач и (2.6), (2.7) получаем еще одну оценку с константой C, не зависящей от u_0:

$$\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

3. Операторные оценки в W_2^1

В настоящем разделе мы доказываем оценку (1.8). Доказательство состоит из несколько основных этапов, которые далее нам удобно представить в виде отдельных подразделов.

3.1. Граничный корректор и интегральное тождество

В окрестности границы Γ перейдем к локальным переменным (τ, s), введенным в начале второго раздела. Так как кривая Γ имеет гладкость C^2, то ее касательный вектор непрерывно дифференцируемый. Ясно, что данный касательный вектор равен $(\nu_2, -\nu_1)$, а потому нормаль $\nu(s)$ также непрерывно дифференцируема. Обозначим $\kappa(s) := \nu_1'(s)\nu_2(s) - \nu_1(s)\nu_2'(s)$. Модуль этой функции совпадает с кривизной кривой Γ, а знак зависит от направления ее выпуклости. Прямыми вычислениями несложно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \nu_1(s)\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\nu_2(s)}{1+\tau\kappa(s)}\frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \nu_2(s)\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\nu_1(s)}{1+\tau\kappa(s)}\frac{\partial}{\partial s}.$$

Положим

$$\mathrm{L}(s) := \begin{pmatrix} \nu_1(s) & \nu_2(s) \\ \nu_2(s) & -\nu_1(s) \end{pmatrix} \mathrm{A}(\mathrm{x}(s)) \begin{pmatrix} \nu_1(s) & \nu_2(s) \\ \nu_2(s) & -\nu_1(s) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}(x) := \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $x = \mathrm{x}(s)$ — параметрическое уравнение кривой Γ. В силу условий (1.2) матрица L эрмитова и положительно определена; для нее тоже выполнено условие эллиптичности из (1.2). Это означает, что корректно определена и матрица $\mathrm{L}^{-1}(s)$, которая также является эрмитовой и положительной определенной равномерно по s. В силу условий (1.5), (1.6) поэтому существуют константы R_2, R_3, R_4, не зависящие от ε, a_k^ε и $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, такие, что выполнены вложения

$$\Gamma_{k,\varepsilon} \subset \overline{E^\varepsilon_{k,a}}, \quad E^\varepsilon_{k,a} \subset E^\varepsilon_k \subset B_{\varepsilon R_4}(M^\varepsilon_k) \subset Q^\varepsilon_k,$$

$$E^\varepsilon_{k,a} := \big\{x\colon (y_k, \mathrm{L}^{-1}(s^\varepsilon_k) y_k)^{1/2} < R_2\varepsilon a^\varepsilon_k,\ \tau > 0\big\},\quad E^\varepsilon_k := \big\{x\colon (y_k, \mathrm{L}^{-1}(s^\varepsilon_k) y_k)^{1/2} < R_2\varepsilon,\ \tau > 0\big\},$$
$$E^\varepsilon_k := \big\{x\colon |y_k| < R_3\varepsilon,\ \tau > 0\big\},\quad B_r(M) := \big\{x\colon |x - M| < r\big\},$$

где обозначено $y_k := \begin{pmatrix} \tau \\ s - s^\varepsilon_k \end{pmatrix}$; дополнительно предполагаем, что множества Q^ε_k, $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$, попарно не пересекаются. Определим вспомогательную функцию и дифференциальное выражение:

$$X^\varepsilon_k(x) := \frac{\ln R_2 \varepsilon a^\varepsilon_k - \ln |\mathrm{L}(s^\varepsilon_k) y_k|}{\ln a^\varepsilon_k},\quad \mathcal{L}_k := \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}(M^\varepsilon_k) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

С учетом определения матрицы L в (3.1) прямыми вычислениями несложно проверить, что введенная функция является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_k X_k = 0 \quad \text{в} \quad E^\varepsilon_k \setminus \overline{E^\varepsilon_{k,a}},\quad X^\varepsilon_k = 1 \quad \text{на} \quad \gamma^\varepsilon_{k,+},\\ &X^\varepsilon_k = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^\varepsilon_{k,-},\quad \nu \cdot \mathrm{A}(M^\varepsilon_k) \nabla X^\varepsilon_k = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^\varepsilon_{k,0}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\gamma^\varepsilon_{k,-} := \big\{x\colon |\mathrm{L}(s^\varepsilon_k) y_k| = R_2 \varepsilon a^\varepsilon_k,\ \tau > 0\big\} \quad \gamma^\varepsilon_{k,+} := \big\{x\colon |\mathrm{L}(s^\varepsilon_k) y_k| = R_2\varepsilon,\ \tau > 0\big\}$$
$$\gamma^\varepsilon_{k,0} := \big\{x\colon R_2\varepsilon a^\varepsilon_k < |\mathrm{L}(s^\varepsilon_k) y_k| < R_2\varepsilon,\ \tau = 0\big\}.$$

Отметим еще очевидные оценки для функции X^ε_k:

$$|X^\varepsilon_k| \leqslant C,\quad |\nabla_x X^\varepsilon_k| \leqslant \frac{1}{|\ln a^\varepsilon_k| |x - M^\varepsilon_k|}; \tag{3.3}$$

здесь константа C не зависит от x, k, ε и a^ε_k.

Упомянутый выше граничный корректор определим следующим образом:

$$W_\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & \text{в} \quad \bigcup\limits_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} E^\varepsilon_{k,a},\\ 1 & \text{вне} \quad \bigcup\limits_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} E^\varepsilon_k,\\ X^\varepsilon_k(x) & \text{в} \quad \bigcup\limits_{k \in \mathbb{M}^\varepsilon} E^\varepsilon_k \setminus E^\varepsilon_{k,a}. \end{cases}$$

Укажем, что функция W_ε непрерывна всюду и бесконечно дифференцируема вне границ областей $E^k_{R_2}$ и $E^k_{R_3}$. В силу (3.3) для нее верны оценки

$$|W_\varepsilon(x)| \leqslant C,\quad |\nabla W_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{C}{|\ln a^\varepsilon_k| |x - M^\varepsilon_k|} \quad \text{в} \quad E^\varepsilon_k \setminus E^\varepsilon_{k,a}, \tag{3.4}$$

где константа C не зависит от x и ε. Кроме того, очевидным образом выполнено граничное условие

$$\nu \cdot \mathrm{A}(M^\varepsilon_k) \nabla W_\varepsilon = 0 \ \text{ почти всюду на } \ \Gamma,\quad W_\varepsilon = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_\varepsilon.$$

Переходим непосредственно к доказательству оценки (1.8). Выберем произвольно $f \in L_2(\Omega)$ и в терминах соответствующих решений задач (1.4), (1.7) введем вспомогательную функцию $v_\varepsilon := u_\varepsilon - u_0 W_\varepsilon$. В силу перечисленных выше свойств функции W_ε легко убедиться, что функция v_ε является элементом пространства $W^1_2(\Omega; \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon \cup \gamma)$. То же самое верно и для функции $W_\varepsilon v_\varepsilon$. Отметим еще равенство, которое проверяется непосредственными вычислениями:

$$\mathfrak{h}(u, W_\varepsilon v) = \mathfrak{h}(u W_\varepsilon, v) + \mathfrak{g}(u, v), \tag{3.5}$$

где обозначено

$$\mathfrak{g}(u, v) := (\mathrm{A} \nabla u, v \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - (u \mathrm{A} \nabla W_\varepsilon, \nabla v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{j=1}^{2} \Big(A_j \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j} u, v \Big)_{L_2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Выпишем теперь тождество (2.1) с $v=v_\varepsilon$ и тождество (2.2) с $v=W_\varepsilon v_\varepsilon$. Затем возьмем разность полученных равенств и учтем формулу (3.5). Тогда получим

$$\begin{aligned}&\mathfrak{h}(v_\varepsilon,v_\varepsilon)-\lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}+\big(b(\,\cdot\,,u_\varepsilon)-b(\,\cdot\,,u_0W_\varepsilon),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}\\ &=\big(b(\,\cdot\,,u_0),W_\varepsilon v_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma)}-\big(b(\,\cdot\,,u_0W_\varepsilon),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}+\mathfrak{g}(u_0,v_\varepsilon)+(f,(1-W_\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Из второй оценки в (2.5) и определения функции v_ε сразу следует, что

$$\operatorname{Re}\Big(\mathfrak{h}(v_\varepsilon,v_\varepsilon)-\lambda\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}+\big(b(\,\cdot\,,u_\varepsilon)-b(\,\cdot\,,(u_0+u_1)W_\varepsilon),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}\Big)\geqslant C\|v_\varepsilon\|^2_{W_2^1(\Omega)};\tag{3.8}$$

здесь и всюду далее через C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε, a_k^ε, x, k, u_ε, u_0, v_ε и f, но зависящие, вообще говоря, от выбора λ. Ввиду полученного неравенства наш следующий шаг — оценка правой части равенства (3.7). Это позволит оценить затем $W_2^1(\Omega)$-норму функции v_ε. Для оценки правой части равенства (3.7) нам понадобится несколько вспомогательных локальных оценок.

3.2. Вспомогательные локальные оценки

Всюду в данном подразделе u — произвольная функция из $W_2^2(\Omega)$, а v — произвольная функция из $W_2^1(\Omega)$. Также здесь через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от ε, k, a_k^ε, u, v и пространственных переменных.

Функцию v продолжим в область Π_{τ_1} с некоторым $\tau_1<\tau_0$ по правилу $v(\tau,s):=v(-\tau,s)$. Такое продолжение очевидно является элементом пространства $W_2^1(\Omega\cup\Pi_{\tau_1})$, и верны неравенства

$$\begin{aligned}\|v(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(-\tau_1,0)}&\leqslant C\|v(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(0,\tau_1)},\\ \Big\|\frac{\partial v}{\partial\tau}(\,\cdot\,,s)\Big\|_{L_2(-\tau_1,0)}&\leqslant C\Big\|\frac{\partial v}{\partial\tau}(\,\cdot\,,s)\Big\|_{L_2(0,\tau_1)},\\ \Big\|\frac{\partial v}{\partial s}(\,\cdot\,,s)\Big\|_{L_2(-\tau_1,0)}&\leqslant C\Big\|\frac{\partial v}{\partial s}(\,\cdot\,,s)\Big\|_{L_2(0,\tau_1)}.\end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 3.6 из [20] с $\omega_{k,\varepsilon}=E_{k,a}$, немедленно выводим оценку

$$\|v\|^2_{L_2(\gamma^\varepsilon_{k,-})}\leqslant C\Big(\varepsilon a_k^\varepsilon|\ln a_k^\varepsilon|\|\nabla v\|^2_{L_2(B_{\varepsilon R_4}(M_k^\varepsilon)\cap\Omega)}+\varepsilon^{-1}a_k^\varepsilon\|v\|^2_{L_2(B_{\varepsilon R_4}(M_k^\varepsilon)\cap\Omega)}\Big),\tag{3.9}$$

где $B_{\varepsilon R_4}(M_k^\varepsilon)$ — шар радиуса εR_4 с центром в точке M_k^ε, а R_4 — некоторое фиксированное число, такое что указанные шары покрывают множества E_k^ε и попарно не пересекаются.

На множестве E_k перейдем к переменным $\xi:=\varepsilon^{-1}\mathrm{L}^{-1/2}(s_k^\varepsilon)y_k$. Тогда функция $\tilde v(\xi)$, получаемая переходом к указанным переменным в функции ξ, является элементом пространства $W_2^1(\{y_k\colon |y_k|<R_2,\ \tau>0\})$, и потому верна элементарная оценка $\|\tilde v\|_{L_2(\{y_k\colon |y_k|=R_2,\ \tau>0\})}\leqslant C\|\tilde v\|_{W_2^1(\{y_k\colon |y_k|<R_2,\ \tau>0\})}$. Возвращаясь в этой оценке к переменным x, немедленно имеем

$$\|v\|^2_{L_2(\gamma^\varepsilon_{k,-})}\leqslant C\Big(\varepsilon\|\nabla v\|^2_{L_2(E_k)}+\varepsilon^{-1}\|v\|^2_{L_2(E_k)}\Big).\tag{3.10}$$

Дополнительно теперь предположим, что

$$v=0\ \text{ на }\ \Gamma_\varepsilon.\tag{3.11}$$

Перейдем к переменным $\xi:=\varepsilon^{-1}(a_k^\varepsilon)^{-1}\mathrm{L}^{-1/2}(s_k^\varepsilon)y_k$ на множестве $E_{k,a}$ и в функции v и для соответствующей функции $\tilde v$ воспользуемся оценкой

$$\|\tilde v\|_{L_2(\{y_k\colon |y_k|=R_2,\ \tau>0\})}\leqslant C\|\nabla_{y_k}\tilde v\|_{L_2(\{y_k\colon |y_k|<R_2,\ \tau>0\})}.$$

Возвращаясь обратно к функции v, выводим неравенство

$$\|v\|^2_{L_2(\gamma^\varepsilon_{k,-})}\leqslant C\varepsilon a_k\|\nabla v\|^2_{L_2(E_{k,a})}.\tag{3.12}$$

Из равенства

$$v(x) = \int\limits_{\tau_0}^{x} \frac{\partial}{\partial t}\chi_1(t) v(t,s)\,ds, \quad x \in \Pi_{\tau_0/3},$$

с бесконечно дифференцируемой срезающей функцией $\chi_1 = \chi_1(t)$, равной единице при $t < \frac{\tau_0}{3}$ и нулю при $t > \frac{2\tau_0}{3}$, элементарно следует оценка

$$|v(x)|^2 \leqslant C \int\limits_{0}^{(2\tau_0)/3} (|\nabla_x v(t,s)|^2 + |v(t,s)|^2)\,dt.$$

Интегрируя эту оценку по $\Pi_{R_1\varepsilon} \cap \Omega$, получаем

$$\|v\|^2_{L_2(\Pi_{R_1\varepsilon}\cap\Omega)} \leqslant C\varepsilon \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Следующая серия оценок доказывается сложнее, и их удобнее сформулировать в виде вспомогательной леммы. Предварительно отметим, что из определения величин μ и a^ε в (1.5) очевидным образом следует, что

$$\frac{1}{|\ln a_k^\varepsilon|} \leqslant \frac{1}{|\ln a^\varepsilon|}, \quad k \in \mathbb{M}^\varepsilon. \tag{3.14}$$

Лемма 1. *Для функции v, удовлетворяющей условию* (3.11), *справедливы неравенства*

$$\|v\nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)} \leqslant C\|\nabla v\|^2_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)}, \tag{3.15}$$

$$\|(1-W_\varepsilon)v\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^2 \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \tag{3.16}$$

$$\|(1-W_\varepsilon)v\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant C\varepsilon \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.17}$$

Для функции u справедливы неравенства

$$\|u\nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon+\mu)\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.18}$$

$$\|(1-W_\varepsilon)u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon^3+\varepsilon^2\mu)\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)}, \tag{3.19}$$

$$\|(1-W_\varepsilon)u\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant C(\varepsilon^2+\varepsilon\mu)\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале будем предполагать, что v — произвольная функция из $W_2^1(\Omega)$, не обязательно удовлетворяющая условию (3.11). Выберем произвольно $k \in \mathbb{M}^\varepsilon$ и, учитывая условие эллиптичности в (1.2), определение функции W_ε и задачу (3.2), оценим и проинтегрируем по частям следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|v\nabla W\|^2_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)} &\leqslant c_0^{-1} \int\limits_{E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon} |v|^2 \mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon \cdot \nabla W_\varepsilon\,dx = c_0^{-1} \int\limits_{\gamma_{k,-}^\varepsilon} (W_\varepsilon - 1)|v|^2 \mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon \cdot \nu_{\gamma,-}\,ds \\
&- c_0^{-1} \int\limits_{E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon} (W_\varepsilon - 1)\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon \cdot \nabla |v|^2\,dx \leqslant C(\varepsilon a_k^\varepsilon |\ln a_k^\varepsilon|)^{-1} \|v\|^2_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)} \\
&+ C\|(W_\varepsilon - 1)\nabla v\|_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)} \|v\nabla W\|_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)} \\
&\leqslant C(\varepsilon a_k^\varepsilon |\ln a_k^\varepsilon|)^{-1} \|v\|^2_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)} + C\|(W_\varepsilon - 1)\nabla v\|^2_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)} + \frac{1}{2}\|v\nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(E_k^\varepsilon \setminus E_{k,a}^\varepsilon)},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\nu_{\gamma,-}$ — единичная нормаль к $\gamma^\varepsilon_{k,-}$, направленная внутрь этого множества. Отсюда и из оценок (3.9), (3.4) легко выводим оценку

$$\|v\nabla W_\varepsilon\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k\setminus E^\varepsilon_{k,a})}\leqslant C\Big(\|\nabla v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k\setminus E^\varepsilon_{k,a})}+\varepsilon^{-2}|\ln a^\varepsilon_k|^{-1}\|v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k\setminus E^\varepsilon_{k,a})}\Big).$$

Применим теперь данную оценку к функции u и просуммируем ее по $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$. Используя (3.13) с $v=u$ и $v=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,2$, и (3.14), получаем (3.18). Теперь предположим, что v удовлетворяет условию (3.11). Это позволяет дополнительно воспользоваться (3.12) для оценки нормы $\|v\|^2_{L_2(\gamma^\varepsilon_{k,-})}$ в (3.21), что с учетом (3.14) дает (3.15).

Докажем теперь оценки (3.16) и (3.19). Вначале снова не будем предполагать выполнения условия (3.11). С учетом очевидной формулы

$$1=\frac{\partial\tau}{\partial\tau}=\nu_1(s)\frac{\partial\tau}{\partial x_1}+\nu_2(s)\frac{\partial\tau}{\partial x_2}$$

и краевых условий для W_ε мы можем проинтегрировать по частям следующим образом:

$$\|(W_\varepsilon-1)v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}=-\int\limits_{E^\varepsilon_k}\tau\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\nu_1+\frac{\partial}{\partial x_1}\nu_2\Big)(W_\varepsilon-1)^2|v|^2\,dx.$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского, определения множества E^ε_k и (3.4) следует оценка

$$\|(W_\varepsilon-1)v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}\leqslant C\varepsilon\|(W_\varepsilon-1)v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}+\frac13\|(W_\varepsilon-1)v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}+C\varepsilon^2\|\nabla v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}$$
$$+C\varepsilon^2\|v\nabla W\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k\setminus E^\varepsilon_{k,a})}\leqslant\frac12\|(W_\varepsilon-1)v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}+C\varepsilon^2\|\nabla v\|^2_{W^1_2(E^\varepsilon_k)}+C\varepsilon^2\|v\nabla W\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k\setminus E^\varepsilon_{k,a})},$$

откуда выводим

$$\|(W_\varepsilon-1)v\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k)}\leqslant C\varepsilon^2\|\nabla v\|^2_{W^1_2(E^\varepsilon_k)}+C\varepsilon^2\|v\nabla W\|^2_{L_2(E^\varepsilon_k\setminus E^\varepsilon_{k,a})}. \tag{3.22}$$

Если $v=u$, то, применяя дополнительно неравенства (3.13) с $v=u$ и $v=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,2$, и (3.18), легко получаем (3.19). Если же v удовлетворяет условию (3.11), то для оценки последнего слагаемого в (3.22) воспользуемся неравенством (3.15), что дает (3.16).

Переходим к доказательству (3.17) и (3.20). С учетом определения функции W_ε для произвольной функции $v\in W^1_2(\Omega)$, не обязательно удовлетворяющей условию (3.11), интегрированием по частям легко проверяем, что

$$-\int\limits_\Omega(1-W_\varepsilon)^2|v|^2\operatorname{div}\nu(s)\,dx=\|(1-W_\varepsilon)v\|^2_{L_2(\Gamma)}+\int\limits_\Omega\nu(s)\cdot\nabla(1-W_\varepsilon)^2|v|^2\,dx.$$

Отсюда и из (3.4) сразу следует оценка

$$\|(1-W_\varepsilon)v\|^2_{L_2(\Gamma)}\leqslant C\Big(\|(1-W_\varepsilon)v\|^2_{L_2(\Omega)}+\|(1-W_\varepsilon)v\|_{L_2(\Omega)}\|(1-W_\varepsilon)\nabla v\|_{L_2(\Omega)}$$
$$+\|(1-W_\varepsilon)v\|_{L_2(\Omega)}\|v\nabla W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\Big).$$

Если $v=u$, то используя (3.13) с $v=u$ и $v=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,2$, а также (3.18), (3.19), (3.22), получаем (3.20). Если же v удовлетворяет условию (3.11), то применяем (3.13), (3.15), (3.16), (3.4) и приходим к (3.17).

Лемма доказана.

3.3. Оценка правой части равенства (3.7)

В настоящем подразделе мы оцениваем правую часть равенства (3.7). Сразу же отметим, что из (3.16) следует оценка для последнего слагаемого в этой правой части

$$\big|(f,(1-W_\varepsilon)v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}\big| \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.23}$$

Исследуем теперь слагаемое $\mathfrak{g}(u_0,v_\varepsilon)$. Определение (3.6) этой функции с учетом свойств функции W_ε перепишем следующим образом:

$$\mathfrak{g}(u_0,v_\varepsilon)=\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\mathfrak{g}_k(u_0,v_\varepsilon), \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_k(u,v):=&\big(\mathrm{A}\nabla u, v\nabla W_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\\ &-\big(u\mathrm{A}\nabla W_\varepsilon,\nabla v\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}-\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u,v\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Третье слагаемое в функции $\mathfrak{g}_k(u_0,v_\varepsilon)$ оценим с помощью неравенств (3.13), (3.18), (2.8):

$$\Big|\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0,v_\varepsilon\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\Big|\leqslant C\big(\varepsilon+\varepsilon^{1/2}\mu^{1/2}\big)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Второе слагаемое в функции $\mathfrak{g}_k(u_0,v_\varepsilon)$ представим в виде

$$\begin{aligned}\big(u_0\mathrm{A}\nabla W_\varepsilon,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}=&\big(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)u_0\nabla W_\varepsilon,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\\ &+\big((\mathrm{A}-\mathrm{A}(M_k^\varepsilon))u_0\nabla W_\varepsilon,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

В силу предполагаемой гладкости функций A_{ij} верны оценки

$$|A_{ij}(x)-A_{ij}(M_k^\varepsilon)|\leqslant C|x-M_k^\varepsilon| \quad \text{в} \quad \overline{E_k}. \tag{3.27}$$

Отсюда и из (3.4), (3.13), (2.8) сразу следует неравенство

$$\big|\big((\mathrm{A}-\mathrm{A}(M_k^\varepsilon))u_0\nabla W_\varepsilon,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\big|\leqslant C\varepsilon^{3/2}\mu\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.28}$$

Далее проинтегрируем по частям, учитывая краевую задачу (3.2):

$$\begin{aligned}\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}=&\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon\cdot\nu_{\gamma,-},v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}\\ &+\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon\cdot\nu_{\gamma,+},v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,+}^\varepsilon)}-\big(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla u_0,v_\varepsilon\nabla W_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,v_\varepsilon\nabla W_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}=&-\big((W_\varepsilon-1)(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0\cdot\nu,v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}\\ -\big((\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0\cdot\nu_{\gamma,-}^\varepsilon,v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}&-\big((W_\varepsilon-1)\operatorname{div}(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\\ &-\big((W_\varepsilon-1)(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}.\end{aligned}$$

В силу краевых условий для функции u_0 также имеем

$$\begin{aligned}\big((W_\varepsilon-1)(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0\cdot\nu,v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}=&\,2\big(b(\,\cdot\,,u_0),(W_\varepsilon-1)v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}\\ &+\big((\mathrm{A}-\mathrm{A}(M_k^\varepsilon))\nabla u_0\cdot\nu,(1-W_\varepsilon)v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Три полученных выше равенства и определение функции W_ε дают следующую формулу:

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\Big((\mathrm{A}\nabla u_0, v_\varepsilon\nabla W_\varepsilon)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}-(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon,\nabla v_\varepsilon)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\Big)$$

$$+\big(b(\,\cdot\,,u_0),W_\varepsilon v_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma)}-\big(b(\,\cdot\,,u_0W_\varepsilon),v_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)}=-\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\sum_{i=1}^{5}\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(i)}, \tag{3.29}$$

где обозначено

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(1)}:=\Big(\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon-(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0\big)\cdot\nu_{\gamma,-},v_\varepsilon\Big)_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(2)}:=\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon\cdot\nu_{\gamma,+},v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,+}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(3)}:=\big((W_\varepsilon-1)\operatorname{div}(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}+\big((W_\varepsilon-1)(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,\nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(4)}:=\big((\mathrm{A}-\mathrm{A}(M_k^\varepsilon))\nabla u_0\cdot\nu,(1-W_\varepsilon)v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(5)}:=\big(b(\,\cdot\,,u_0)-b(\,\cdot\,,W_\varepsilon u_0),v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}+\big(b(\,\cdot\,,u_0),(W_\varepsilon-1)v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}.$$

Неравенства (3.9), (3.4), (3.13), (3.12), (3.14) позволяют нам оценить $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(1)}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(1)}|\leqslant C\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\Big((\varepsilon a_k^\varepsilon|\ln a_k^\varepsilon|)^{-1}\|u_0\|_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}+\|\nabla u_0\|_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}\Big)\|v_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}$$

$$\leqslant C\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\Big((\varepsilon a_k^\varepsilon|\ln a_k^\varepsilon|)^{-2}\|u_0\|_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}^2+\|\nabla u_0\|_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}^2\Big)\bigg)^{1/2}\bigg(\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}^2\bigg)^{1/2}$$

$$\leqslant C(\varepsilon\mu^{1/2}+\varepsilon^{1/2}\mu)\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)},$$

откуда и из (2.8) следует, что

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(1)}|\leqslant C(\varepsilon\mu^{1/2}+\varepsilon^{1/2}\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.30}$$

Аналогично с помощью неравенств (3.10), (3.13), (3.4), (2.8), (3.14) оцениваются величины $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(2)}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(2)}|\leqslant C\mu\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Величины $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(3)}$ оцениваются с помощью (3.16), (3.13), (2.8), (3.14):

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(3)}|\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Неравенства (3.17), (3.27), (2.8), (3.14) дают оценки для $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(4)}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(4)}|\leqslant C\varepsilon\|\nabla u_0\|_{L_2(\Gamma)}\|(1-W_\varepsilon)v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma)}\leqslant C\varepsilon^{3/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \tag{3.33}$$

Наконец, условия (1.3) и неравенства (3.20), (2.8) позволяют оценить $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(5)}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(5)}|\leqslant C\|(1-W_\varepsilon)u_0\|_{L_2(\Gamma)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma)}\leqslant C(\varepsilon+\varepsilon^{1/2}\mu^{1/2})\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}$$

$$\leqslant C(\varepsilon+\varepsilon^{1/2}\mu^{1/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из (3.23)–(3.26), (3.28), (3.33), (3.32), (3.31), (3.30), (3.7), (3.8), (2.8) выводим

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon+\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.34}$$

Еще отметим, что согласно (3.18), (3.19), (2.8) выполнено

$$\|(1-W_\varepsilon)u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon^2+\varepsilon\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|(1-W_\varepsilon)u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon+\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.35}$$

Из этих оценок и (3.34) вытекает (1.8). □

4. Операторные оценки в $L_2(\Omega)$

В настоящем разделе мы доказываем оценку (1.10) при выполнении условий (1.9). Доказательство основано на подходе, предложенном в работе [17], который основан на модификации методов работ [21–25].

Так как в данном случае краевое условие на $\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon$ линейно, то корректно определен линейный оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$, соответствующий краевой задаче (1.4). Через $\mathcal{H}_\varepsilon^*$ обозначаем сопряженный к нему оператор. Это оператор с дифференциальным выражением

$$\hat{\mathcal{H}}^* := -\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}A_j(x) + A_0(x)$$

и краевыми условиями

$$u=0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon\cup\gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = b_1(x)u \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon, \quad b_1(x) := \overline{b_0(x)} - \sum_{j=1}^{2}\nu_j\overline{A_j(x)},$$

где черта над функциями означает комплексное сопряжение. Для произвольной функции $g\in L_2(\Omega)$ затем рассмотрим краевую задачу

$$(\hat{\mathcal{H}}^*-\overline{\lambda})w_\varepsilon = g \text{ в } \Omega, \quad w_\varepsilon=0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon\cup\gamma, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\boldsymbol{\nu}} = b_1(x)w_\varepsilon \text{ на } \Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon. \tag{4.1}$$

Благодаря условиям (1.9) эта краевая задача — той же структуры, что и (1.4). Воспроизводя рассуждения из разд. 2, несложно убедиться, что без ограничения общности можно считать, что данная задача будет разрешима с тем же λ_0, что и задача (1.4). Кроме того, для ее решения верна оценка (1.8):

$$\|w_\varepsilon-w_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon+\mu)\|g\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.2}$$

где w_0 — решение усредненной задачи

$$(\hat{\mathcal{H}}^*-\overline{\lambda})u_0 = g \text{ в } \Omega, \quad u_0=0 \text{ на } \gamma, \quad \frac{\partial u_0}{\partial\boldsymbol{\nu}} = b_1u_0 \text{ на } \Gamma.$$

В оценке (4.2) и всюду далее в разделе символом C обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε, μ, a_k^ε, k, u_ε, u_0, v_ε, w_ε, w_0, g и пространственных переменных. Также всюду далее функцию g выбираем равной v_ε, т. е. $g:=v_\varepsilon$. Отметим, что для функции w_0 верна оценка, аналогичная (2.8):

$$\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Выпишем интегральное тождество, соответствующее задаче (4.1), с пробной функцией v_ε:

$$\mathfrak{h}(v_\varepsilon,w_\varepsilon) - \lambda(v_\varepsilon,w_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} + (b_0v_\varepsilon,w_\varepsilon)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)} = \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{4.4}$$

Теперь повторим вывод равенства (3.7), но в качестве пробной функции в (2.1) возьмем $v = w_\varepsilon$, а в (2.2) положим $v = W_\varepsilon w_\varepsilon$. Тогда получим

$$\mathfrak{h}(v_\varepsilon, w_\varepsilon) - \lambda(v_\varepsilon, w_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} + \big(b_0 v_\varepsilon, w_\varepsilon\big)_{L_2(\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon)} = \mathfrak{g}(u_0, w_\varepsilon) + (f, (1-W_\varepsilon)w_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из (4.4) теперь выводим

$$\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathfrak{g}(u_0, w_\varepsilon) + (f, (1-W_\varepsilon)w_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Второе слагаемое в правой части полученного равенства перепишем в виде

$$(f, (1-W_\varepsilon)w_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, (1-W_\varepsilon)w_0)_{L_2(\Omega)} + (f, (1-W_\varepsilon)(w_\varepsilon - w_0))_{L_2(\Omega)}.$$

Из (3.19) с $u = w_0$, (3.16) с $v = w_\varepsilon - w_0$ и (4.2) теперь следует, что

$$\begin{aligned}\big|(f, (1-W_\varepsilon)w_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}\big| &\leqslant C(\varepsilon^{3/2} + \varepsilon\mu^{1/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|w_0\|_{W_2^2(\Omega)} + C\varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega)}\|w_\varepsilon - w_0\|_{W_2^1(\Omega)}\\ &\leqslant C(\varepsilon^{3/2} + \varepsilon\mu^{1/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Функцию $\mathfrak{g}(u_0, w_\varepsilon)$ представим в виде (3.24), (3.25), заменяя в этих формулах v_ε на w_ε. Третье слагаемое в функции $\mathfrak{g}_k(u_0, w_\varepsilon)$ запишем как

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, w_\varepsilon\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)} &= \sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, w_\varepsilon - w_0\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\\ &+ \sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, w_0\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (3.18) и (4.2) сразу получаем, что

$$\Big|\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, w_\varepsilon - w_0\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\Big| \leqslant C(\varepsilon+\mu)^{3/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Во втором слагаемом в правой части (4.6) проинтегрируем по частям, учитывая третье условие в (1.9):

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, w_0\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)} &= -\sum_{j=1}^{2}(A_j u_0 \nu_{\gamma,-,j}, w_0)_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)}\\ &- \sum_{j=1}^{2}\Big((W_\varepsilon - 1)\frac{\partial A_j}{\partial x_j}u_0, w_0\Big)_{L_2(E_k\setminus E_{k,a})}\\ - \sum_{j=1}^{2}\Big((W_\varepsilon - 1)A_j\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, w_0\Big)_{L_2(E_k\setminus E_{k,a})} &- \sum_{j=1}^{2}\Big((W_\varepsilon - 1)A_j u_0, \frac{\partial w_0}{\partial x_j}\Big)_{L_2(E_k\setminus E_{k,a})},\end{aligned}$$

где $\nu_{\gamma,-,j}$ — компоненты вектора нормали $\nu_{\gamma,-}$. Неравенства (3.9), (3.13), (3.16), (3.18), (3.19), (2.8), (4.3) позволяют оценить слагаемые в правой части полученного равенства, в результате чего имеем

$$\Big|\sum_{j=1}^{2}\Big(A_j\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}u_0, w_0\Big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\Big| \leqslant C(\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}\mu^{1/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Второе слагаемое в функции $\mathfrak{g}_k(u_0, w_\varepsilon)$ вновь представим в виде (3.26). Оценка (3.28) остается в силе, и здесь она выглядит следующим образом:

$$\Big|\big((\mathrm{A} - \mathrm{A}(M_k^\varepsilon))u_0\nabla W_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\Big| \leqslant C\varepsilon^{3/2}\mu\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Далее мы повторяем вывод равенства (3.29) и приходим к соотношению

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\Big((\mathrm{A}\nabla u_0, w_\varepsilon\nabla W_\varepsilon)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}-(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon,\nabla w_\varepsilon)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}\Big)=-\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\sum_{i=6}^{9}\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(i)},$$

где обозначено

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(6)}:=\Big(\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon-(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0\big)\cdot\nu_{\gamma,-},w_\varepsilon\Big)_{L_2(\gamma_{k,-}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(7)}:=\big(u_0\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)\nabla W_\varepsilon\cdot\nu_{\gamma,+},w_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,+}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(8)}:=\big((W_\varepsilon-1)\operatorname{div}(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,w_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)}+\big((W_\varepsilon-1)(\mathrm{A}(M_k^\varepsilon)+\mathrm{A})\nabla u_0,\nabla w_\varepsilon\big)_{L_2(E_k^\varepsilon\setminus E_{k,a}^\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(9)}:=\big((\mathrm{A}-\mathrm{A}(M_k^\varepsilon))\nabla u_0\cdot\nu,(1-W_\varepsilon)w_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{k,0}^\varepsilon)}.$$

Аналогично (3.30), (3.31), (3.33) с использованием априорной оценки $\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant C\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}$ устанавливаются неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(6)}|\leqslant C(\varepsilon\mu^{1/2}+\varepsilon^{1/2}\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},\quad \sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(7)}|\leqslant C\mu\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},\\ \sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(9)}|\leqslant C\varepsilon^{3/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.\end{gathered}\tag{4.7}$$

В величины $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(8)}$ подставим представление $w_\varepsilon=w_0+(w_\varepsilon-w_0)$ и затем отдельно оценим полученные четыре слагаемых в $\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(8)}$ с помощью (3.16), (3.19), (3.13), (4.2), (4.3):

$$\sum_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}|\mathfrak{s}_{k,\varepsilon}^{(8)}|\leqslant C(\varepsilon^{3/2}+\varepsilon\mu^{1/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из этой оценки и (4.5)–(4.7) теперь следует, что

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C(\varepsilon^{3/2}+\mu)\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Учитывая далее первую оценку в (3.35), приходим к (1.10).

5. Точность оценок

В настоящем разделе обсудим точность доказанных оценок (1.8), (1.10). Для доказательства утверждаемой в теореме 1 точности этих оценок достаточно привести пример, в котором можно оценить снизу нормы $\|u_\varepsilon-u_0\|_{W_2^1(\Omega)}$ и $\|u_\varepsilon-u_0\|_{L_2(\Omega)}$. В качестве такого примера возьмем модель, рассмотренную в [10], поскольку в этой модели удается построить асимптотическое разложение для u_ε и оценить затем норму первого корректора в таком разложении. За область Ω примем бесконечную прямую полосу $\Omega:=\{x\colon x_2\in(0,1)\}$; дифференциальное выражение $\hat{\mathcal{H}}$ совпадает с отрицательным Лапласианом. Множество G — это нижняя граница полосы Ω, в качестве натурального параметра s на Γ возьмем переменную x_1, а точки и множество Γ_ε выберем периодическими:

$$M_k^\varepsilon:=\varepsilon\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \Gamma_{k,\varepsilon}:=\big\{x\colon x_1\in(\varepsilon\pi k-\varepsilon a^\varepsilon,\varepsilon\pi k+\varepsilon a^\varepsilon)\big\}.$$

Функцию b возьмем равной тождественно нулю. Несложно убедиться, что в такой модели число λ_0 равно нулю. Далее считаем, что $\lambda=-1$.

Пусть $u_0=u_0(x)$ — бесконечно дифференцируемая в $\overline{\Omega}$ функция, равная нулю при $|x_1|>R_5$ для некоторого фиксированного числа R_5 и не равная тождественно нулю на каком-нибудь непустом отрезке на прямой Γ. Положим $f_0(x) := (-\Delta_x + 1)u_0(x)$. Тогда очевидно, что u_0 — решение усредненной задачи (1.7).

Через $U_0 = U_0(x,\mu)$ обозначим решение краевой задачи

$$(-\Delta_x + 1)U_0 = f_0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad U_0 = 0 \ \text{ на } \ \gamma, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mu\Big)U_0 = 0 \ \text{ на } \ \Gamma.$$

На основе стандартных методов теории обобщенных решений эллиптических краевых задач элементарно проверяется, что такая задача однозначно разрешима и ее решение аналитично по малым μ в норме $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ и введем функцию $Y(\xi) := \operatorname{Re}\ln\sin z + \ln 2 - \xi_2$, $\xi_2 > 0$, $z := \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$. Ветви корня и логарифма зафиксируем условиями $\sqrt{1} = 1$, $\ln 1 = 0$ на плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси. Непосредственными вычислениями проверяются следующие свойства введенной функции. Она является π-периодической и четной по ξ_1, бесконечно дифференцируемой всюду в полуплоскости $\xi_2 \geqslant 0$ кроме точек $\xi = (\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция Y гармонична в полуплоскости $\xi_2 > 0$, удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi_2} = -1 \ \text{ на } \ \big\{\xi\colon \xi_2 = 0,\ \xi_1 \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\big\},$$

и имеет логарифмические особенности в точках $\xi = (\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$Y(\xi) = \ln|\xi - \pi k| + \ln 2 + O(|\xi - \pi k|), \quad \xi \to (\pi k, 0).$$

Вместе со всеми своими производными она экспоненциально убывает при $\xi_2 \to +\infty$ равномерно по ξ_1.

Введем еще одну модельную функцию переменной $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$:

$$Z(\zeta) := \operatorname{Re}\ln\big(w + \sqrt{w^2 - 1}\big), \quad \zeta_2 > 0, \quad w := \zeta_1 + \mathrm{i}\zeta_2.$$

Эта функция гармонична при $\zeta_2 > 0$, бесконечно дифференцируема в полуплоскости $\zeta_2 \geqslant 0$ за исключением точек $\zeta = (\pm 1, 0)$ и имеет логарифмическую асимптотику на бесконечности:

$$Z(\zeta) = \operatorname{Re}\ln|\zeta| + \ln 2 + O(|\zeta|^{-2}), \quad \zeta \to \infty.$$

Повторяя теперь формальное построение асимптотик из работы [26], совершенно аналогично можно показать, что первые члены асимптотического разложения функции u_ε можно представить в виде

$$u_\varepsilon(x) = \Big(U_0(x,\mu) + \varepsilon\mu U_0(x_1,0,\mu) Y\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\chi_2(x_1)\Big(1 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_2\Big(\frac{|x - (\varepsilon\pi k, 0)|}{\varepsilon (a^\varepsilon)^{1/4}}\Big)\Big)$$

$$+ \varepsilon\mu U_0(x_1,0,\mu) \sum_{k\in\mathbb{Z}} Z\Big(\frac{x - (\pi k, 0)}{\varepsilon a^\varepsilon}\Big)\chi_2\Big(\frac{|x - (\varepsilon\pi k, 0)|}{\varepsilon (a^\varepsilon)^{1/4}}\Big) + \ldots,$$

где $\chi_2 = \chi_2(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t < 1/3$ и нулю при $t > 1/2$. Так как функция U_0 аналитична по μ, то первые члены ее ряда Тейлора по μ имеют вид $U_0 = u_0 + \mu u_1 + \ldots$, где u_1 — решение задачи

$$(-\Delta_x + 1)u_1 = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u_1 = 0 \ \text{ на } \ \gamma, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_0 \ \text{ на } \ \Gamma.$$

Учитывая данный факт и непосредственно оценивая снизу $W_2^1(\Omega)$- и $L_2(\Omega)$-нормы первых поправок в приведенной выше асимптотике, заключаем, что

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u_0)\|_{L_2(\Omega)} \geqslant C(\varepsilon + \mu), \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega)} \geqslant C\mu$$

с некоторыми константами C, не зависящими от ε и μ. Это доказывает утверждаемую точность оценок (1.8), (1.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марченко В.А., Хруслов Е.Я.** Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974. 280 с.
2. **Damlamian A., Li Ta-Tsien.** Boundary homogenization for ellpitic problems // J. Math. Pures Appl. (9). 1987. Vol. 66, no. 4. P. 351–361.
3. **Lobo M., Pérez M.E.** Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions // Math. Model. Numer. Anal. 1988. Vol. 22, no. 4. P. 609–624. doi: 10.1051/m2an/1988220406091
4. **Lobo M., Pérez M.E.** Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies // Bull. Sci. Math. 1992. Ser. 2. Vol. 116. P. 399–426.
5. **Чечкин Г.А.** Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 6.
6. **Friedman A., Huang Ch., Yong J.** Effective permeability of the boundary of a domain // Comm. Part. Diff. Equat. 1995. Vol. 20, no. 1-2. P. 59–102. doi: 10.1080/03605309508821087
7. **Беляев А.Ю., Чечкин Г.А.** Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 4. С. 496–510.
8. **Dávila J.** A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions // Asympt. Anal. 2001. Vol. 28, № 3-4. P. 279–307.
9. **Borisov D., Cardone G.** Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42, no. 36. Article no. 365205. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/365205
10. **Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.** On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition // Ann. H. Poincaré. 2010. Vol. 11, no. 8. P. 1591–1627. doi: 10.1007/s00023-010-0065-0
11. **Borisov D., Bunoiu R., G. Cardone.** Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics // Zeit. Angew. Math. Phys. 2013. Vol. 64, no. 3. P. 439–472. doi: 10.1007/s00033-012-0264-2
12. **Шарапов Т.Ф.** О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 10. С. 125–160.
13. **Шарапов Т.Ф.** О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий: критический случай // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, № 2. С. 66–96.
14. **Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н.** Операторные L_2-оценки для двумерных задач с частой сменой краевых условий // Проблемы мат. анализа. 2022. Вып. 117. С. 31–46.
15. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972. 740 с.
16. **Борисов Д.И.** Об операторных оценках для плоских областей с нерегулярным искривлением границы: условия Дирихле и Неймана // Проблемы мат. анализа. 2022. Т. 116. С. 69–84.
17. **Борисов Д.И.** О равномерной резольвентной сходимости эллиптических операторов в областях с тонкими отростками // Проблемы мат. анализа. 2022. Т. 114. С. 15–36.
18. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
19. **Дубинский Ю.А.** Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Современ. проблемы математики. 1976. Т. 9, №8. Р. 5–130.
20. **Borisov D.I., Kříž J.** Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit // Anal. Math. Phys. 2023. Vol. 13. Article id. 5. doi: 10.1007/s13324-022-00765-8
21. **Senik N.N.** Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // SIAM J. Math. Anal. 2017. Vol. 49, no. 2. P. 874–898. https://doi.org/10.1137/15M1049981
22. **Senik N.N.** Homogenization for locally periodic elliptic operators // J. Math. Anal. Appl. 2021. Vol. 505, no. 2. Article no. 125581. doi: 10.1016/j.jmaa.2021.125581
23. **Пастухова С.Е.** Об оценках усреднения для сингулярно возмущенных операторов // Проблемы мат. анализа. 2020. Т. 106. Р. 149–168.
24. **Пастухова С.Е.** L_2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов высокого порядка // Проблемы мат. анализа. 2020. Т. 107. С. 113–132.
25. **Пастухова С.Е.** L_2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка // Мат. сб. 2021. Т. 212, № 1. С. 119–142. https://doi.org/10.4213/im459

26. **Борисов Д.И.** Асимптотики и оценки собственных элементов Лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67, no. 6. С. 23–70.

Поступила 30.01.2023
После доработки 16.02.2023
Принята к публикации 20.02.2023

Борисов Денис Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор РАН
главный науч. сотрудник, зав. отделом
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН;
Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы
г. Уфа;
University of Hradec Králové
Hradec Kralove Czech Republic
e-mail: borisovdi@yandex.ru

REFERENCES

1. *Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Kraevye zadachi v oblastyakh s melkozernistoi granitsei* [Boundary-value problems with fine-grained boundary]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1974, 280 p.
2. Damlamian Alain, Li Ta-Tsien. Boundary homogenization for elliptic problems. *J. Math. Pures Appl.* (9), 1987, vol. 66, no. 4, p. 351–361.
3. Lobo M., Pérez M.E. Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions. *Math. Model. Numer. Anal.*, 1988, vol. 22, no. 4, pp. 609–624. doi: 10.1051/m2an/1988220406091
4. Lobo M., Pérez M.E. Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies. *Bull. Sci. Math.*, Ser. 2, 1992, vol. 116, pp. 399–426.
5. Chechkin G. A. Averaging of boundary value problems with a singular perturbation of the boundary conditions. *Sb. Math.*, 1994, vol. 79, no. 1, pp. 191–222. doi: 10.1070/SM1994v079n01ABEH003608
6. Friedman A., Huang Ch. and Yong J. Effective permeability of the boundary of a domain. *Comm. Part. Diff. Equat.*, 1995, vol. 20, no. 1-2, pp. 59–102. doi: 10.1080/03605309508821087
7. Belyaev A. Yu., Chechkin G. A. Averaging of operators with boundary conditions of fine-scaled structure. *Math. Notes.*, 1999, vol. 65, no. 4, pp. 418–429.
8. Dávila J. A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions. *Asympt. Anal.*, 2001, vol. 28, no. 3-4, pp. 279–307.
9. Borisov D., Cardone G. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2009, vol. 42, no. 36, article no. 365205. doi: 10.1088/1751-8113/42/36/365205
10. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition. *Ann. H. Poincaré.*, 2010, vol. 11, no. 8, pp. 1591–1627. doi: 10.1007/s00023-010-0065-0
11. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics. *Zeit. Angew. Math. Phys.*, 2013, vol. 64, no. 3, pp. 439–472. doi: 10.1007/s00033-012-0264-2
12. Sharapov T.F. On the resolvent of multidimensional operators with frequently changing boundary conditions in the case of the homogenized Dirichlet condition. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 10, pp. 1492–1527. doi: 10.1070/SM2014v205n10ABEH004427
13. Sharapov T.F. On resolvent of multi-dimensional operators with frequent alternation of boundary conditions: critical case. *Ufa Math. J.*, 2016, vol. 8, no. 2, pp. 65–94. doi: 10.13108/2016-8-2-65
14. Borisov D.I., Konyrkulzhaeva M.N. Operator L_2-estimates for two-dimensional problems with rapidly alternating boundary conditions. *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 267, no. 3, pp. 319–337. doi: 10.1007/s10958-022-06136-9
15. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Heidelberg: Springer, 1966, 592 p. doi: 10.1007/978-3-662-12678-3 Translated to Russian under the title Teoriya vozmushchenii lineinykh operatorov, Moscow, Mir Publ., 1972, 740 p.

16. Borisov D.I. Operator estimates for planar domains with irregularly curved boundary. The Dirichlet and Neumann condition. *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 264, no. 5, pp. 562–580. doi: 10.1007/s10958-022-06017-1
17. Borisov D.I., Norm resolvent convergence of elliptic operators in domains with thin spikes. *J. Math. Sci.*, 2022, vol. 261, no. 3, pp. 366–392. doi: 10.1007/s10958-022-05756-5
18. Vainberg M.M. *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations.* NY: Halsted Press Book; London: John Wiley & Sons, 1973, 356 p. ISBN-10: 0685138119. Original Russian text published in Vainberg M.M. Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineinykh uravnenii, Moscow, Nauka Publ., 1972, 416 p.
19. Dubinskii Yu.A. Nonlinear elliptic and parabolic equations. *J. Math. Sci.*, 1979, vol. 12, no. 5, pp. 475–554. doi: 10.1007/BF01089137
20. Borisov D.I., Kříž J. Operator estimates for non-periodically perforated domains with Dirichlet and nonlinear Robin conditions: vanishing limit. *Anal. Math. Phys.*, 2023, vol. 13, article id. 5. doi: 10.1007/s13324-022-00765-8
21. Senik N.N. Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder. *SIAM J. Math. Anal.*, 2017, vol. 49, no. 2, pp. 874–898. doi: https://doi.org/10.1137/15M1049981
22. Senik N.N. Homogenization for locally periodic elliptic operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, vol. 505, no. 2, article no. 125581. doi: 10.1016/j.jmaa.2021.125581
23. Pastukhova S.E. Homogenization estimates for singularly perturbed operators. *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 251, no. 5, pp. 724–747. doi: 10.1007/s10958-020-05125-0
24. Pastukhova S.E. L_2-approximation of resolvents in homogenization of higher order elliptic operators. *J. Math. Sci.*, 2020, Vol. 251, no. 6, pp. 902–925. doi: 10.1007/s10958-020-05135-y
25. Pastukhova S.E. Approximation of resolvents in homogenization of fourth-order elliptic operators. *Sb. Math.*, 2021, vol. 212, no. 1, pp. 111–134. doi: 10.1070/SM9413
26. Borisov D.I. Asymptotics and estimates for the eigenelements of the Laplacian with frequently alternating nonperiodic boundary conditions. *Izv. Math.*, 2003, vol. 67, no. 6, pp. 1101–1148. doi: 10.1070/IM2003v067n06ABEH000459

Received January 30, 2023
Revised February 16, 2023
Accepted February 20, 2023

Funding Agency: The work is partially supported by the Grant Agency of Czech Republic (grant no. 22-18739S) and by the Ministry of Education of the Russian Federation in the framework of the state task (agreement No. 073-03-2023-010 on 26.01.2023).

Denis Ivanovich Borisov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics of Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia; Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmullah, Ufa, the Republic of Bashkortostan, Russia; University of Hradec Králové, Hradec Kralove, 500 03, Czech Republic e-mail: borisovdi@yandex.ru .

Cite this article as: D. I. Borisov. Operator estimates in two-dimensional problems with a frequent alternation in the case of small parts with the Dirichlet condition. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 36–55 .