ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 519.176

ДВУДОЛЬНО-ПОРОГОВЫЕ ГРАФЫ И ПОВЫШАЮЩИЕ ВРАЩЕНИЯ РЕБЕР В ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФАХ

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ будем называть *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек (x, v, y) таких, что $x, y \in V_1$, $v \in V_2$ или $x, y \in V_2$, $v \in V_1$. Любой двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ можно преобразовать в двудольно-пороговый граф с помощью конечной последовательности таких двудольных повышающих вращений ребер. В нашей предыдущей работе мы изучили свойства двудольно-пороговых графов и отметили их важность для класса пороговых графов. Теперь мы хотим показать важность этих графов для класса двудольных графов. Под разбиением мы всегда будем понимать невозрастающую последовательность целых неотрицательных чисел, которая содержит лишь конечное число ненулевых компонент. Для любых разбиений α и β таких, что $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ и $\alpha \leq \beta^*$, где β^* — сопряженное к β разбиение, через $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ будем обозначать семейство двудольных графов $H = (V_1, E, V_2)$, реализующих пару разбиений (α, β), т. е. всех таких двудольных графов, что исходная пара разбиений составлена из степеней вершин соответственно первой и второй долей этого графа, дополненных нулями. В данной работе мы даем описание двудольно-пороговых графов, составляющих семейство $\mathrm{BTG}_{\uparrow}(\alpha, \beta)$, всех двудольно-пороговых графов, которые можно получить из графов семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ с помощью двудольных повышающих вращений ребер. Также находим наименьшую длину последовательностей двудольных повышающих вращений ребер, переводящих графы из $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ в графы из $\mathrm{BTG}_{\uparrow}(\alpha, \beta)$, даем алгоритм, который находит двудольно-пороговый граф, принадлежащий семейству $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$, и получаем описание процедуры, которая позволяет из одного графа семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ получить все графы этого семейства.

Ключевые слова: разбиение, пороговый граф, двудольный граф, двудольно-пороговый граф, диаграмма Ферре.

V. A. Baranskii, T. A. Sen'chonok. Bipartite-threshold graphs and lifting rotations of edges in bipartite graphs.

A bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ is called a *bipartite-threshold graph* if it has no lifting triples (x, v, y) such that $x, y \in V_1$, $v \in V_2$ or $x, y \in V_2$, $v \in V_1$. Every bipartite graph $H = (V_1, E, V_2)$ can be transformed to a bipartite-threshold graph by a finite sequence of such bipartite lifting rotations of edges. In our previous paper, we studied the properties of bipartite-threshold graphs and noted their importance for the class of threshold graphs. Now we want to show the importance of these graphs for the class of bipartite graphs. We will always understand an integer partition as a nonincreasing sequence of nonnegative integers that contains only finitely many nonzero terms. For any integer partitions α and β such that $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$ and $\alpha \leq \beta^*$, where β^* is the conjugate partition of β, we denote by $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ the family of bipartite graphs $H = (V_1, E, V_2)$ implementing the pair of partitions (α, β), i.e., the family of all bipartite graphs for which the given pair of partitions is composed of the degrees of vertices in the first and second parts of the graph, respectively, supplemented with zeros. In this paper we describe the bipartite-threshold graphs from the family $\mathrm{BTG}_{\uparrow}(\alpha, \beta)$ of all bipartite-threshold graphs that can be obtained from the graphs of the family $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ by bipartite lifting rotations of edges. We also find the smallest length of sequences of bipartite lifting rotations of edges transforming graphs from $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ to graphs belonging to $\mathrm{BTG}_{\uparrow}(\alpha, \beta)$, give an algorithm that finds a bipartite-threshold graph from $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$, and describe a procedure that generates all graphs in a family $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ from one graph of this family.

Keywords: integer partition, threshold graph, bipartite graph, bipartite-threshold graph, Ferrers diagram.

MSC: 05A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-24-35

Введение

Далее под графом мы будем понимать обыкновенный граф, т. е. граф без петель и кратных ребер, и будем использовать терминологию, принятую в [1].

Разбиением будем называть невозрастающую последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел, которая содержит конечное число ненулевых компонент (см. [2]).

Отметим, что теория разбиений является одним из активно развивающихся современных направлений комбинаторики, основы которой заложил Л. Эйлер еще в XVIII в. Сведения о ярких достижениях этой теории в XIX и XX вв. можно найти в [2].

Далее будем использовать понятия и обозначения, введенные в нашей работе 2020 г. (Двудольно-пороговые графы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 56–67). Мы дали понятие двудольно-порогового графа, изучили свойства таких графов и отметили их важную роль в теории пороговых графов и теории графических разбиений. Теперь покажем, что двудольно-пороговые графы играют особую роль в классе двудольных графов, при этом будем рассматривать пары разбиений, составленных из степеней вершин соответственно двух долей двудольного графа и дополненных нулями. Эти разбиения будем называть *степенными разбиениями долей графа.*

Для каждого разбиения λ через λ^* обозначим сопряженное разбиение, диаграмма Ферре которого получается из диаграммы Ферре разбиения λ с помощью зеркальной симметрии относительно главной диагонали. Пусть $\xi, \eta \in NPL(m)$ и f — элементарное преобразование первого типа, преобразующее ξ в η. Будем писать $\xi \rightharpoondown \eta$. Нетрудно заметить (рис. 1), что обратное преобразование f^* к преобразованию f является элементарным преобразованием первого типа, преобразующим η^* в ξ^*, т. е. $\eta^* \rightharpoondown \xi^*$.

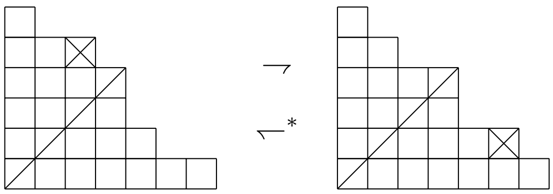

Рис. 1

Диаграммы Ферре, указанные на рис. 1, можно рассматривать и как диаграммы Ферре соответствующих сопряженных разбиений — только тогда их нужно рассматривать лежащими “на боку”, т. е. компоненты считывать по строкам.

Пусть $H = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф и $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \alpha$, $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$ — степенные разбиения его долей. Тогда $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta) = m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и в силу теоремы Гейла — Райзера выполняется $\alpha \leq \beta^*$ (о теореме Гейла — Райзера см. в указанной работе 2020 г.). Граф H назовем *реализацией пары разбиений* (α, β). Класс всех таких двудольных графов обозначим через $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ (*семейство двудольных графов, отвечающее паре* (α, β)).

Тройка (x, v, y) различных вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$ называется *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$, и — *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. Преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, называется *вращением ребра в графе G вокруг вершины v, отвечающим тройке* (x, v, y). Вращение ребра в графе G, отвечающее тройке (x, v, y), называется *повышающим* (*понижающим*), если тройка (x, v, y) повышающая (понижающая).

Рассматривая двудольные графы вида $H = (V_1, E, V_2)$ из $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ и вращения ребер в них, с точностью до изоморфизма и наличия изолированных вершин можем считать, что зафиксированы множества V_1 и V_2 такие, что $|V_1| = |V_2| = m$, где $m = \mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$, поскольку число неизолированных вершин в каждой из долей графа не превосходит m, а удаление или добавление изолированной вершины к графу из семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ приводит снова к графу из семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ мы называем *двудольно-пороговым графом*, если он не имеет повышающих троек как первой, так и второй доли, т. е. таких повышающих троек (x, v, y), что $x, y \in V_1$, $v \in V_2$ или $x, y \in V_2$, $v \in V_1$ (в первом случае соответствующее вращение ребра будем называть V_1-вращением, а во втором — V_2-вращением ребра). Для любого двудольного графа $H = (V_1, E, V_2)$ в теореме 1 из отмеченной работы 2020 г. были найдены различные условия, эквивалентные тому, что двудольный граф является двудольно-пороговым графом, и связи двудольно-пороговых графов с пороговыми графами [3], говорящие о важности двудольно-пороговых графов для теории пороговых графов.

Для произвольного разбиения λ через $\mathrm{btg}(\lambda^*, \lambda)$ будем обозначать двудольно-пороговый граф с долями V_1 и V_2 без изолированных вершин такой, что $\mathrm{dpt}_G(V_1) = \lambda^*$ и $\mathrm{dpt}_G(V_2) = \lambda$. Отметим, что данный граф единствен с точностью до изоморфизма (см. упомянутую выше статью авторов).

Любой двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$ из семейства графов $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ с помощью конечных последовательностей двудольных повышающих вращений ребер приводится к двудольно-пороговым графам, каждый из которых с точностью до изоморфизма и изолированных вершин имеет вид $\mathrm{btg}(\lambda^*, \lambda)$ для подходящего разбиения λ, и граф $H = (V_1, E, V_2)$ получается из таких графов $\mathrm{btg}(\lambda^*, \lambda)$ с помощью обратных последовательностей двудольных понижающих вращений ребер.

Через $BTG_\uparrow(\alpha, \beta)$ обозначим семейство всех двудольно-пороговых графов, которые можно получить из графов семейства $BG(\alpha, \beta)$ с помощью двудольных повышающих вращений (*семейство двудольно-пороговых графов над парой* (α, β)).

Пусть двудольный граф $H = (V_1, E_2, V_2)$ может быть получен из графа $G = (V_1, E_1, V_2)$ с помощью конечной последовательности двудольных повышающих вращений ребер. Наименьшее число двудольных повышающих вращений ребер в последовательности, переводящей G в H, обозначим через $\mathrm{updist}(G, H)$ и будем называть *верхним расстоянием от G до H*.

Пусть λ и μ — разбиения из NPL и $\lambda \leq \mu$. *Высотой* $\mathrm{height}(\mu, \lambda)$ *разбиения μ над разбиением λ* назовем длину кратчайшей последовательности элементарных преобразований от μ до λ.

Цель данной работы состоит:

∘ в описании семейства двудольно-пороговых графов $\mathrm{BTG}_\uparrow(\alpha, \beta)$ для произвольного семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$;

∘ в нахождении наименьшего верхнего расстояния от графов из семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ до графов из семейства $\mathrm{BTG}_\uparrow(\alpha, \beta)$;

∘ в описании алгоритма построения некоторого двудольно-порогового графа, принадлежащего семейству $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$;

∘ в нахождении процедуры, которая позволяет из одного графа семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ получить все графы этого семейства.

1. Семейство двудольно-пороговых графов $\mathrm{BTG}_\uparrow(\alpha, \beta)$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ — разбиение и для натуральных чисел i, j таких, что $1 \leq i < j \leq l(\lambda) + 1 = t$, выполняются неравенства $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$, $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$ и $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$. Будем говорить, что разбиение $\eta = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_t, \dots)$ получено из разбиения λ с помощью *элементарного преобразования первого типа* (или *перекидывания блока*). Отметим, что элементарные преобразования первого типа сохраняют вес разбиения.

Лемма 1. 1) *Пусть $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$ и $G_2 = (V_1, E_2, V_2)$ — двудольные графы и граф G_2 получен из графа G_1 с помощью понижающего V_1-вращения ребра. Тогда $\mathrm{dpt}_{G_2}(V_1)$ можно получить из $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_1)$ с помощью элементарного преобразования первого типа, т. е. $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_1) \rightharpoondown \mathrm{dpt}_{G_2}(V_1)$, и $\mathrm{dpt}_{G_2}(V_2) = \mathrm{dpt}_{G_1}(V_2)$.*

2) *Пусть $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$ — двудольный граф и разбиение μ получено из разбиения $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_1)$ с помощью элементарного преобразования первого типа, т. е. $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_1) \rightharpoondown \mu$. Тогда существует двудольный граф $G_2 = (V_1, E_2, V_2)$, который получается из графа G_1 с помощью понижающего V_1-вращения ребра и для которого выполняются $\mu = \mathrm{dpt}_{G_2}(V_1)$ и $\mathrm{dpt}_{G_2}(V_2) = \mathrm{dpt}_{G_1}(V_2)$ (конечно, аналогичное утверждение верно и для доли V_2 графа G_1).*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно.

Докажем 2). Пусть $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_1) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_t)$, где $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq t$ и $\mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_t)$. Пусть для вершин $x, y \in V_1$ выполняются $\deg_{G_1}(x) = \lambda_i$ и $\deg_{G_1}(y) = \lambda_j$. Поскольку $\lambda_i > \lambda_j$, существует вершина $v \in V_2$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$. Пусть φ — понижающее V_1-вращение ребра, отвечающее тройке (x, v, y) в графе G_1. Тогда $\mu = \mathrm{dpt}_{G_2}(V_1)$ в графе $G_2 = \varphi(G_1)$. Равенство $\mathrm{dpt}_{G_2}(V_2) = \mathrm{dpt}_{G_1}(V_2)$ очевидно, поскольку понижающее V_1-вращение ребра не меняет степеней вершин из V_2.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $G_1 = (V_1, E_1, V_2) \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$, $G_2 = (V_1, E_2, V_2)$ — двудольный граф и $G_1 \to \cdots \to G_2$ — некоторая последовательность двудольных повышающих вращений ребер в двудольных графах. Тогда*

$$\alpha \leq \alpha_2 = \mathrm{dpt}_{G_2}(V_1) \leq \beta^* \text{ и } \beta \leq \beta_2 = \mathrm{dpt}_{G_2}(V_2) \leq \alpha^*.$$

Доказательство. Индукция — по числу двудольных повышающих вращений.

В силу теоремы Гейла — Райзера выполняется база индукции $\alpha \leq \beta^*$ и $\beta \leq \alpha^*$.

Пусть $G_2 \to H = (V_1, E', V_2)$ — очередное двудольное повышающее вращение. Без ограничения общности будем считать, что оно является повышающим V_1-вращением (случай повышающего V_2-вращения рассматривается совершенно аналогично). Пусть $\lambda = \mathrm{dpt}_H(V_1)$ и $\mu = \mathrm{dpt}_H(V_2)$. Так как повышающее V_1-вращение не меняет степеней вершин из V_2, справедливо $\mu = \beta_2$. Отсюда $\beta \leq \mu \leq \alpha^*$ в силу предположения индукции, из чего следует $\beta^* \geq \mu^*$, поскольку переход к сопряженным разбиениям есть антиавтоморфизм решетки $NPL(m)$, где $m = \mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta)$. По предположению индукции имеем $\alpha \leq \alpha_2 \leq \beta^*$.

Поскольку $G_2 \to H = (V_1, E', V_2)$ — двудольное повышающее V_1-вращение, выполняется $\alpha_2 \leq \lambda$. Из условия $H \in \mathrm{BG}(\lambda, \mu)$ в силу теоремы Гейла — Райзера получаем $\lambda \leq \mu^*$. Тогда имеем $\alpha \leq \alpha_2 \leq \lambda \leq \mu^* \leq \beta^*$, т. е. $\alpha \leq \lambda \leq \beta^*$ и $\beta \leq \mu \leq \alpha^*$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Семейство $\mathrm{BTG}_{\uparrow}(\alpha, \beta)$ с точностью до изоморфизмов и изолированных вершин состоит из графов вида $\mathrm{btg}(\lambda, \lambda^*)$, где $\alpha \leq \lambda \leq \beta^*$.*

(*Заметим, что условие $\alpha \leq \lambda \leq \beta^*$ эквивалентно условию $\beta \leq \lambda^* \leq \alpha^*$.*)

Доказательство. $\Rightarrow$. Следует из леммы 2.

Для доказательства обратного утверждения нужно проверить, что любой двудольно-пороговый граф вида $\mathrm{btg}(\lambda, \lambda^*)$, где $\alpha \leq \lambda \leq \beta^*$, можно получить из графа, принадлежащего $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$, с помощью двудольных повышающих вращений.

Пусть $H_1 = (V_1, E_1, V_2) = \mathrm{btg}(\lambda, \lambda^*)$, где $\alpha \leq \lambda \leq \beta^*$. Тогда $\beta \leq \lambda^* \leq \alpha^*$.

Согласно условию $\alpha \leq \lambda$ в $NPL(m)$ существует последовательность $\lambda \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \alpha$ элементарных преобразований первого типа, преобразующая λ в α, поэтому в силу леммы 1 существует последовательность $H_1 \to \cdots \to H_2$ понижающих V_1-вращений ребер такая, что $H_2 \in \mathrm{BG}(\alpha, \lambda^*)$ (отметим, что понижающие V_1-вращения не меняют степеней вершин из V_2). Взяв обратные вращения в обратном порядке к этой последовательности понижающих V_1-вращений, мы получаем последовательность $H_2 \to \cdots \to H_1$ повышающих V_1-вращений ребер.

Поскольку $\beta \leq \lambda^*$, в $NPL(m)$ существует последовательность $\lambda^* \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \beta$ элементарных преобразований первого типа, преобразующая λ^* в β, поэтому в силу леммы 1 существует последовательность $H_2 \to \cdots \to G$ понижающих V_2-вращений ребер такая, что $G \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ (понижающие V_2-вращения не меняют степеней вершин из V_1). Взяв обратные вращения в обратном порядке к этой последовательности понижающих V_2-вращений ребер, мы получаем последовательность $G \to \cdots \to H_2$ повышающих V_2-вращений ребер.

Таким образом, мы получаем последовательность двудольных повышающих вращений ребер $G \to \cdots \to H_2 \to \cdots \to H_1 = \mathrm{btg}(\lambda, \lambda^*)$, где $G \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть двудольно-пороговый граф* $H = (V_1, E_2, V_2) = \mathrm{btg}(\lambda, \lambda^*) \in \mathrm{BTG}_{\uparrow}(\alpha, \beta)$ *можно получить из графа* $G = (V_1, E_1, V_2) \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ *с помощью конечной последовательности двудольных повышающих вращений ребер. Тогда*

$$\mathrm{updist}(G, H) \geq \mathrm{height}(\beta^*, \alpha) = \mathrm{height}(\alpha^*, \beta).$$

Доказательство. Пусть

$$G = G_0 \to G_1 \to G_2 \to \cdots \to G_t = H \tag{1.1}$$

— произвольная конечная последовательность длины t двудольных повышающих вращений ребер, преобразующая G в H. Нам нужно установить, что $t \geq \mathrm{height}(\beta^*, \alpha)$.

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, t-1$ выполняются следующие положения:

1) если вращение ребра $G_i \to G_{i+1}$ является повышающим V_1-вращением, то $G_{i+1} \to G_i$ есть понижающее V_1-вращение ребра и поэтому в силу леммы 1 $\mathrm{dpt}_{G_{i+1}}(V_1) \rightharpoondown \mathrm{dpt}_{G_i}(V_1)$ является элементарным преобразованием первого типа и выполняется равенство $\mathrm{dpt}_{G_{i+1}}(V_2) = \mathrm{dpt}_{G_i}(V_2)$;

2) если вращение ребра $G_i \to G_{i+1}$ является повышающим V_2-вращением, то $G_{i+1} \to G_i$ — понижающее V_2-вращение ребра и поэтому в силу леммы 1 $\mathrm{dpt}_{G_{i+1}}(V_2) \rightharpoondown \mathrm{dpt}_{G_i}(V_2)$ есть элементарное преобразование первого типа и выполняется равенство $\mathrm{dpt}_{G_{i+1}}(V_1) = \mathrm{dpt}_{G_i}(V_1)$.

Рассматривая в последовательности (1.1) лишь переходы, отвечающие только повышающим V_1-вращениям ребер, в силу п. 1) мы получаем последовательность вида $\lambda = \mathrm{dpt}_H(V_1) \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \mathrm{dpt}_G(V_1) = \alpha$ длины t_1, где t_1 равно числу повышающих V_1-вращений в последовательности (1.1).

Аналогично, рассматривая в последовательности (1.1) лишь переходы, отвечающие только повышающим V_2-вращениям, исходя из п. 2) мы получаем последовательность вида $\lambda^* = \mathrm{dpt}_H(V_2) \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \mathrm{dpt}_G(V_2) = \beta$ длины t_2, где t_2 равно числу повышающих V_2-вращений ребер в последовательности (1.1).

Ясно, что $t_1 + t_2 = t$.

Переходя в последовательности $\lambda^* = \mathrm{dpt}_H(V_2) \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \mathrm{dpt}_G(V_2) = \beta$ к сопряженным разбиениям и учитывая последовательность $\lambda = \mathrm{dpt}_H(V_1) \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \mathrm{dpt}_G(V_1) = \alpha$, мы находим последовательность длины t

$$\beta^* \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \lambda \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \alpha.$$

Отсюда следует, что $t \geq \mathrm{height}(\beta^*, \alpha)$, так как $\mathrm{height}(\beta^*, \alpha)$ равно длине кратчайшей последовательности элементарных преобразований от β^* до α.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Оценка снизу, указанная в теореме* 2, *достигается на графах* $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ *и* $\mathrm{btg}(\alpha, \alpha^*)$, *т. е. при* $\lambda = \beta^*$ *и при* $\lambda = \alpha$.

Доказательство. Поскольку $\alpha \leq \beta^*$, в $NPL(m)$ существует последовательность $\beta^* \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \alpha$ элементарных преобразований первого типа длины $t = \mathrm{height}(\beta^*, \alpha)$, поэтому согласно лемме 1 существует последовательность $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta) \to \cdots \to G$ понижающих V_1-вращений ребер длины t такая, что $G \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$. Взяв обратные повышающие V_1-вращения ребер в обратном порядке к этой последовательности понижающих V_1-вращений ребер, мы получим последовательность $G \to \cdots \to \mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ повышающих V_1-вращений ребер длины t, поэтому ввиду теоремы 2

$$\mathrm{updist}(G, \mathrm{btg}(\beta^*, \beta)) = \mathrm{height}(\beta^*, \alpha).$$

Отметим, что двудольно-пороговый граф $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ получается из графа G с помощью повышающих V_1-вращений ребер без использования повышающих V_2-вращений ребер.

Конечно, аналогичные рассуждения справедливы для графа $\mathrm{btg}(\alpha, \alpha^*)$ и повышающих V_2-вращений ребер.

Следствие доказано.

2. Семейство двудольных графов $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$

Условие $\alpha \leq \beta^*$ для разбиений α и β эквивалентно тому, что существует последовательность

$$\beta^* = \eta_0 \rightharpoondown \eta_1 \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \eta_t = \alpha \tag{2.1}$$

элементарных преобразований от β^* до α [4]. В силу утверждения 2) леммы 1 существует последовательность двудольных графов

$$G_0 = (V_1, E_0, V_2) \to G_1 = (V_1, E_1, V_2) \to \cdots \to G_t = (V_1, E_t, V_2), \tag{2.2}$$

где G_0 с точностью до изолированных вершин является графом вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$, $G_t \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ и каждый граф G_k получается из графа G_{k-1} с помощью понижающего V_1-вращения ребра.

Ясно, что последовательности (2.1) могут отвечать несколько последовательностей вида (2.2). Кроме того, по утверждению 1) леммы 1 любая последовательность понижающих V_1-вращений ребер (2.2) отвечает последовательности элементарных преобразований от β^* до α вида (2.1) такой, что

$$\beta^* = \mathrm{dpt}_{G_0}(V_1) \to \mathrm{dpt}_{G_1}(V_1) \to \cdots \to \mathrm{dpt}_{G_t}(V_1) = \alpha.$$

Основываясь на данном соответствии, можно было бы построить достаточно громоздкий алгоритм нахождения всех графов семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Мы же предлагаем достаточно быстрый алгоритм для нахождения некоторого двудольного графа $G = (V_1, E, V_2)$, принадлежащего семейству $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$. Наш алгоритм основан на идеях, совершенно не связанных с известным методом Гавела — Хакими.

Часть используемых далее понятий мы будем иллюстрировать следующим простым примером.

П р и м е р 1. Пусть $\alpha = (3, 2, 2, 2, 1, 1)$ и $\beta = (4, 3, 2, 2)$. Тогда $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta) = 11$, $\beta^* = (4, 4, 2, 1)$ и по определению отношения $\leq$ выполняется $\alpha \leq \beta^*$. Рассмотрим покомпонентную разность β^* и α:

$$\begin{array}{rccccccc}
\beta^* = & (4, & 4, & 2, & 1, & 0, & 0, & 0) \\
\alpha = & (3, & 2, & 2, & 2, & 1, & 1, & 0) \\
\hline
\beta^* - \alpha = & (+1, & +2, & 0, & -1, & -1, & -1, & 0).
\end{array}$$

Будем говорить, что разбиение β^* над разбиением α в компонентах с номерами 1 и 2 имеет *горки* [5], высоты 1 и 2 соответственно, а в компонентах с номерами 4, 5 и 6 — *ямки* [5] над разбиением α, каждая из которых глубиной 1. Отметим, что сумма высот всех горок равна сумме глубин всех ямок [5]. Ямка называется *допустимой*, если добавление к ней 1 не меняет порядок по невозрастанию для получаемого разбиения (сохраняет ступенчатый вид диаграммы Ферре). Так, 6-я ямка (в компоненте с номером 6) не является допустимой для β^*, а 5-я ямка — допустима для β^*. Если имеется ямка, то всегда есть и допустимая ямка [5].

Алгоритм построения некоторой кратчайшей последовательности элементарных преобразований первого типа от β^* до α [5] состоит в последовательном перекидывании блоков в допустимые ямки из ближайших к ним слева горок. Выбор допустимых ямок в преобразуемом разбиении ведется справа налево. Длина такой последовательности равна сумме высот всех горок разбиения β^* над разбиением α. Построим такую последовательность в нашем примере:

$$\begin{array}{rl}
\beta^* = (4,\ \underline{4},\ 2,\ 1,\ \underline{0},\ 0,\ 0); & (4,\ \underline{3},\ 2,\ 1,\ 1,\ \underline{0},\ 0); \\
(+1, +2,\ 0, -1, -1, -1,\ 0); & (+1, +1,\ 0, -1,\ 0, -1,\ 0);
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(\underline{4},\ 2,\ 2,\ \underline{1},\ 1,\ 1,\ 0); & (3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0) = \alpha; \\
(+1,\ 0,\ 0, -1,\ 0,\ 0,\ 0); & (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0);
\end{array}$$

(здесь подчеркиванием на каждом шаге показывается выбор горки и допустимой ямки для последующего элементарного преобразования первого типа).

Дадим теперь неформальное описание нашего алгоритма.

Далее, множество ребер двудольного графа $G = (V_1, E, V_2)$ мы будем задавать *системой окрестностей вершин его доли* V_2. Окрестности вершин представим в виде двусвязных списков [1].

Пусть заданы разбиения α и β такие, что $\alpha \leq \beta^*$ и $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta) = m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Ш а г 1. Построим сначала двудольный граф вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$, первая доля которого имеет вид $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, а вторая — $V_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Определим множество ребер искомого графа $H = (V_1, E', V_2)$ вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$, полагая $N_H(u_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\beta_m}\} \subseteq \cdots \subseteq N_H(u_2) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\beta_2}\} \subseteq N_H(u_1) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\beta_1}\}$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$. *Здесь предполагается, что при* $\beta_i = 0$ *выполняется* $N_H(u_i) = \varnothing$, *т. е.* u_i *— изолированная вершина.* Тогда $\mathrm{dpt}_H(V_2) = \beta$. Поскольку окрестности вершин $u_1, u_2, \ldots, u_m$ образуют цепь по теоретико-множественному включению, в силу теоремы 1 из статьи 2020 г., упомянутой выше, построенный граф является двудольно-пороговым и $\mathrm{dpt}_H(V_1) = \beta^*$ (рис. 2).

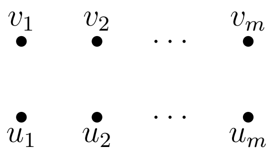

Рис. 2

Очевидно, что систему окрестностей вершин из $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ можно описать следующим образом:

$$N_H(v_m) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{\beta_m^*}\} \subseteq \cdots \subseteq N_H(v_2) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{\beta_2^*}\} \subseteq N_H(v_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{\beta_1^*}\}.$$

Ясно, что искомый граф $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ строится за время $O(m)$, где

$$m = \mathrm{sum}(\beta) = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m.$$

Рассмотрим построение графа $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ для примера 1.

Матрица смежности здесь — это $(m \times m)$-матрица, состоящая из единиц и нулей (нули мы будем опускать и говорить, что соответствующая клетка пуста), к которой для удобства добавлены два служебных столбца и две служебные строки для указания вершин и их степеней. Для удобства же будем считать, что эта матрица, как шахматная доска, состоит из квадратных клеток одинакового размера. Строки матрицы смежности очевидно являются характеристическими векторами для окрестностей вершин, которые соответствуют строкам (при зафиксированном порядке на V_2); аналогичное утверждение верно и для столбцов. Строки матрицы смежности двудольного графа будем всегда нумеровать снизу вверх, а столбцы — слева направо.

Здесь мы указали только ненулевые строки и ненулевые столбцы:

β_4^*	v_4	1			
β_3^*	v_3	1	1		
β_2^*	v_2	1	1	1	1
β_1^*	v_1	1	1	1	1
		u_1	u_2	u_3	u_4
		β_1	β_2	β_3	β_4

Окрестности $|N_H(u_1)| = 4$, $|N_H(u_2)| = 3$, $|N_H(u_3)| = 2$, $|N_H(u_4)| = 2$, $|N_H(u_5)| = \cdots = |N_H(u_{11})| = 0$ выбраны таким образом, что единицы в матрице смежности двудольного графа образуют диаграмму Ферре разбиения $\beta = (4,3,2,2)$. Отсюда следует, что $\deg(v_1) = 4 = \beta_1^*$, $\deg(v_2) = 4 = \beta_2^*$, $\deg(v_3) = 2 = \beta_3^*$, $\deg(v_4) = 2 = \beta_4^*$, $\deg(v_5) = \beta_5^* = \cdots = \deg(v_{11}) = \beta_{11}^* = 0$.

Ш а г 2. Возьмем теперь кратчайшую последовательность вида (2.1)

$$\beta^* = \eta_0 \rightharpoondown \eta_1 \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \eta_t = \alpha. \tag{2.3}$$

Ее длина t по определению равна высоте $\mathrm{height}(\beta^*, \alpha)$ разбиения β^* над разбиением α. Такую последовательность будем строить с помощью алгоритма, указанного в работе [5], там же доказано, что ее длина t равна сумме высот всех горок

$$\mathrm{height}(\beta^*, \alpha) = \sum_{j=1,\, \beta_j^* > \alpha_j}^{\infty} (\beta_j^* - \alpha_j).$$

Поэтому выполняется $t \le m$.

Отметим, что покомпонентная разность $\beta^* - \alpha$ вычисляется за время $O(m)$. Выбор очередной допустимой ямки и ближайшей слева горки также осуществляется за время $O(m)$. Поэтому последовательность (2.3) строится за время $O(m^2)$.

Ш а г 3. Теперь, используя утверждение 2) леммы 1, строим последовательность двудольных графов

$$G_0 = \mathrm{btg}(\beta^*, \beta) = (V_1, E_0, V_2) \to G_1 = (V_1, E_1, V_2) \to \cdots \to G_t = (V_1, E_t, V_2), \tag{2.4}$$

где G_0 с точностью до изолированных вершин является графом вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$, $G_t \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Покажем теперь, каким образом граф G_k получается из графа G_{k-1} с помощью метода, используемого в доказательстве утверждения 2) леммы 1 при $k = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_{k-1}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_t)$, где

$$1 \le i < j \le t, \quad \lambda_i - 1 \ge \lambda_{i+1}, \quad \lambda_{j-1} \ge \lambda_j + 1, \quad \lambda_i \ge 2 + \lambda_j$$

и

$$\eta = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_t),$$

в i-компоненте имеется горка, а в j-компоненте — ямка для разбиения $\mathrm{dpt}_{G_1}(V_{k-1})$ относительно разбиения α. Подберем вершину $u \in V_2$ такую, что $v_i u \in E_{k-1}$ и $u v_j \notin E_{k-1}$, т. е. (v_i, u, v_j) будет понижающей V_1-тройкой.

Пусть $|N_{G_{k-1}}(v_j)| = s$. Перебирая вершины из $N_{G_{k-1}}(v_i)$ и проверяя условие $u v_j \notin E_{k-1}$, мы не более чем за $s+1$ шагов найдем искомую вершину u, при этом на каждом шаге мы затратим время $O(s)$, где $s = \deg_{G_{k-1}}(v_j)$ и $s + 1 \le \deg_{G_{k-1}}(v_i)$. Производя понижающее V_1-вращение ребра, отвечающее тройке (v_i, u, v_j), мы получим нужный нам граф G_k.

Заметим, что первая компонента разбиения β^* равна длине $\ell(\beta)$ разбиения β. Поэтому из определения отношения доминирования вытекает, что все компоненты всех разбиений из (2.3) не превосходят $\ell(\beta)$ (этот факт следует также из того, что число неизолированных вершин в V_2 для всех графов из последовательности (2.4) равно $\ell(\beta)$). Поэтому каждое понижающее V_1-вращение ребра из строящейся последовательности (2.4) определяется за время $O(\ell^2(\beta))$. Значит, последовательность может быть получена за время $O(\ell^2(\beta) m)$, поскольку $t \le m$.

Ясно, что в силу результатов работы [5] и согласно лемме 1 указанный алгоритм завершится построением двудольного графа $G_t \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$. □

Общее время построения такого графа составляет $O(m^2 + \ell^2(\beta) m)$.

При программной реализации данного алгоритма для экономии памяти последовательности (2.3) и (2.4) нужно строить одновременно, сохраняя только ту информацию, которая необходима для нахождения графа $G_t \in \mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Приведем теперь краткое описание алгоритма, решающего задачу о построении двудольного графа $G = (V_1, E, V_2)$, принадлежащего семейству $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Алгоритм 1. На входе имеем два таких разбиения α и β, что $\mathrm{sum}(\alpha) = \mathrm{sum}(\beta) = m$ и $\alpha \leq \beta^*$. Последовательно выполняем следующие действия.

1. Берем два множества V_1 и V_2 мощности m. Строим двудольно-пороговый граф вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ с долями V_1 и V_2 указанным выше методом.
2. Используя алгоритм, указанный в работе [5], строим кратчайшую последовательность элементарных преобразований первого типа $\beta^* = \eta_0 \rightharpoondown \eta_1 \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown \eta_t = \alpha$, длина t которой равна $\mathrm{height}(\beta^*, \beta)$.
3. Начиная с графа $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ с долями V_1 и V_2, строим последовательность длины t двудольных графов с долями V_1 и V_2, каждый из которых получается с помощью понижающего V_1-вращения ребра из ранее построенного двудольного графа указанным выше методом в соответствии с элементарным преобразованием первого типа из последовательности, найденной на шаге 2. Последний граф в такой последовательности и будет искомым графом из семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$.

Отметим, что мы нигде в нашем алгоритме не использовали теорему Гейла — Райзера. Поэтому алгоритм гарантирует справедливость достаточности условия в теореме Гейла — Райзера. Необходимость условия теоремы Гейла — Райзера тоже легко доказать. Действительно, любой граф $G = (V_1, E, V_2)$ без изолированных вершин, принадлежащий семейству $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$, повышающими V_1-вращениями ребер преобразуется в граф вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$. Поэтому граф G можно получить из графа вида $\mathrm{btg}(\beta^*, \beta)$ с помощью понижающих V_1-вращений ребер, и, следовательно, в силу нескольких применений утверждения 1) леммы 1 получаем $\beta^* \geq \alpha$.

Теперь наша цель состоит в нахождении процедуры, которая позволяет из одного графа семейства $\mathrm{BG}(\alpha, \beta)$ получать все остальные графы этого семейства. Эта процедура — аналог для двудольных графов хорошо известной процедуры Гавела переключения ребер в графах [6], позволяющий при вычислениях оставаться только в классе двудольных графов.

Два двудольных графа $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$ и $G_2 = (V_1, E_2, V_2)$ называются *согласованными*, если для любой вершины $v \in V = V_1 \cup V_2$ ее степени в G_1 и в G_2 совпадают.

Четверка различных вершин (a_1, a_2, b_1, b_2) двудольного графа $G = (V_1, E, V_2)$ называется двудольным 4-псевдоциклом (рис. 3а), если $a_1, b_1 \in V_1$, $a_2, b_2 \in V_2$ и $a_1a_2 \in E$, $a_2b_1 \notin E$, $b_1b_2 \in E$ и $b_2a_1 \notin E$. Отметим, что четверка вершин (a_1, a_2, b_2, b_1) не является двудольным 4-псевдоциклом (рис. 3б).

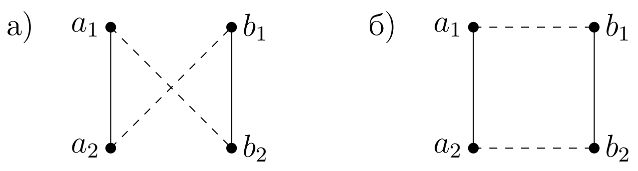

Рис. 3

Через $\xi = (a_1a_2, b_1b_2)$ обозначим операцию двудольного переключения ребер, при которой граф G преобразуется в граф $\xi G = G - a_1a_2 + a_2b_1 - b_1b_2 + b_2a_1$:

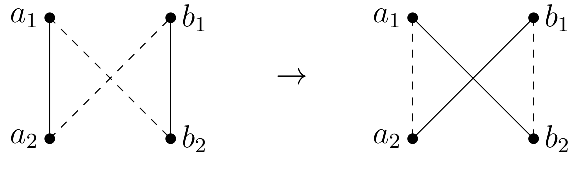

Рис. 4

Ясно, что граф ξG согласован с графом G, поскольку операция двудольного переключения ребер не меняет степеней вершин графа. Для операции ξ имеется обратная операция двудольного переключения ребер $\xi^{-1} = (a_2b_1, b_2a_1)$ графа ξG, для которой выполняется $\xi^{-1}\xi G = G$.

Лемма 3. *Пусть $G = (V_1, E, V_2)$ — двудольный граф, где $|V_1| = t$ и $|V_2| = s$,*

$$V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_t\} \text{ и } \mathrm{deg}v_1 = \lambda_1 \geq \mathrm{deg}v_2 = \lambda_2 \geq \dots \geq \mathrm{deg}v_t = \lambda_t,$$

$$V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_s\} \text{ и } \mathrm{deg}u_1 = \mu_1 \geq \mathrm{deg}u_2 = \mu_2 \geq \dots \geq \mathrm{deg}u_s = \mu_s.$$

Тогда существуют такая конечная последовательность операций двудольного переключения ребер $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ и двудольный граф $H = (V_1, E', V_2)$, для которого выполняется $H = \xi_t \dots \xi_2\xi_1 G$ и $N(v_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\lambda_1}\}$, $N(u_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\mu_1}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вершину v_1. Предположим, что для вершин u_i, u_j таких, что $1 \leq i < j \leq s$, справедливо $v_1u_i \notin E$ и $v_1u_j \in E$ (рис. 5а).

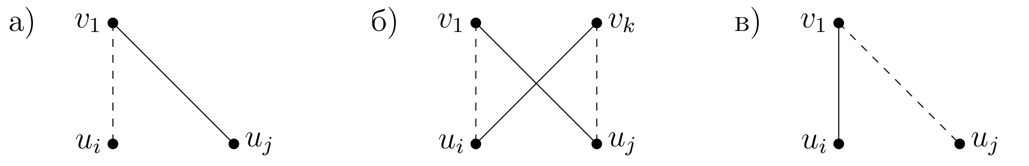

Рис. 5

Если каждая вершина из V_1, смежная с u_i, смежна и с u_j, то $\mu_j = \mathrm{deg}u_j \geq \mathrm{deg}u_i + 1 = \mu_i + 1$, что противоречит условию $\mu_i \geq \mu_j$. Поэтому существует вершина v_k такая, что $u_iv_k \in E$ и $v_ku_j \notin E$ (рис. 5б).

Следовательно, имеется двудольный 4-псевдоцикл (v_1, u_j, v_k, u_i). Совершая двудольное переключение ребер $\xi_1 = (v_1u_j, v_ku_i)$, в графе $\xi_1 G$ получим $v_1u_i \in E(\xi_1 G)$ и $v_1u_j \notin E(\xi_1 G)$ (см. рис. 5в, ребро v_1u_j графа G заменилось на ребро v_1u_i с индексом i, меньшим чем j).

Последовательно выполняя аналогичные двудольные переключения ребер, мы переходим от графа $G = (V_1, E, V_2)$ к графу $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$, для которого $N(v_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\lambda_1}\}$.

Далее, совершая аналогичные двудольные переключения ребер, начиная с графа G_1, относительно вершины u_1, мы перейдем к графу $H = (V_1, E', V_2)$, согласованному с исходным графом G, такому что в нем $N(u_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\mu_1}\}$. Поскольку вершина v_1 последними двудольными переключениями ребер не затрагивается, сохранится и условие $N(v_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\lambda_1}\}$.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Два двудольных графа $G_1 = (V_1, E_1, V_2)$ и $G_2 = (V_1, E_2, V_2)$ согласованы тогда и только тогда, когда G_1 можно получить из G_2 с помощью применения конечной последовательности операций двудольного переключения ребер.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условия теоремы очевидна.

Проверим его необходимость. Пусть

$$V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_t\} \text{ и } \mathrm{deg}_{G_1}(v_1) = \mathrm{deg}_{G_2}(v_1) = \lambda_1 \geq \dots \geq \mathrm{deg}_{G_1}(v_t) = \mathrm{deg}_{G_2}(v_t) = \lambda_t,$$

$$V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_s\} \text{ и } \mathrm{deg}_{G_1}(u_1) = \mathrm{deg}_{G_2}(u_1) = \mu_1 \geq \dots \geq \mathrm{deg}_{G_1}(u_s) = \mathrm{deg}_{G_2}(u_s) = \mu_s.$$

В силу леммы 3 существуют такой двудольный граф $H_1 = (V_1, E_1', V_2)$ и конечная последовательность операций двудольного переключения ребер $\xi_1, \dots, \xi_p$ такая, что $H_1 = \xi_p \dots \xi_1 G_1$ и $N_{H_1}(v_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\lambda_1}\}$, $N_{H_1}(u_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\mu_1}\}$.

Аналогично согласно лемме 3 существуют такой двудольный граф $H_2 = (V_1, E_2', V_2)$ и конечная последовательность операций двудольного переключения ребер $\eta_1, \dots, \eta_q$ такая, что $H_2 = \eta_q \dots \eta_1 G_2$ и выполняется $N_{H_2}(v_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_{\lambda_1}\}$, $N_{H_2}(u_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{\mu_1}\}$.

Ясно, что графы $H_1 - v_1 - u_1$ и $H_2 - v_1 - u_1$ согласованы. По предположению индукции существует такая последовательность операций двудольного переключения ребер $\tau_1, \ldots, \tau_k$, что $H_1 - v_1 - u_1 = \tau_k \ldots \tau_1(H_2 - v_1 - u_1)$. Последние переключения ребер не затрагивают ребер, инцидентных вершинам v_1 и u_1, поэтому, учитывая вид окрестностей вершин v_1 и u_1 в графах H_1 и H_2, выводим $H_1 = \tau_k \ldots \tau_1 H_2$. Отсюда следует

$$G_1 = \xi_1^{-1} \ldots \xi_p^{-1} H_1 = \xi_1^{-1} \ldots \xi_p^{-1} \tau_k \ldots \tau_1 H_2 = \xi_1^{-1} \ldots \xi_p^{-1} \tau_k \ldots \tau_1 \eta_q \ldots \eta_1 G_2.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $G_1 = (U_1, E_1, U_2)$ и $G_2 = (V_1, E_2, V_2)$ — два двудольных графа без изолированных вершин. Тогда G_1 и G_2 являются реализациями одной и той же пары разбиений (α, β) в том и только в том случае, когда граф G_1 изоморфен некоторому двудольному графу $H = (V_1, E, V_2)$, полученному из G_2 с помощью применения конечной последовательности операций двудольного переключения ребер.*

Доказательство. Достаточность условия утверждения очевидна. Проверим его необходимость. Пусть t и s — длины разбиений α и β соответственно. Упорядочим вершины в долях $U_1 = \{a_1, \ldots, a_t\}$, $U_2 = \{b_1, \ldots, b_s\}$, $V_1 = \{c_1, \ldots, c_t\}$, $V_2 = \{d_1, \ldots, d_s\}$ таким образом, чтобы выполнялись равенства $\deg_{G_1}(a_i) = \deg_{G_2}(c_i) = \alpha_i$ для любого $i = 1, \ldots, t$, $\deg_{G_1}(b_j) = \deg_{G_2}(d_j) = \beta_j$ для любого $j = 1, \ldots, s$.

Пусть φ — биекция множества $U = U_1 \cup U_2$ на множество $V = V_1 \cup V_2$ такая, что $\varphi(a_i) = c_i$ для любого $i = 1, \ldots, t$ и $\varphi(b_j) = d_j$ для любого $j = 1, \ldots, s$. Используя биекцию φ, рассмотрим двудольный граф $H = (V_1, E, V_2)$, для которого φ является изоморфизмом G_1 на H. Поскольку при изоморфизме степени вершин сохраняются, граф H согласован с графом G_2. Осталось воспользоваться теоремой 3.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2010. 368 с.
2. **Andrews G.E.** The theory of partitions. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 255 p.
3. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. 542 p. (Ser. Annals of Discr. Math.; vol. 56.)
4. **Баранский В.А., Королева Т.А., Сеньчонок Т.А.** О решетке разбиений всех натуральных чисел // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060
5. **Баранский В.А., Сеньчонок Т.А.** О кратчайших последовательностях элементарных преобразований в решетке разбиений натуральных чисел // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 844–852. doi: 10.17377/semi.2018.15.072
6. **Havel V.** A remark on the existence of finite graphs (in Czech) // Căsopic Pěst. Mat. 1955. Vol. 80, no. 4. P. 477–481.

Поступила 7.11.2022
После доработки 3.02.2023
Принята к публикации 6.02.2023

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна
канд. физ.-мат. наук

доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Asanov M.O., Baransky V.A., Rasin V.V. *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete Mathematics: graphs, matroids, algorithms]. SPb: Lan' Publ., 2010. 368 p.
2. Andrews G.E. *The theory of partitions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976. 255 p.
3. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold graphs and related topics*. Ser. Annals of Discr. Math., vol. 56, Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1995, 542 p.
4. Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A. On the partition lattice of all integers . *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 744–753 (in Rissian). doi: 10.17377/semi.2016.13.060
5. Baransky V.A., Senchonok T.A. On the shortest sequences of elementary transformations in the partition lattice. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 844–752 (in Rissian). doi: 10.17377/semi.2018.15.072
6. Havel V. A remark on the existence of finite graphs (in Czech), *Căsopic Pěst. Mat.*, 1955, vol. 80, no. 4, pp. 477–481.

Received November 7, 2022
Revised February 3, 2023
Accepted February 6, 2023

Vitaly Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru .

Tatiana Aleksandrovna Senchonok, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, 620000 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru .

Cite this article as: V. A. Baranskii, T. A. Sen'chonok. Bipartite-threshold graphs and lifting rotations of edges in bipartite graphs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 24–35 .