ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.958:533.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЕ ПЕРЕНОСОВ[1]

С. В. Хабиров

Модели сплошной среды допускают алгебру Ли группы из переносов, преобразований Галилея, вращений и растяжения. Для подалгебры разных размерностей строят подмодели. Для подалгебр размерностей 1, 2, 3 — это инвариантные подмодели. Для подалгебр размерности 4 возможны инвариантные решения, задаваемые конечными формулами, частично инвариантные подмодели, а также дифференциально инвариантные подмодели. Для уравнений газодинамического типа на примере четырехмерной подалгебры из переносов предлагается способ построения дифференциально инвариантных подмоделей минимального ранга. Для этого вычисляются базис дифференциальных инвариантов, операторы инвариантного дифференцирования. Выбираются независимые дифференциальные инварианты в силу уравнений модели и определяется простейшее представление нетривиального решения. Подстановка представления в уравнения модели дает переопределенную систему. Приведение в инволюцию происходит с помощью нахождения интегрируемых комбинаций и альтернативных предположений. В результате получены точные решения и подмодели из обыкновенных дифференциальных уравнений для пространственных, плоских и одномерных движений с линейным полем скоростей.

Ключевые слова: газовая динамика, дифференциально инвариантные решения, линейное поле скоростей, приведение в инволюцию.

S. V. Khabirov. Differentially invariant submodels of gas dynamics for the four-dimensional subalgebra of translations.

Continuum models admit a Lie algebra of the group containing translations, Galilean transformations, rotations, and dilatation. Submodels are constructed for subalgebras of different dimensions. For dimensions 1, 2, and 3, these are invariant submodels. For subalgebras of dimension 4, invariant solutions given by finite formulas, partially invariant submodels, and also differentially invariant submodels are possible. For equations of gas-dynamic type, using the example of a four-dimensional subalgebra of translations, a method is proposed for constructing differentially invariant submodels of minimal rank. For this, the basis of differential invariants and operators of invariant differentiation are calculated. Independent differential invariants are chosen by virtue of the model equations, and the simplest representation of a nontrivial solution is determined. Substitution of the representation into the model equations gives an overdetermined system. Reduction to involution occurs by finding integrable combinations and alternative assumptions. As a result, exact solutions and submodels with ordinary differential equations are obtained for spatial, plane, and one-dimensional motions with a linear velocity field.

Keywords: gas dynamics, differentially invariant solutions, linear velocity field, reduction to involution.

MSC: 35B06, 35Q35

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-190-201

Введение

Задачи группового анализа квазилинейной системы газодинамического типа поставлены и частично решены в [1; 2]. Беглый перечень результатов сделан автором в статье[2] 2021 г. Основная цель анализа дать исчерпывающий список точных решений и более простых систем уравнений из точных решений (подмодели) на основе алгебраических свойств исходной модели (допускаемой алгебры Ли). Решение проблемы затрудняется из-за сложности построения нерегулярных частично инвариантных и дифференциально инвариантных подмоделей

[1]Работа поддержана средствами госбюджета по госзаданию № 0246-2019-0052.

[2]Движение частиц газа, построенное по группе Галилея // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 173–187.

для подалгебр большой размерности. Имеет смысл рассматривать частные решения из выделенных классов. В работе описываются новые дифференциально инвариантные подмодели для четырехмерный подалгебры из пространственных переносов и Галилеева переноса. Дан исчерпывающий список подмоделей ранга 1 (одна независимая переменная — время) и дефекта 2 (две функции общего вида — давление и плотность). Независимые дифференциальные инварианты дают представление решений с линейным полем скоростей. Следовательно, такие решения справедливы для моделей сплошной среды с постоянной вязкостью. Получены решения в трехмерном, плоском и одномерном случаях.

1. Регулярные частично инвариантные решения

Уравнения газодинамического типа определяются законами сохранения импульса, массы и энергии [1]

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0,\\ &\varepsilon_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + p\rho^{-1}\nabla\cdot\vec{u} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Из термодинамического тождества $TdS = d\varepsilon + pd\rho^{-1}$ следует, что $\varepsilon = \varepsilon(S,\rho)$, $T = \varepsilon_S$, $p = \rho^{-2}\varepsilon_\rho$, и вместо последнего уравнения системы (1.1) можно взять уравнение

$$DS = S_t + \vec{u}\cdot\nabla S = 0 \tag{1.2}$$

или

$$Dp + A(p,\rho)\nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad A = \rho f_\rho, \quad p = f(\rho, S) = \rho^{-2}\varepsilon_\rho. \tag{1.3}$$

Замыкает систему (1.1) уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(S,\rho)$ или $p = f(\rho, S)$. Здесь p — давление, ρ — плотность, ε — внутренняя энергия, S — энтропия, T — температура.

Система (1.1), так же как и уравнения (1.2), (1.3), допускает 11-мерную алгебру Ли [1], базис которой в декартовой системе координат состоит из следующих операторов:

переносы по пространству $X_1 = \partial_x$, $\quad X_2 = \partial_y$, $\quad X_3 = \partial_z$;
галилеевы переносы $X_4 = t\partial_x + \partial_u$, $\quad X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $\quad X_6 = t\partial_z + \partial_w$;
вращения $X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v$, $\quad X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w$,
$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u$;
перенос по времени $X_{10} = \partial_t$,
равномерное растяжение $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$.

Далее для простоты вычислений подмоделей мы будем пользоваться всеми приведенными уравнениями.

Любое решение системы (1.1) переводится преобразованиями представленных операторов снова в решения. Поэтому решения будем рассматривать с точностью до этих преобразований. Если вместо энтропии взять произвольную функцию от энтропии, то уравнения не изменятся. Меняется только уравнение состояния. Далее уравнения состояния записываем с точностью до этого преобразования эквивалентности.

По любой подалгебре можно строить подмодели. Для этого вычисляют базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования. Сначала продолжают на производные операторы из базиса подалгебры. Затем находят инварианты нулевого, первого и, быть может, второго порядка. Это функционально независимые выражения, которые аннулируются продолженными операторами. Порядок инварианта определяется порядком производных, входящих в него. Инварианты выше нулевого порядка определяют операторы инвариантного дифференцирования, если они получаются из инвариантов нулевого или первого порядков. Инварианты, не выводимые с помощью операторов инвариантного дифференцирования, образуют базис функционально независимых инвариантов. Если некоторое число инвариантов базиса назначить новыми функциями других, то получим представление решений подмодели. Представлений конечное число, при этом некоторые искомые функции могут быть общего вида. В зависимости от того, какие инварианты выбраны в качестве новых независимых переменных, получаются инвариантные, частично инвариантные или дифференциально инвариантные подмодели [3].

В качестве примера рассмотрим четырехмерную подалгебру из переносов $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Если переменные в системе (1.1) обозначить как $t = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$; $u = u^1$, $v = u^2$, $w = u^3$, $\rho = u^4$, $p = u^5$, то продолженный оператор вычисляется по формуле [2]

$$X = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^k \partial_{u^k} + (D_i \eta^k - u^k_j D_i \xi^j) \partial_{u^k_i} + \dots ,$$

где операторы полного дифференцирования $D_i = \partial_{x^i} + u^k_i \partial_{u^k} + \dots$. Для нашей подалгебры продолжается лишь последний оператор

$$X_4 = x^0 \partial_{x^1} + \partial_{u^1} - u^k_{x^1} \partial_{u^k_{x^0}}.$$

Инвариантами подалгебры являются x^0, u^2, u^3, u^4, u^5, $u^k_{x^1}$, $u^k_{x^2}$, $u^k_{x^3}$, $u^k_{x^0} + u^1 u^k_{x^1}$. Инварианты, содержащие производные с $k = 2, 3, 4, 5$ выводятся из инвариантов u^k при помощи операторов инвариантного дифференцирования D_x, D_y, D_z, $D_t + uD_x$. Следовательно, базис дифференциальных инвариантов таков:

$$t, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad p, \quad u_x, \quad u_y, \quad u_z, \quad u_t + u u_x.$$

Последний инвариант зависит от предыдущих в силу системы (1.1), поэтому его исключаем из базиса. Если инварианты, не содержащие производных (нулевой порядок), но содержащие значения функций, назначить новыми функциями, зависящими от инварианта t, а функцию $u(t, \vec{x})$ считать общей функцией, то получим представление регулярного частично инвариантного решения ранга 1 дефект 1 [4]. Подстановка представления в систему (1.1), где вместо уравнения энергии взято уравнение для энтропии, дает

$$u_t + u u_x + v u_y + w u_z = 0, \quad v_t = 0, \quad w_t = 0, \quad \rho_t + \rho u_x = 0, \quad S_t = 0.$$

С точностью до преобразований, порождаемых алгеброй, приходим к решениям с любым уравнением состояния

$$v = w = 0, \quad S = S_0, \quad p = f(\rho, S_0); \quad \rho = \rho_0, \quad u = \varphi(y, z),$$

или

$$\rho = \rho_0 t^{-1}, \quad u = t^{-1}(x + \varphi(y, z)),$$

где ρ_0, S_0 — постоянные, $\varphi(y, z)$ — произвольная функция. Для первого решения частицы двигаются по прямым $x = t\varphi(y_0, z_0) + x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, параллельным оси x с постоянной скоростью.

Для второго решения частицы двигаются по прямым $x = u_0 t - \varphi(y_0, z_0)$, $y = y_0$, $z = z_0$, параллельным оси x с постоянной, каждая со своей скоростью u_0, коллапсируя на поверхность $x_0 = -\varphi(y_0, z_0)$ при $t = 0$. При $t > 0$ происходит мгновенный источник с поверхности коллапса.

2. Дифференциально инвариантные решения ранга 1 дефекта 2

Если все дифференциальные инварианты базиса кроме последнего, исключенного в силу системы, содержащие функции, назначить новыми функциями инварианта t, то получим частный случай рассмотренного частично инвариантного решения. Если функции $\rho(t, \vec{x})$, $p(t, \vec{x})$ — общего вида, то получим обобщения $v(t)$, $w(t)$, $u_x = u_1(t)$, $u_y = u_2(t)$, $u_z = u_3(t)$, которые можно назвать дифференциально инвариантным решением ранга 1 дефекта 2. По терминологии работы [2] частично инвариантные решения для нашей подалгебры бывают ранга 3 дефекта 3, когда v, w — функции переменных t, ρ, p, а функции u, ρ, p — общего вида. Отсюда следует представление $u = u_1x + u_2y + u_3z + u_0(t)$. Подстановка представления в уравнение импульса системы (1.1) дает

$$p_y = -\rho v', \quad p_z = -\rho w', \quad p_x = -\rho q,$$
$$q = (u_1' + u_1^2)x + (u_2' + u_1u_2)y + (u_3' + u_1u_3)z + \mu,$$
$$u_0' + u_1u_0 + vu_2 + wu_3 = \mu.$$

Совместность приводит к равенствам при $v' \neq 0$, $w' \neq 0$:

$$w'p_y = v'p_z, \quad w'\rho_y = v'\rho_z \Rightarrow p(t, x, I), \quad \rho(t, x, I), \quad I = v'y + w'z, \quad p_I = -\rho \neq 0,$$
$$p_x = p_Iq, \quad q = (u_1' + u_1^2)x + (u_2' + u_1u_2)\frac{1}{v'}(I - w'z) + (u_3' + u_1u_3)z + \mu.$$

В последнем уравнении переменная z свободная. Приравнивая к нулю коэффициенты (расщепление по z), выводим

$$u_2' + u_1u_2 = \lambda(t)v', \quad u_3' + u_1u_3 = \lambda(t)w', \quad p(t, J), \quad \rho = -p_Je^{\lambda x},$$
$$J = \begin{cases} e^{\lambda x}(I + \mu\lambda^{-1} + \lambda^{-1}(u_1' + u_1^2)(x - \lambda^{-1})), & \lambda \neq 0, \\ I + \frac{1}{2}(u_1' + u_1^2)x^2 + \mu x, & \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Уравнение (1.3), записанное в переменных t, x, I, имеет свободную переменную z. После расщепления приходим к уравнению $(v'u_3 - w'u_2)p_x + (v'w'' - w'v'')p_I = 0$, которое имеет свободные переменные x и I. Расщепление приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} (v'u_3 - w'u_2)(u_1' + u_1^2) = 0, \quad (v'u_3 - w'u_2)\lambda = 0, \\ (v'u_3 - w'u_2)\mu + v'w'' - w'v'' = 0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

которые позволяют сделать альтернативные предположения.

2.1. Предположим, что $v'u_3 - w'u_2 \neq 0$. Тогда с точностью до переноса по времени из (2.1) и (2.2) следуют

$$u_1 = t^{-1}, \quad \lambda = 0, \quad u_2 = C_2t^{-1}, \quad u_3 = C_3t^{-1}, \quad J = I + \mu x,$$
$$\mu = u_0' + t^{-1}(u_0 + C_2v + C_3w) = t\frac{v'w'' - w'v''}{C_2w' - C_3v'}, \quad \rho = -p_J \neq 0.$$

Здесь и далее через C и C_i обозначены постоянные.

Уравнение сохранения массы системы (1.1) и уравнению (1.3) в переменных t, J содержит свободную переменную x. Расщепление приводит к равенствам

$$\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{t} - \frac{v''}{v'} = \frac{C_2}{tv'}\mu \Rightarrow \mu = \frac{v'}{M_0t + C_2}, \quad \frac{w'}{v'} = \frac{C_4t}{M_0t + C_2} + \frac{C_3}{C_2}, \quad C_4 \neq 0;$$
$$tp_J = P'(J_1), \quad J_1 = \frac{J}{t\mu} - \int\Big(\frac{u_0}{t} + \frac{vv' + ww'}{t\mu}\Big)dt \Rightarrow p = \mu P(J_1) + p_0(t),$$
$$tp_0' + t\mu'\frac{p - p_0}{\mu} + A(p, \rho) = 0 \Rightarrow A = Np + N_0, \quad t\mu' + N\mu = 0, \quad tp_0' + Np_0 + N_0 = 0.$$

Здесь и далее N, N_0, M, M_0 — постоянные.

Отсюда получаем подмодель

$$
\begin{gathered}
u_0' + t^{-1}(u_0 + C_2 v + C_3 w) = M t^{-N} = \mu, \\
v' = M t^{-N}(M_0 t + C_2), \quad w' = M t^{-N}((C_4 + C_3 M_0 C_2^{-1})t + C_3), \\
p = M t^{-N} P(J_1) + p_0(t), \quad \rho = -t^{-1} P'(J_1), \quad p_0 = \begin{cases} C_5 t^{-N} - N_0 N^{-1}, & N \neq 0, \\ -N_0 \ln|t| + C_5, & N = 0. \end{cases} \\
J_1 = t^{-1} x + (M_0 + C_2 t^{-1}) y + (C_4 + C_3 M_0 C_2^{-1} + C_3 t^{-1}) z \\
- \int (u_0 t^{-1} + v(M_0 + C_2 t^{-1}) + w(C_4 + C_3 M_0 C_2^{-1} + C_3 t^{-1})) dt,
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

для уравнения состояния $p = S\rho^N - \dfrac{N_0}{N}$ при $N \neq 0$ или $p = N_0 \ln \rho + S$ при $N = 0$.

2.2. В случае $u_2 w' = u_3 v'$ из (2.2) следует, что $w' = Cv' \Rightarrow w = Cv$, $u_3 = Cu_2$, $I = v'(y + Cz)$, $\mu = u_0' + u_1 u_0 + v u_2(1 + C^2)$ с точностью до галилеева переноса.

2.2.1. Сначала предположим

$$
\lambda \neq 0, \quad u_2' + u_1 u_2 = \lambda v' \Rightarrow u_2 \neq 0. \tag{2.4}
$$

Уравнение сохранения массы системы (1.1) в переменных t, J содержит свободную переменную x. Расщепление приводит к равенствам

$$
\begin{gathered}
p_J + J p_{JJ} = 0 \Rightarrow p = \nu(t) \ln|J| + p_0(t), \quad \rho = -\nu J^{-1} e^{\lambda x} \neq 0, \\
\frac{\nu'}{\nu} + u_1 = \frac{v''}{v'} + \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda} \frac{u_2}{v'}, \\
\Big(\frac{u_1' + u_1^2}{\lambda}\Big)' + \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda}\Big(u_1 - \frac{u_2}{v'} \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda}\Big) = \frac{v''}{v'} \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda} \Rightarrow u_1' + u_1^2 = C_0 \lambda \nu, \\
\Big(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda^2}\Big)' + \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda}\Big(u_0 - \frac{u_2}{v'}\Big(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda^2}\Big)\Big) = \frac{v''}{v'}\Big(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{u_1' + u_1^2}{\lambda^2}\Big) - v v'(1 + C^2).
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

В силу интеграла (2.5) остальные уравнения принимают вид

$$
\frac{\nu'}{\nu} + u_1 = \frac{v''}{v'} + C_0 \nu \frac{u_2}{v'}, \tag{2.6}
$$

$$
\frac{\mu' - C_0 \nu'}{\lambda} + C_0 \nu u_0 = \frac{\mu - C_0 \nu}{\lambda}\Big(\frac{\nu'}{\nu} + u_1 + \frac{\lambda'}{\lambda}\Big) - (1 + C^2) v v'. \tag{2.7}
$$

Уравнение (1.3) в переменных t, J в силу (2.5)–(2.7) записывается как

$$
\begin{gathered}
p_0' + \frac{\nu'}{\nu}(p - p_0) + \nu' + \nu\Big(u_1 + \lambda u_0 - \frac{u_2}{v'}(\mu - C_0 \nu)\Big) \\
+ \nu\Big(\ln \rho - \ln|\nu| + \frac{p - p_0}{\nu}\Big)\Big(\frac{\lambda'}{\lambda} + u_1 - \frac{C_0 \nu u_2}{v'}\Big) - \frac{\nu^2}{\rho} \frac{u_2 \lambda}{v'} + u_1 A(p, \rho) = 0.
\end{gathered}
$$

Здесь t, ρ, p — независимые переменные. Коэффициенты при p, $\ln \rho$, ρ^{-1} пропорциональны u_1 с постоянными множителями

$$
\begin{gathered}
A(p, \rho) = Np + N_{-1} \rho^{-1} + N_l \ln \rho + N_0, \quad N_i \text{ — постоянные}, \\
\nu^2 \lambda u_2 = N_{-1} u_1 v' \Rightarrow N_{-1} \neq 0, \quad u_1 \neq 0,
\end{gathered} \tag{2.8}
$$

$$
\frac{\lambda'}{\lambda} + u_1 - C_0' \nu \frac{u_2}{v'} + N_l u_1 \nu^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{(\lambda v')'}{\lambda v'} + N u_1 = 0, \tag{2.9}
$$

$$\frac{\nu'}{\nu}+\frac{\lambda'}{\lambda}+u_1-C_0\nu\frac{u_2}{v'}+Nu_1=0\Rightarrow\nu'=(N_l-N\nu)u_1, \tag{2.10}$$

$$p_0'+Nu_1p_0+u_1(N_0+N_l+(1-N)\nu-N_{-1}\frac{\mu-C_0\nu}{\lambda\nu^2}+N_l\ln|\nu|)=0. \tag{2.11}$$

Получили переопределенную систему (2.4)–(2.6), (2.8)–(2.11).

Исключим u_2 и v'' с помощью (2.8) и (2.9)

$$\frac{(\lambda\nu)'}{\lambda\nu}=u_1\Big(\frac{C_0N_{-1}}{\lambda\nu}-N-1\Big),\quad u_1'+u_1^2=C_0\lambda\nu,$$

$$\lambda\nu(\lambda\nu-N_{-1}C_0)=N_{-1}u_1\Big(-Nu_1-2\frac{(\lambda\nu)'}{\lambda\nu}\Big).$$

Отсюда, выводим два конечных соотношения при условии $\lambda\nu\neq\mathrm{const}$:

$$(\lambda\nu)^2(\lambda\nu-C_0N_{-1})=N_{-1}u_1^2((N+2)\lambda\nu-2C_0N_{-1}),$$

$$\lambda\nu\big(3(N+1)(\lambda\nu)^2-C_0N_{-1}\lambda\nu-2(C_0N_{-1})^2\big)=N_{-1}u_1^2\big((N+2)(N+3)\lambda\nu-(N+6)C_0N_{-1}\big).$$

Первое уравнение — результат исключения производной из первого и третьего равенств. Его дифференциал дает линейное однородное уравнение на дифференциалы $d(\lambda\nu)$, u_1du_1. Исключая dt из первого и второго равенств, имеем еще одно линейное однородное уравнение на те же дифференциалы. Обнуление определителя из коэффициентов дает второе равенство. Исключая величину $N_{-1}u_1^2$, получим алгебраическое уравнение на переменную величину $\lambda\nu$

$$\lambda\nu(\lambda\nu-C_0N_{-1})((N+2)(N+3)\lambda\nu-(N+6)C_0N_{-1})$$
$$=\big(3(N+1)(\lambda\nu)^2-C_0N_{-1}\lambda\nu-2C_0N_{-1}\big)((N+2)\lambda\nu-2C_0N_{-1}).$$

Приравнивая нулю коэффициенты, получим подмодель

$$N(N+2)=0,\quad C_0=0,\quad u_1=\frac{1}{t},$$

$$(\lambda\nu)^2=N_{-1}t^{-2}(N+2),\quad(\lambda\nu)'=-t^{-1}(N+1)\lambda\nu\Rightarrow N=0,\quad\lambda\nu=C_4t^{-1},\quad C_4^2=2N_{-1}>0,$$

$$\begin{gathered}u_2=\frac{1}{2}C_5t,\quad v'=C_5\lambda^{-1},\quad\nu=N_l\ln|t|+C_6,\\ p_0'+t^{-1}\big(N_0+N_l+\nu+N_l\ln|\nu|-N_{-1}C_4^{-1}t\nu^{-1}\mu\big)=0,\\ u_0'+t^{-1}u_0+\frac{1}{2}C_5(1+C^2)tv=C_5\Big(C_7-(1+C^2)\int vdt\Big)=\mu,\end{gathered} \tag{2.12}$$

где C_i — постоянные, с уравнением состояния

$$p=f(\rho,S)=S-\frac{N_{-1}}{\rho}+\frac{1}{2}N_l(\ln\rho)^2+N_0\ln\rho. \tag{2.13}$$

Если $\lambda\nu=C_4\neq0$, то

$$C_0N_{-1}=(N+1)C_4,\quad N(N_{-1}u_1^2-C_4^2)=0,$$

$$u_1'+u_1^2=C_0C_4=\pm\alpha^2\Rightarrow N=0,\quad C_4=C_0N_{-1};\quad u_1=\begin{cases}-\alpha\mathrm{tg}(\alpha t), & N_{-1}<0,\\ \alpha\mathrm{th}(\alpha t), & N_{-1}>0.\end{cases}$$

Подмодель состоит из уравнений

$$\begin{gathered}\nu'=N_lu_1,\quad u_2C_4^2=N_{-1}C_5u_1,\quad v'=C_5C_4^{-1}\nu,\\ \mu'+C_0C_4u_0=u_1(\mu-C_0\nu+C_0N_l)-(1+C^2)C_5v,\\ p_0'+u_1(N_0+N_l+1+\nu-C_0^{-1}\nu^{-1}\mu+N_l\ln|\nu|)=0,\\ u_0'+u_1u_0+vu_2(1+C^2)=\mu.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Уравнение состояния (2.13) при $N_l > 0$, $N_{-1} < 0$ в области между корнями уравнений $f_\rho = 0$ и $f_{\rho\rho} = 0$ соответствует нормальному газу ($f > 0, f_\rho > 0, f_{\rho\rho} > 0$) [1].

2.2.2. Рассмотрим случай, альтернативный предыдущему:

$$\lambda = 0, \quad u_2 = C_2 e^{-\int u_1 dt}, \quad \rho = -p_J(t, J), \quad J = I + \frac{1}{2}(u_1' + u_1^2)x^2 + \mu x.$$

Уравнение (1.3), записанное в переменных t, J, содержит свободную переменную x. Расщепление приводит к равенствам

$$\begin{gathered} u_2(u_1' + u_1^2) = 0 \Rightarrow C_0 C_2 = 0, \\ (u_1' + u_1^2)' + \Big(2u_1 - \frac{v''}{v'}\Big)(u_1' + u_1^2) = 0 \Rightarrow u_1' + u_1^2 = C_0 v' e^{-2\int u_1 dt}, \\ \mu' + u_0(u_1' + u_1^2) + \Big(u_1 - \frac{u_2}{v'}\mu\Big)\mu = \frac{v''}{v'}\mu, \\ p_t + (J\bar{v} + \bar{\mu})p_J + u_1 A(p, \rho) = 0, \quad \bar{v} = \frac{u_2}{v'}\mu + \frac{v''}{v'}, \quad \bar{\mu} = u_0\mu + vv'(1 + C^2). \end{gathered} \tag{2.15}$$

Уравнение для плотности системы (1.1) в переменных t, J принимает вид

$$p_{tJ} + (J\bar{v} + \bar{\mu})p_{JJ} + u_1 p_J = 0 \Rightarrow -\rho = p_J = g'(J_1), \quad J_1 = Je^{-\int \bar{v}} - \int (\bar{\mu}\bar{e}^{-\int \bar{v}}).$$

Отсюда и из (2.15) следует

$$\begin{gathered} p = p_0(t) + g(J_1)\exp\int(\bar{v} - u_1)dt, \\ p_0' + (p - p_0)(\bar{v} - u_1) + u_1 A(p, \rho) = 0 \Rightarrow A = \rho f_\rho = Np + N_0 = Nf + N_0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Уравнение состояния должно иметь вид

$$Np + N_0 = S\rho^N \quad \text{при} \quad N \neq 0 \quad \text{и} \quad p = N_0 \ln\rho + S \quad \text{при} \quad N = 0.$$

Расщепление по свободной переменной t в (2.16) дает

$$\begin{gathered} \frac{u_2}{v'}\mu + \frac{v''}{v'} = u_1(1 - N), \\ p_0' + u_1(Np + N_0) = 0 \Rightarrow Np_0 + N_0 = C_4 e^{-N\int u_1} \quad (N \neq 0), \quad p_0 = -N_0\int u_1 + C_4 \quad (N = 0). \end{gathered}$$

Получили замкнутую интегрируемую подмодель

$$\begin{gathered} u_0' + u_1 u_0 = \mu - v(1 + C^2)C_2 e^{-\int u_1}, \quad u_1' + u_1^2 = C_0 v' e^{-2\int u_1}, \quad C_0 C_2 = 0, \\ \mu' + Nu_1\mu = -u_0 C_0 v' e^{-2\int u_1}, \quad v'' + \mu C_2 e^{-\int u_1} = (1 - N)u_1 v'. \end{gathered} \tag{2.17}$$

При $C_0 \neq 0$ имеем

$$\begin{gathered} u_2 = 0, \quad v' = C_5 e^{(1-N)\int u_1} \neq 0, \\ u_0' + u_1 u_0 = \mu, \quad \mu' + Nu_1\mu = -u_0 C_0 C_5 e^{(1-N)\int u_1}, \quad u_1' + u_1^2 = C_0 C_5 e^{-(N+1)\int u_1}. \end{gathered}$$

При $C_0 = 0$ имеем

$$\begin{gathered} u_1 = t^{-1}, \quad u_2 = C_2 t^{-1}, \quad \mu = C_5 t^{-N}, \\ v' = C_6 t^{1-N} + C_2 C_5 t^{-N}, \quad u_0' + t^{-1}u_0 = \mu + C_2(1 + C^2)t^{-1}v. \end{gathered}$$

3. Плоские и одномерные дифференциально инвариантные решения

В предыдущем разделе предполагалось, что $v' \neq 0$, $w' \neq 0$. Пусть $v' \neq 0$, $w' = 0$, тогда с точностью до галилеевого переноса

$$w = 0, \quad p_z = 0, \quad p_y = -\rho v' \neq 0, \quad p_x = -\rho q,$$

$$q = (u_1' + u_1^2)x + (u_2' + uu_2)y + (u_3' + uu_3)z + \mu; \quad \mu = u_0' + u_1u_0 + vu_2.$$

Отсюда следует

$$\rho_z = 0, \quad u_3' + u_1u_3 = 0, \quad \rho_x v' = \rho_y q + \rho(u_2' + u_1u_2). \tag{3.1}$$

Уравнение для плотности системы (1.1) и уравнение (1.3) расщепляются по переменной z:

$$\begin{gathered} u_3\rho_x = 0, \quad u_3p_x = 0, \\ \rho_t + (u_1x + u_2y + u_0)\rho_x + v\rho_y + \rho u_1 = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Если $q = 0$, то $u_1 = \dfrac{1}{t}$, $u_2 = \dfrac{C_2}{t}$, $u_3 = \dfrac{C_3}{t}$, $u_0 = -\dfrac{C_2}{t}\displaystyle\int v$;

$$p_x = 0, \quad p_y = -\rho v' \Rightarrow \rho_x = 0.$$

Из (3.1) определяются

$$\rho = \frac{1}{t}R'(y_1), \quad y_1 = y - \int v, \quad p = -\frac{v'}{t}R(y_1) + p_0(t).$$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$tp_0' + \Big(\ln\frac{v'}{t}\Big)'(p - p_0) + A(p,\rho) = 0 \Rightarrow A = Np + N_0 \Rightarrow p = S\rho^N - \frac{N_0}{N}.$$

Расщепление по переменной p приводит к интегрируемой подмодели

$$v' = C_0t|t|^{-N}, \quad tp_0' + Np_0 + N_0 = 0. \tag{3.3}$$

Пусть $q \neq 0$. Тогда $p_x \neq 0$ и из (3.2) следует

$$u_3 = 0, \quad \rho = e^{-\int u_1}R(y_1, J), \quad y_1 = y - \int v,$$

$$J = xe^{-\int u_1} - y\int u_2e^{-\int u_1} - \int u_0e^{-\int u_1} + \int v\int u_2e^{-\int u_1}.$$

Получаем решение плоской газовой динамики.

Соотношение (3.1) запишем в виде

$$\Big(v'e^{-\int u} + q\int u_2e^{-\int u_1}\Big)R_J = qR_{y_1} + (u_2' + u_1u_2)R, \tag{3.4}$$

где

$$q = (u_1' + u_1^2)e^{\int u_1}\Big(J + y_1\int u_2e^{-\int u_1} + \int u_0e^{-\int u_1} + \int\Big(u_2\int ve^{-\int u_1}\Big)\Big).$$

Коэффициенты в уравнении (3.4) зависят от t и пропорциональны с постоянными множителями

$$\int u_2e^{-\int u_1} = K_0 \Rightarrow u_2 = 0, \quad q = (u_1' + u_1^2)x + u_0' + u_1u_o,$$

$$J + K_0y_1 = xe^{-\int u_1} - \int u_0e^{\int u_1} = J_1,$$

$$u_1' + u_1^2 = K_1v'e^{-2\int u_1}, \quad u_0' + u_1u_0 = \Big(K_2 - K_1\int u_0e^{-\int u_1}\Big)v'e^{-\int u_1}.$$

Уравнение (3.4) интегрируется

$$R = G'(J_2), \quad J_2 = y_1 + \frac{1}{2}K_1 J_1^2 + K_2 J_1 \Rightarrow p = -v' e^{-\int u_1} G(J_2) + p_0(t).$$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$p_0' + (\ln v' - u_1)'(p - p_0) + u_1 A(p, \rho) = 0 \Rightarrow A = Np + N_0.$$

Расщепляя по переменной p, получим подмодель

$$\begin{gathered} v' = e^{(1-N)\int u_1}, \quad p_0' + u_1(p_0 N + N_0) = 0, \\ u_1' + u_1^2 = K_1 e^{-(N+1)\int u_1}, \quad u_0' + u_1 u_0 = e^{-N\int u_1}\Big(K_2 - K_1 \int u_0 e^{-\int u_1}\Big). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Теорема 1. *Система* (3.5) *задает решения уравнений* (1.1) *двумерной газовой динамики с уравнением состояния* $p = S\rho^N - N_0 N^{-1}$. □

Пусть $v' = w' = 0$. Тогда можно считать $v = w = 0$, $p_y = p_z = 0$, $p_x = -\rho q$, $q = \bar{u}_1 x + \bar{u}_2 y + \bar{u}_3 z + \bar{u}_0$, $\bar{u}_i = u_i' + u_1 u_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Уравнения для плотности и энтропии (1.2) имеют общее решение

$$\begin{gathered} S = S(y, z, I), \quad \rho = e^{\int u_1} R(y, z, I), \\ I = x e^{-\int u_1} - y \int u_2 e^{-\int u_1} - z \int u_3 e^{-\int u_1} - \int u_0 e^{-\int u_1}. \end{gathered}$$

Если $q = 0$, то

$$\begin{gathered} u_1 = t^{-1}, \quad u_i = C_i t^{-1}, \quad i = 0, 2, 3, \quad p_x = 0 \Rightarrow p = P(t), \\ u = t^{-1}(x + C_2 y + C_3 z + C_0), \quad \rho = t^{-1} R(y, z, u), \quad S = S(y, z, u). \end{gathered}$$

С помощью обратной функции $u = U(y, z, S)$ уравнение состояния запишем в виде

$$P(t) = f(t^{-1}\tilde{R}(y, z, S), S) \Rightarrow \tilde{R}_y = \tilde{R}_z = 0, \quad \rho \tilde{=} t^{-1} S.$$

Отсюда уравнение состояния должно описываться как $p = F(S\rho^{-1})$, а решение таково:

$$u = t^{-1}(x + C_2 y + C_3 z + C_0), \quad p = F(t), \quad v = w = 0, \quad \rho = t^{-1} S, \tag{3.6}$$

$S = S(y, z, u)$ — произвольная функция.

Рассмотрим случай $q \neq 0$. Уравнение для плотности $\rho = -q^{-1} p_x(t, x)$, $\ln|p_x| = r(t, x)$,

$$\begin{gathered} \big[r_t + u_1 + r_x(u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_0)\big]\big(\bar{u}_1 x + \bar{u}_2 y + \bar{u}_3 z + \bar{u}_0\big) \\ = (\bar{u}_1' + \bar{u}_1 u_1)x + (\bar{u}_2' + \bar{u}_1 u_2)y + (\bar{u}_3' + \bar{u}_1 u_3)z + \bar{u}_0' + \bar{u}_1 u_0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

расщепляем по y, z. Возможна альтернатива.

3.1. $\bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2 \neq 0 \Rightarrow r_x = 0 \Rightarrow p = P(t)x + p_o(t)$, $\rho = -P(t)q^{-1} \neq 0$.

Уравнение (3.7) расщепляем по x, y, z

$$\begin{gathered} (P'P^{-1} + u_1)\bar{u}_i = \bar{u}_i' + \bar{u}_1 u_i \Rightarrow \bar{u}_1 = C_1 P, \\ \bar{u}_i = P e^{\int u_1}\Big(C_i - C_1 \int u_i e^{-\int u_1}\Big), \quad i = 0, 2, 3, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где C_i — постоянные.

Если в уравнении (1.3) вместо x ввести переменную p, а вместо y — переменную ρ, то переменная z будет свободной. Расщепление приводит к равенству

$$k(t) = u_2\Big(C_2 - C_1\int u_2 e^{-\int u_1}\Big)^{-1} = u_3\Big(C_3 - C_1\int u_3 e^{-\int u_1}\Big)^{-1}$$
$$\Rightarrow k \neq 0, \quad u_3 = Cu_2, \quad C_3 = CC_2, \quad C_2 \neq 0.$$

Уравнение (1.3) записывается в виде

$$(P'P^{-1} + u_1 - kC_1e^{-\int u_1})(p - p_0) - Pke^{-\int u_1}\rho^{-1} + p_0' + Pu_0 - Pk\Big(C_0 - C_1\int u_0e^{-\int u_1}\Big)$$
$$+ u_1A(p,\rho) = 0 \Rightarrow A = Np + N_{-1}\rho^{-1} + N_0.$$

Коэффициенты, зависящие от t, должны быть пропорциональны с постоянными множителями, что задает переопределенную подмодель

$$P'P^{-1} + u_1 - kC_1e^{-\int u_1} + Nu_1 = 0, \quad Pke^{-\int u_1} = N_{-1}u_1 \Rightarrow N_{-1} \neq 0, \quad u_1 \neq 0,$$
$$p_0' + Pu_0 - N_{-1}u_1e^{\int u_1}\Big(C_0 - C_1\int u_0e^{-\int u_1}\Big) + p_0Nu_1 + N_0u_1 = 0.$$

Из этих равенств и из (3.8) следует переопределенная система

$$\begin{gathered}
Pu_2 = N_{-1}u_1e^{\int u_1}\Big(C_2 - C_1\int u_2e^{-\int u_1}\Big),\\
N_{-1}u_1(u_2' + u_1u_2) = P^2u_2,\\
P'P^{-1} = -u_1(N + 1 - C_1N_{-1}P^{-1}),\\
u_1' + u_1^2 = C_1P,\\
N_{-1}(2C_1N_{-1} - (N+2)P)u_1^2 + P(P - C_1N_{-1}) = 0.
\end{gathered}\tag{3.9}$$

Исключая dt из третьего и четвертого равенств и заменяя u_1^2, в силу пятого равенства при $dP \neq 0$ получим алгебраическое уравнение

$$\big[(2P - C_1N_{-1})((N+2)P - 2C_1N_{-1}) - (N+2)P(P - C_1N_{-1})\big]((N+1)P - C_1N_{-1})$$
$$+ 2CN_{-1}P((N+2)P - 2C_1N_{-1})^2 - 2P(P - C_1N_{-1})((N+2)P - 2C_1N_{-1}) = 0.$$

Обнуляя коэффициенты, имеем $C_1 = 0$, $(N+2)(N-1) = 0$. Из (3.9) вытекает

$$N = 1, \quad u_1 = t^{-1}, \quad P = 3N_{-1}t^{-2}, \quad u_2 = \frac{1}{3}C_2t^2,$$
$$u_2' + u_1u_2 = C_2tP \Rightarrow C_2 = 0; \text{ противоречие.}$$

Если P — постоянная, то получается подмодель при $N = 0$,

$$\begin{gathered}
u_1' + u_1^2 = C_1^2N_{-1}, \quad P = C_1N_{-1}, \quad C_1 \neq 0, \quad u_2 = Ku_1,\\
u_0' + u_1u_0 = C_1N_{-1}e^{\int u_1}\Big(C_0 - C_1\int u_0e^{-\int u_1}\Big),\\
p_0' + u_1\left(N_0 - N_{-1}e^{\int u_1}\Big(C_0 - C_1\int u_0e^{-\int u_1}\Big)\right) = 0
\end{gathered}\tag{3.10}$$

для уравнения состояния $p = N_0\ln\rho - N_{-1}\rho^{-1} + \mathrm{const}$.

3.2. $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0 \Rightarrow \rho = -p_x(t,x)(\bar{u}_1 x + \bar{u}_0)^{-1}$.
Уравнение для плотности содержит свободные переменные y, z.
Расщепление приводит к равенствам

$$(u_2 y + u_3 z)\rho_x = 0, \quad \rho_t + (u_1 x + u_0)\rho_x + u_1\rho = 0.$$

Если $u_2 y + u_3 z \neq 0$, то

$$\rho = \rho(t), \quad p = -\rho\Big(\frac{1}{2}\bar{u}_1 x^2 + \bar{u}_0 x\Big) + p_0(t), \quad \rho = Ce^{-\int u_1} \neq 0.$$

Из уравнения (1.2) и уравнения состояния следует, что энтропия постоянна. Тогда уравнение состояния задает тождество

$$p_0(t) - Ce^{-\int u_1}\Big(\frac{1}{2}\bar{u}_1 x^2 + \bar{u}_0 x\Big) = f(Ce^{-\int u_1}, S_0).$$

Расщепление по x приводит к противоречию

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0 = 0 \Rightarrow q = 0.$$

Остается предположить $u_2 = u_3 = 0$. Это одномерная газовая динамика [1]. Уравнения для плотности и энтропии (1.2) имеют общее решение

$$S = S(I), \quad \rho = e^{-\int u_1} R''(I), \quad I = xe^{-\int u_1} - \int u_0 e^{-\int u_1}.$$

Вместо x введем переменное I, тогда определим давление и уравнение состояния запишем в виде

$$p = -\bar{u}_1 e^{\int u_1}(IR' - R) - \Big(\bar{u}_1 e^{\int u_1}\int u_0 e^{-\int u_1} + \bar{u}_0\Big)R' + p_0(t) = f(e^{-\int u_1}R'', S(I)). \tag{3.11}$$

Из этого равенства следует утверждение

Теорема 2. *Для любых гладких функций $p_0(t)$, $u_0(t)$, $u_1(t)$, $S(I)$, $R(I)$ найдется $f(\rho, S)$, что они определяют решение уравнений* (1.1) *с уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.* □

Если функция f задана, то коэффициенты, зависящие от t, в уравнении (3.11) пропорциональны с постоянными множителями, а функция f степенная по первому аргументу $f(\rho, S) = S\rho^\gamma$ (политропный газ). Получаем интегрируемую подмодель

$$\bar{u}_1 e^{\int u_1} = F_1 e^{-\gamma\int u_1}, \quad \bar{u}_1 e^{\int u_1}\int u_0 e^{-\int u_1} + \bar{u}_0 = F_2 e^{-\gamma\int u_1},$$
$$p_0 = F_0 e^{-\gamma\int u_1}, \quad F_1(R - IR') - F_2 R' + F_0 = S(R'')^\gamma.$$

Таким образом, из вычислений настоящего пункта следует утверждение.

Теорема 3. *Решение одномерных уравнений движения политропного газа с линейным полем скоростей определяется интегрируемой подмоделью*

$$u_1'' + (\gamma+3)u_1 u_1' + (\gamma+1)u_1^3 = 0,$$
$$u_0'' + u_1 u_0' + 2u_1' u_0 + u_1^2 = 0.$$ □

Проделанные вычисления позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. *Пространственные дифференциально инвариантные решения ранга* 1 *дефекта* 2 *уравнений газодинамического типа* (1.1) *на подалгебре переносов $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ имеют линейное поле скоростей и задаются подмоделями* (2.3) *из п.* 2.1, (2.12) *и* (2.14) *из п.* 2.2.1, (2.17) *из п.* 2.2.2, (3.3) *и* (3.6) *из п.* 3, (3.10) *из п.* 3.1. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
2. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
3. **Хабиров С.В.** Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
4. **Овсянников Л.В., Чупахин А.П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Приклад. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.

Поступила 30.05.2022
После доработки 28.09.2022
Принята к публикации 3.10.2022

Хабиров Салават Валеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН
г. Уфа
e-mail: habirov@anrb.ru

REFERENCES

1. Ovsyannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki [Lectures on the fundamentels of gas dynamics]. Moskva, Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy Publ., 2003. 336 p.
2. Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. NY: Acad. Press, 1982. 416 p. doi: 10.1016/C2013-0-07470-1 . Original Russian text published in L. V. Ovsyannikov Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii. Moscow: Nauka Publ., 1978.
3. Khabirov S.V. Classification of differential invariant submodels. *Siberian Math. J.*, 2004, vol. 45, pp. 562–579. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf
4. Ovsyannikov L.V. Regular partially invariant submodels of the equations of gas dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, no. 6, pp. 969–978. doi: 10.1016/S0021-8928(96)00119-0

Received May 30, 2022
Revised September 28, 2022
Accepted October 3, 2022

Funding Agency: The work was supported by the state budget under state contract no. 0246-2019-0052.

Salavat Valeevich Khabirov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Mavlyutov Institute of Mechanics - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia, e-mail: habirov@anrb.ru .

Cite this article as: S. V. Khabirov. Differentially invariant submodels of gas dynamics for the four-dimensional subalgebra of translations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 190–201 .