ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.925

НУЛИ РЕШЕНИЙ L—A-ПАР ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Б. И. Сулейманов

Изучается вопрос о виде кривых $x=\varphi(t)$ нулей совместных решений L—A-пары общего вида, образуемой эволюционным уравнением $\Psi'_t=\Psi''_{xx}/2-G(t,x)\Psi$ и обыкновенным диференциальным уравнением $\Psi'''_{xxx}=K(t,x)\Psi''_{xx}+L(t,x)\Psi'_x+M(t,x)\Psi$. Показано, что эти кривые задаются решениями нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $\varphi''_{tt}=f(t,\varphi,\varphi'_t)$. Его правая часть $f(t,\varphi,\varphi'_t)$ представляет собой кубический полином по производной φ'_t с коэффициентами, явно определяемыми функциями $G(t,x)$, $K(t,x)$, $L(t,x)$ и $M(t,x)$. Описана процедура интегрирования этого нелинейного уравнения. Она сводится к последовательному решению начальных задач для двух совместных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с независимыми переменными x и t с последующим применением теоремы о неявной функции. Установлено, что данное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение принадлежит линеаризуемому классу уравнений, которые точечными заменами сводятся к уравнению $\tilde{\varphi}''_{\tilde{t}\tilde{t}}=0$. Данные точечные замены, как было показано в классической работе С. Ли, явным образом выписываются в терминах совместных решений двух однородных систем линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с разными независимыми переменными. Проводится сравнение процедур интегрирования нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описанных в работе С. Ли и в данной статье. Отмечено, что интерес представляет задача описания нулей совместных решений аналогичных L—A-пар более высокого порядка. Выдвинуто предположение о том, что решение последней задачи может быть связано с процедурой интегрирования линеаризуемых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка большего, чем второй.

Ключевые слова: интегрируемость, совместные решения, обыкновенные дифференциальные уравнения, нелинейность, точечные замены, линеаризуемость.

B. I. Suleimanov. Zeros of solutions of third-order L–A pairs and linearizable ordinary differential equations.

We study the form of the zero lines $x=\varphi(t)$ of simultaneous solutions to an L–A pair of general form composed of an evolution equation $\Psi'_t=\Psi''_{xx}/2-G(t,x)\Psi$ and an ordinary differential equation $\Psi'''_{xxx}=K(t,x)\Psi''_{xx}+L(t,x)\Psi'_x+M(t,x)\Psi$. It is shown that such lines are given by solutions of a second-order nonlinear ordinary differential equation $\varphi''_{tt}=f(t,\varphi,\varphi'_t)$. Its right-hand side $f(t,\varphi,\varphi'_t)$ is a cubic polynomial in the derivative φ'_t with coefficients explicitly determined from the functions $G(t,x)$, $K(t,x)$, $L(t,x)$, and $M(t,x)$. A procedure for integrating this nonlinear equation is described; in this procedure, initial value problems for two consistent third-order linear ordinary differential equations with independent variables x and t are solved successively, and then the implicit function theorem is applied. It is established that this nonlinear ordinary differential equation belongs to the linearizable class of equations that are reduced by point changes to the equation $\tilde{\varphi}''_{\tilde{t}\tilde{t}}=0$. These point changes, as was shown in S. Lie's classical work, are explicitly written in terms of simultaneous solutions of two homogeneous systems of third-order linear differential equations with different independent variables. The integration procedures for nonlinear ordinary differential equations described in Lie's work and in the present paper are compared. It is noted that the problem of describing the zeros of simultaneous solutions of similar L–A pairs of higher order is of interest. It is conjectured that the solution of this problem can be connected with an integration procedure for linearizable nonlinear ordinary differential equations of order greater than the second.

Keywords: integrability, simultaneous solutions, ordinary differential equations, nonlinearity, point changes, linearizability.

MSC: 34A25, 34A34

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-180-189

К 70-летию дорогого А. Р. Данилина

1. Введение

Условием совместности эволюционного уравнения

$$\Psi'_t=\frac{\Psi''_{xx}}{2}-G(t,x)\Psi \tag{1.1}$$

и линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка

$$\Psi'''_{xxx} = K(t,x)\Psi''_{xx} + L(t,x)\Psi'_x + M(t,x)\Psi \tag{1.2}$$

является удовлетворение функциями $K(t,x)$, $L(t,x)$ и $M(t,x)$ следующей эволюционной системе:

$$K'_t = \frac{K''_{xx}}{2} + KK'_x + L'_x - 3G'_x, \tag{1.3}$$

$$L'_t = \frac{L''_{xx}}{2} + LK'_x + M'_x + 2KG'_x - 3G''_{xx}, \tag{1.4}$$

$$M'_t = \frac{M''_{xx}}{2} + MK'_x + LG'_x + KG''_{xx} - G'''_{xxx}. \tag{1.5}$$

Выполнение соотношений (1.3)–(1.5) в окрестности точки $(t_0, x_0) \in \mathbf{C}^2$, в которой функции $K(t,x)$, $L(t,x)$, $M(t,x)$ и $G(t,x)$ бесконечно дифференцируемы (аналитичны), гарантирует существование в некоторой окрестности этой точки бесконечно дифференцируемого (соответственно, аналитического) совместного решения $\Psi(t,x)$ эволюционного уравнения (1.1) и ОДУ (1.2), — решения, удовлетворяющего при произвольных комплексных постоянных a, b и c условиям

$$\Psi(t_0,x_0) = a, \quad \Psi'_x(t_0,x_0) = b, \quad \Psi''_{xx}(t_0,x_0) = c. \tag{1.6}$$

Это следует, например, из справедливости более общих утверждений, которые были сформулированы и доказаны как для бесконечно дифференцируемого [1, Sect. 3.1], так и для аналитического случая [2, Theorem 1]. Отметим, что оба этих доказательства, в сущности, годятся и в бесконечно дифференцируемой, и в аналитической ситуациях. (Доказательство из [2] замкнуто в себе и проще по сравнению с более ранним доказательством из [1], сводящимся в итоге к применению классической теоремы Фробениуса.)

В ситуации общего положения система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W'_x = UW \tag{1.7}$$

локально эквивалентна линейному однородному скалярному ОДУ. Поэтому так называемая L—A-пара — переопределенная система линейных ОДУ, которая состоит из системы (1.7) и системы

$$W'_t = VW$$

с матрицами $U't,x)$ и $V(t,x)$, удовлетворяющими условиям коммутирования

$$U'_t - V'_x = [V,U] = VU - UV,$$

— в случае 3×3 матриц $U(t,X)$ и $V(t,x)$ локально эквивалентна системе уравнений (1.1), (1.2) с коэффициентами — решениями уравнений совместности (1.3)–(1.5). По причине данной эквивалентности совместная система (1.1), (1.2) может рассматриваться как форма записи общей L—A-пары третьего порядка.

П р и м е р 1. Система эволюционных уравнений

$$G'_t = V'_x, \quad V'_t = GG'_x - \frac{G'''_{xxx}}{12}, \tag{1.8}$$

в виде которой может быть записано уравнение Бусинеска

$$G''_{tt} = GG''_{xx} + (G'_x)^2 - \frac{G''''_{xxxx}}{12}, \tag{1.9}$$

есть условие совместности L—A-пары. Данную пару составляют эволюционное уравнение (1.1) и линейное ОДУ

$$\Psi'''_{xxx} = 3G(t,x)\Psi'_x + 3\Big(V(t,x) + \frac{G'_x(t,x)+k}{2}\Big)\Psi, \tag{1.10}$$

зависящее от спектрального параметра k. Указанная L—A-пара позволяет исследовать решения системы (1.8) методом обратной задачи рассеяния (ОЗР), при том даже, что для решений (1.8) общего положения совместные решения системы (1.1), (1.10) не допускают явной записи в квадратурах или в терминах интегралов типа Фурье — Лапласа. Такой явной записи нет даже в случае элементарного частного решения уравнения Буссинеска (1.9)

$$G(t,x) = xt + \frac{t^4}{12}, \tag{1.11}$$

для которого за счет произвольности параметра k можно считать, что вторая компонента $V(t,x)$ системы (1.8) имеет вид

$$V(t,x) = \frac{x^2}{2} + \frac{xt^3}{3} + \frac{t^6}{72}. \tag{1.12}$$

Действительно, после применения преобразования Фурье — Лапласа ОДУ (1.10) с коэффициентами (1.11), (1.12) переходит в линейное ОДУ

$$\frac{3W''_{\zeta\zeta}}{2} + (t^3 - 3t\zeta)W'_{\zeta} + \Big(\zeta^3 - \frac{t^4\zeta}{4} + \frac{3k-3t}{2} + \frac{t^6}{24}\Big)W = 0,$$

которое после замен

$$\lambda = \zeta - \frac{t^2}{2}, \quad W = \exp\Big(\frac{t\lambda^2}{2} + \frac{t^3\lambda}{6} + \frac{t^5}{30}\Big)\Lambda$$

сводится к неинтегрируемому при $k \neq 0$ ОДУ

$$\frac{3\Lambda''_{\zeta\zeta}}{2} + \Big(\zeta^3 + \frac{3k}{2}\Big)\Lambda = 0. \tag{1.13}$$

(Эволюционное же уравнение (1.1) с коэффициентом (1.11) при этом переходит в тривиальное уравнение $\Lambda_t = 0$.) Заметим, что при $k = 0$ общее решение ОДУ (1.13) все же может быть выписано в терминах функции Бесселя.

L—A-пары с такой структурой позволяют интегрировать методом ОЗР и ряд других нелинейных эволюционных уравнений, к числу которых принадлежат, например, известные уравнения Цицейки — Жибера — Шабата

$$u''_{xt} = \exp(u) - \exp(-2u),$$

Каупа — Купершмидта

$$u'_t = u'''''_{xxxxx} + 10u'''_{xxx}u + 25u''_{xx}u'_x + 20u^2u'_x$$

и Савады — Котеры

$$u'_t = u'''''_{xxxxx} - 30uu'''_{xxx} - 30u''_{xx}u'_x + 180u^2u'_x.$$

Но следующие два примера показывают, что имеются и совместные пары уравнений (1.1), (1.2), не связанные с решениями такого сорта интегрируемых методом ОЗР уравнений.

П р и м е р 2. Простыми растяжениями к такой паре сводится L—A-пара, состоящая из уравнения теплопроводности

$$\Psi'_{\tau} = \Psi''_{yy} \tag{1.14}$$

и линейного ОДУ третьего порядка

$$8\Psi'''_{yyy} - 2t\Psi'_y + y\Psi = 0. \tag{1.15}$$

Ясно, что совместное общее решение данной пары может быть найдено применением преобразования Фурье — Лапласа по независимой переменной y. В частности, к числу совместных решений пары (1.14), (1.15) принадлежит [3] модификация классического интеграла Пирси

$$\Lambda(\tau, y) = \int\limits_R \exp\Big(-\frac{4\lambda y - 2t\lambda^2 + \lambda^4}{8}\Big)d\lambda.$$

(Логарифмическая производная данного интеграла задает специальное решение $\Gamma(\tau, y) = -2[\ln\Lambda(\tau, y)]'_y$ уравнения Бюргерса

$$\Gamma'_\tau + \Gamma\Gamma'_y = \Gamma''_{yy}, \tag{1.16}$$

которое впервые было представлено в [4]. Данное специальное решение уравнения Бюргерса универсальным образом описывает влияние малой диссипации на процессы образования одномерных ударных волн [5, гл. VI, § 4; 6].)

Пример 3. L—A-пара, состоящая из уравнения теплопроводности (1.14) и линейного ОДУ

$$\Psi'''_{yyy} = 2t\Psi'_y + y\Psi'_y + \Psi.$$

Ее совместные решения также находятся в результате применения преобразования Фурье — Лапласа по переменной y. Частным совместным решением данной пары является интеграл

$$\Lambda(\tau, y) = \int\limits_0^\infty \exp\Big(\frac{\lambda y + t\lambda^2 - \lambda^3}{3}\Big)d\lambda.$$

Формулой Коула — Хопфа $\Gamma(\tau, y) = -2[\ln\Lambda(\tau, y)]'_y$ этот интеграл задает специальное решение уравнения Бюргерса (1.16), которое универсальным образом описывает поправочное влияние малой диссипации на процессы трансформации слабых разрывов решений системы уравнений идеальной газовой динамики в их сильные разрывы [7–10].

Замечание 1. Как видно из доказательства [2, Theorem 1], в случае глобальной бесконечной дифференцируемости (аналитичности) функций $G(t, x)$, $K(t, x)$, $L(t, x)$ и $M(t, x)$, удовлетворяющих соотношениям (1.3)–(1.5), глобально бесконечно дифференцируемыми (соответственно, аналитическими) будут и совместные решения L—A-пар (1.1), (1.2).

В настоящей статье изучается вопрос о кривых $x = \varphi(t)$, на которых совместное решение общей L—A-пары вида (1.1), (1.2) обращается в нуль.

2. Кривые нулей совместных решений уравнений (1.1) и (1.2)

Рассмотрим совместные решения уравнений (1.1) и (1.2), которые удовлетворяют условию (1.6) с постоянными $a = 0$ и $b \neq 0$. Тогда в силу теоремы о неявной функции в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) определена бесконечно дифференцируемая (соответственно аналитическая) функция $x = \varphi(t)$, на которой данное совместное решение тождественно равно нулю. Ряд Тейлора при $x \to \varphi(t)$ этого совместного решения

$$\Psi(t, x) = \Psi_1(t)(x - \varphi(t)) + \frac{\Psi_2(t)}{2}(x - \varphi(t))^2 + \sum_{j=3}^{\infty}\frac{\Psi_j(t)}{j!}(x - \varphi(t))^j \tag{2.1}$$

при подстановке в линейное ОДУ (1.2) дает следующие связи между его коэффициентами:

$$\Psi_3(t) = K(t, \varphi(t))\Psi_2(t) + L(t, \varphi(t))\Psi_1(t), \tag{2.2}$$

$$\Psi_4(t) = K(t, \varphi(t))\Psi_3(t) + \big[K'_x(t, \varphi(t)) + L(t, \varphi(t))\big]\Psi_2(t) + \big[L'_x(t, \varphi(t)) + M(t, \varphi(t))\big]\Psi_1(t). \tag{2.3}$$

Подстановкой же данного ряда в эволюционное уравнение (1.1) получаем соотношения

$$\Psi_2(t) = -2\varphi'(t)\Psi_1(t), \tag{2.4}$$

$$\Psi_3(t) = 2(\Psi_1)'(t) + \big[4(\varphi'(t))^2 + 2G(t,\varphi(t))\big]\Psi_1(t), \tag{2.5}$$

$$\Psi_4(t) = -8\varphi'(t)(\Psi_1)'(t) + \big[-4\varphi''(t) - 8(\varphi'(t))^3 - 8\varphi'(t)G(t,\varphi(t)) + 4G'_x(t,\varphi(t))\big]\Psi_1(t). \tag{2.6}$$

Подстановка (2.4) в правую часть (2.2) позволяет выразить $\Psi_3(t)$ через коэффициент $\Psi_1(t)$ формулой

$$\Psi_3(t) = [-2\varphi'(t)K(t,\varphi(t)) + L(t,\varphi(t))]\Psi_1(t). \tag{2.7}$$

Сравнение ее с формулой (2.5) приводит к выводу о том, что коэффициент $\Psi_1(t)$ ряда Тейлора (2.1) есть решение линейного ОДУ первого порядка

$$(\Psi_1)' = \Big[-2\varphi'(t)^2 - \varphi'(t)K(t,\varphi(t)) - \frac{L(t,\varphi(t))}{2} + G(t,\varphi(t))\Big]\Psi_1. \tag{2.8}$$

Поэтому в силу второго из условий (1.6) данный коэффициент имеет вид

$$\Psi_1(t) = b\exp\Big[-\int\limits_{t_0}^{t}(2\varphi'(\tau)^2 + \varphi'(\tau)K(\tau,\varphi(\tau)) - \frac{L(\tau,\varphi(\tau))}{2} + G(\tau,\varphi(\tau))d\tau)\Big], \tag{2.9}$$

где, напомним, постоянная b отлична от нуля.

Результат замены в правой части соотношения (2.6) производной $(\Psi_1)'(t)$ на правую часть дифференциального уравнения (2.8) запишем как

$$\Psi_4(t) = \big[-4\varphi''(t) + 8(\varphi'(t))^3 + 8(\varphi'(t))^2K(t,\varphi(t)) - 4\varphi'(t)L(t,\varphi(t)) + 4G'_x(t,\varphi(t))\big]\Psi_1(t). \tag{2.10}$$

С другой стороны, подстановка в правую часть соотношения (2.3) вместо $\Psi_2(t)$ и $\Psi_3(t)$ правых частей равенств (2.4) и (2.7) приводит к формуле

$$\begin{aligned}\Psi_4(t) = \big[&-2\varphi'(t)(K'_x(t,\varphi(t)) + K^2(t,\varphi(t)) + L(t,\varphi(t)))\\ &+ L'_x(t,\varphi(t)) + K(t,\varphi(t))L(t,\varphi(t)) + M(t,\varphi(t))\big]\Psi_1(t).\end{aligned} \tag{2.11}$$

В силу нетривиальности функции (2.9) из одновременной справедливости равенств (2.10) и (2.11) с необходимостью вытекает то, что функция $\varphi(t)$ есть решение нелинейного ОДУ второго порядка

$$\begin{aligned}\varphi'' = 2(\varphi')^3 + 2K(t,\varphi)(\varphi')^2 + \frac{1}{2}\big[K'_x(t,\varphi) + K^2(t,\varphi) - L(t,\varphi) + G'_x(t,\varphi)\big]\varphi'\\ - \frac{1}{4}\big[L'_x(t,\varphi) + K(t,\varphi)L(t,\varphi) + M(t,\varphi)\big].\end{aligned} \tag{2.12}$$

Из двух последних условий (1.6) и соотношения (2.4) следует, что это решение $\varphi(t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \varphi'(t_0) = -\frac{c}{2b}. \tag{2.13}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть в некоторой окрестности точки* $(t_0, x_0) \in \boldsymbol{C}^2$ *функции* $G(t,x)$, $K(t,x)$, $L(t,x)$ *и* $M(t,x)$ *суть аналитические решения системы нелинейных эволюционных уравнений* (1.3)–(1.5). *Рассмотрим при достаточно малых значениях* $|t-t_0|+|x-x_0|$ *аналитическое совместное решение* $\Psi(t,x)$ *эволюционного уравнения* (1.1) *и линейного* ОДУ (1.2), *которое удовлетворяет условиям* (1.6) *с произвольными комплексными постоянными* $a = 0$, $b \neq 0$ *и* c. *Тогда из точки* (t_0, x_0) *выходит кривая нулей* $x = \varphi(t)$ *данного совместного решения* $\Psi(t,x)$, *которая задается аналитическим при достаточно малых значениях* $|t-t_0|$ *решением нелинейного* ОДУ (2.12), *удовлетворяющего начальному условию* (2.13).

З а м е ч а н и е 2. При замене в формулировке данной теореме слов “аналитические”, “аналитическое”, “аналитическим” соответственно на выражения “бесконечно дифференцируемые”, “бесконечно дифференцируемое” и “бесконечно дифференцируемым” также получается доказанное утверждение.

Совместное решение Ψ уравнений (1.1) и линейного ОДУ (1.2) совокупно с его двумя первыми производными Ψ'_x и Ψ''_{xx} по переменной x внутри своих областей аналитичности (бесконечной дифференцируемости) при любом фиксированном x, очевидно, задает также решение следующей 3×3 системы линейных ОДУ по независимой переменной t:

$$\begin{aligned}
\Psi'_t \ &= \frac{\Psi''_{xx}}{2} - G(t,x)\Psi, \\
(\Psi'_x)'_t \ &= \frac{1}{2}[K(t,x)\Psi''_{xx} + L(t,x)\Psi'_x + M(t,x)\Psi] - G(t,x)\Psi'_x - G'_x(t,x)\Psi, \\
(\Psi''_{xx})'_t &= \left[\frac{1}{2}(K'_x(t,x) + K^2(t,x) + L(t,x)) - G(t,x)\right]\Psi''_{xx} \\
&+ \left[\frac{1}{2}(L'_x(t,x) + K(t,x)L(t,x) + M(t,x)) - 2G'_x(t,x)\right]\Psi'_x \\
&+ \left[\frac{1}{2}(L'_x(t,x) + K(t,x)M(t,x)) - G''_{xx}(t,x)\right]\Psi.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Поэтому в предположении о том, что коэффициенты нелинейного ОДУ (2.12) таковы, что в окрестности точки $(t = t_0, x = x_0 = \varphi_0)$ справедливо сказанное в первом предложении формулировки теоремы 1, задача поиска решений данного нелинейного ОДУ, удовлетворяющих произвольным начальным данным

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \varphi'(t_0) = \varphi_1, \tag{2.15}$$

сводится к следующей последовательности действий:

1) решение при $t = t_0$ задачи Коши для *линейного* ОДУ третьего порядка (1.2) с начальными данными

$$\Psi(t_0, \varphi_0) = 0, \quad \Psi'_x(t_0, \varphi_0) = b \neq 0, \quad \Psi''_{xx}(t_0, \varphi_0) = -2\varphi_1 b,$$

где ненулевая постоянная b может быть выбрана произвольно;

2) поиск при x принадлежащих некоторой окрестности точки $x = x_0$ решений 3×3 систем *линейных* ОДУ (2.14) по независимой t, начальные данные для которых в момент $t = t_0$ задаются решениями $\Psi(t_0, x)$ задачи Коши из п. 1) ;

3) применение (в области ее применимости) теоремы о неявной функции для задания по найденному в пп. 1) и 2) совместному решению $\Psi(t, x)$ эволюционного уравнения (1.1) и ОДУ (1.2) кривой $x = \varphi(t)$, которая исходит из точки $(t = t_0, x = \varphi_0)$ и на которой $\Psi(t, x) = 0$.

3. Точечная эквивалентность ОДУ (2.12) уравнению $\tilde{\varphi}''_{\tilde{t}\tilde{t}} = 0$

Класс ОДУ вида

$$\varphi'' = f_3(t,\varphi)(\varphi')^3 + f_2(t,\varphi)(\varphi')^2 + f_1(t,\varphi)\varphi' + f_0(t,\varphi), \tag{3.1}$$

к которым принадлежит ОДУ (2.12), замкнут относительно точечных замен $\tilde{t} = \tilde{t}(t, \varphi)$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(t, \varphi)$. А. Трессе в работах [11; 12] выписал необходимые и достаточные условия, при которых ОДУ вида (3.1) такими заменами сводятся к тривиально интегрируемому линейному ОДУ

$$\tilde{\varphi}''_{\tilde{t}\tilde{t}} = 0. \tag{3.2}$$

Эти условия формулируются как требование обращения в нуль двух функций

$$F_1 = 3(f_0)''_{\varphi\varphi} - 2(f_1)''_{t\varphi} + (f_2)''_{tt} + 3f_3(f_0)'_t - 3f_2(f_0)'_\varphi + 2f_1(f_1)'_\varphi - f_1(f_2)'_t - 3f_0(f_2)'_\varphi + 6f_0(f_3)'_t$$

и

$$F_2=3(f_3)''_{tt}-2(f_2)''_{t\varphi}+(f_1)''_{\varphi\varphi}-3f_0(f_3)'_{\varphi}+3f_1(f_3)'_t-2f_2(f_2)'_t+f_2(f_1)'_{\varphi}+3f_3(f_1)'_t-6f_3(f_0)'_{\varphi}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что при условии справедливости для функций $G(t,x)$, $K(t,x)$, $L(t,x)$ и $M(t,x)$ соотношений (1.3)–(1.5) для коэффициентов ОДУ (2.12) обе эти функции тождественно равны нулю. И значит, существуют точечные замены переменных, которые это ОДУ сводят к виду (3.2).

Однако сами эти точечные замены, как было установлено С. Ли [13, S. 375] еще до процитированных работ А. Трессе (являющегося учеником С. Ли), явно задаются лишь в терминах общих совместных решений двух систем линейных ОДУ третьего порядка с переменными коэффициентами — системы

$$\begin{gathered} u'_t=\frac{2f_1}{3}u+f_0v+(-(f_0)'_{\varphi}+f_0f_2)w,\\ v'_t=-\frac{f_1}{3}u+\Big[-f_0f_3+\frac{(f_1)'_{\varphi}}{3}-\frac{2(f_2)'_t}{3}\Big]w,\\ w'_t=-u-\frac{f_1}{3}w, \end{gathered}\tag{3.3}$$

и системы

$$\begin{gathered} u'_{\varphi}=\frac{f_2}{3}u+\Big[\frac{(f_2)'_t}{3}-\frac{2(f_1)'_{\varphi}}{3}+f_0f_3\Big]w,\\ v'_{\varphi}=-f_3u-\frac{2f_2}{3}v-((f_3)'_t+f_1f_3)w,\\ w'_{\varphi}=v+\frac{f_2}{3}w. \end{gathered}\tag{3.4}$$

Заметим далее, что при $f_3\neq 0$ точечной заменой

$$\tilde\varphi=a(t,\varphi)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\sqrt{\frac{f_3(t,x)}{2}}dx$$

ОДУ (3.1) сводится к случаю с $f_3(t)=2$. Если же $f_3=0$, но $f_0\neq 0$, то точечная замена годографа

$$\tilde\varphi=t,\quad \tilde t=\varphi$$

переводит его в ОДУ вида (3.1) с отличным от нуля коэффициентом f_3. Таким образом, оставляя в стороне сильно вырожденный случай $f_3=f_0=0$, можно без ограничения общности считать, что у остальных ОДУ второго порядка, которые точечными заменами сводятся к виду (3.2), коэффициент f_3 тождественно равен 2.

При выполнении же равенства $f_3=2$ из L—A-пары (3.3), (3.4) следует, что компонента ее решения w одновременно удовлетворяет эволюционному уравнению

$$w'_t=\frac{w''_{\varphi\varphi}}{2}+\frac{f_2w'_{\varphi}}{6}+\Big[-\frac{(f_2)'_{\varphi}}{6}-\frac{(f_2)^2}{9}+\frac{2f_1}{3}\Big]w$$

и линейному ОДУ

$$w'''_{\varphi\varphi\varphi}=\Big[\frac{(f_2)^2}{3}-2f_1\Big]w'_{\varphi}+\Big[\frac{(f_2)''_{\varphi\varphi}}{3}+\frac{f_2(f_2)'_{\varphi}}{3}-\frac{2(f_2)^3}{27}+\frac{2}{3}(f_1f_2-(f_1)'_{\varphi}-(f_2)'_t)-4f_0\Big]w.$$

В свою очередь, замена $w=\exp\Big[-\Big(\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}f_2(t,y)dy\Big)/6\Big]\Psi$ (φ_* — произвольная постоянная) переводит эту компоненту в совместное решение L—A-пары (1.1), (1.2) с независимой переменной $x=\varphi$ и коэффициентами

$$G(t,x)=-2f_1(t,x)+\frac{3(f_2)'_x(t,x)}{4}+\frac{3(f_2(t,x))^2}{8}-\int\limits_{\varphi_*}^{x}\Big(\frac{(f_2)'_t(t,y)}{2}\Big)dy,$$

$$K(t,x) = \frac{f_2(t,x)}{2}, \quad L(t,x) = \frac{(f_2)'_x(t,x)}{2} + \frac{(f_2(t,x))^2)}{4} - 2f_1(t,x), \tag{3.5}$$

$$M(t,x) = \frac{((f_2)'_x(t,x) + (f_2(t,x))^2)'_x}{2} - \frac{(f_2(t,x))^3}{72}$$

$$+ f_1(t,x)f_2(t,x) - \frac{2}{3}((f_1)'_t(t,x) + (f_2)'_t(t,x)) - 4f_0(t,x).$$

Так что из [13] и результатов разд. 2 данной работы следует, что множество ОДУ (3.1) с $f_3(t) = 2$, точечно эквивалентных тривиальному уравнению (3.2), в точности соответствует множеству всех L—A-пар третьего порядка, записанных в виде пары уравнений (1.1), (1.2). При этом

1) согласно процедуре, описанной в [13], для определения общего решения такого ОДУ (3.1) нужно найти *общее* совместное решении ОДУ (1.2) и 3×3 системы (2.14) с коэффициентами, задаваемыми формулам (3.5);

2) для процедуры же решения задачи Коши (2.12), (2.15) (см. разд. 2) достаточно информации о совместном решении *конкретных* начальных задач для ОДУ (1.2) и (2.14) только *около кривых нулей* данного совместного решения.

Заключение

В статье мы подробно остановлись лишь на одном аспекте проблемы о связи кривых на t, x — плоскости, определяемых совместными решениями $\Psi(t,x)$ L—A-пар, с решеними нелинейных ОДУ. Но актуальными представляются и другие стороны этого вопроса. В частности, весьма вероятно, что в терминах решений нелинейных ОДУ порядка выше второго описываются кривые нулей совместных решений $\Psi(t,x)$ эволюционных уравнений (1.1) и линейных ОДУ вида

$$\Psi^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} K_j(t,x)\Psi^{(k)}$$

(под $\Psi^{(k)}$ в этой записи подразумевается k-я производная Ψ по переменной x) с $n > 3$ общего вида.

В случае справедливости этого предположения было бы интересно также попытаться выявить возможность линеаризуемости таких нелинейных ОДУ в духе процедур, представленных, например, в работах [14–17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachev V.V., Rodionov A.A.** Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics. Dordrecht: Kluwer, 1998. 396 p. (Math. and Its Appl.; vol. 450).
2. **Domrin A.V., Shumkin M.A., Suleimanov B.I.** Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type // J. Math. Physics. 2022. Vol. 63. Article no. 023501. doi: 10.1063/5.0075416
3. **Kudashev V.R.** KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equation symmetries [e-resource]. 1994. URL: https://arxiv.org/pdf/patt-sol/9404002.pdf.
4. **Ligthill M.J.** Viscosity effects in sound waves of finite amplitude // Surveys in Mechanics / eds. G.K. Batchelor & R.M. Davies. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956. P 250–351.
5. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. **Сулейманов Б.И., Кудашев В.Р.** Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 456–466.
7. **Захаров С.В., Ильин А.М.** От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 3–18.
8. **Zakharov S.V., Il'in A.M.** *On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities* // Func. Diff. Eq. 2001. Vol. 8, no. 3-4. P. 257–271.

9. **Захаров С.В.** Зарождение ударной волны в одной задаче Коши для уравнения Бюргерса // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т 44, № 3. С. 536–542.
10. **Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И.** От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам // Журн. эксперимент. и теорет. физики. 2010. Т. 137, вып. 1. С. 149–165.
11. **Tresse A.** Sur les invariants diff'erentielles des groupes continus de transformations // Acta Math. 1984. Vol. 18, no. 1. P. 1–88. doi: 10.1007/BF02418270
12. **Tresse A.** D'etermination des invariants ponctuels de l'equation diff'erentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Lepzig, S. Hirkei, 1896. S. 87.
13. **Lie S.** Classifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III // Archiv for Matematik og Naturvidenskab. 1883. B. VIII, N. 4. S. 371–458.
14. **Дмитриева В.В.** Точечно-инвариантные классы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 2. С. 195–200.
15. **Bocharov A.V., Sokolov V.V., Svinolupov S.I.** On some equivalence problems for differential equations. Preprint Erwin Schrodinger Institute forMathematical Physics, preprint no. 54. Vienna, 1993. 12 p.
16. **Euler N., Wolf T., Leach P.G., Euler M.** Linearizable third-order ordinary differential equations and generalized Sundman transformations: The Case $X''' = 0$ // Acta Appl. Math. 2003. Vol. 76, no. 1. P. 89–115.
17. **Suksern S., Naboonmee K.** Linearization of Fifth-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations // Int. J. Diff. Eq. 2018. Vol. 2018. Article no. 3048428. 17 p. doi 10.1155/2018/3048428

Поступила 16.01.2023
После доработки 28.01.2023
Принята к публикации 30.01.2023

Сулейманов Булат Ирекович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН г. Уфа
e-mail: bisul@mail.ru

REFERENCES

1. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics.* In: Mathematics and Its Applications, vol. 450, Dordrecht: Kluwer, 1998, 396 p. doi:10.1007/978-94-017-0745-9 . Original Russian text was published in Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. Primenenie teoretiko-gruppovykh metodov v gidrodinamike, Novosibirsk, Nauka Publ., 1994, 319 p.
2. Domrin A.V., Shumkin M.A., Suleimanov B.I. Meromorphy of solutions for a wide class of ordinary differential equations of Painlevé type. *J. Math. Phys.,* 2022, vol. 63, article no. 023501. doi:10.1063/5.0075416
3. Kudashev V.R. KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equation symmetries [e-resource]. 1994. Available on: https://arxiv.org/pdf/patt-sol/9404002.pdf .
4. Lightill M.J. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. In: G.K. Batchelor & R.M. Davies (eds.), Surveys in Mechanics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956, pp. 250–351.
5. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence, Amer. Math. Soc., 1992, Ser. Translations of Mathematical Monographs, vol. 102, 281 p. Original Russian text was published in Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p. ISBN: 5-02-013939-4.
6. Kudashev V.R., Suleimanov B.I. The effect of small dissipation on the onset of one-dimensional shock waves. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 441–451. doi:10.1016/S0021-8928(01)00050-8
7. Zakharov S.V., Il'in A.M. From weak discontinuity to gradient catastrophe. *Sb. Math.,* 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1417–1433. doi: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000599
8. Il'in A.M., Zakharov S.V. On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities. *Func. Diff. Eq.,* 2001, vol. 8, no. 3–4, pp. 257–271.

9. Zakharov S.V. Nucleation of a shock wave in a Cauchy problem for the Burgers equation. *Comput. Math. Math. Phys.,* 2004, vol. 44, no. 3, pp. 506–513.
10. Garifullin R.N., Suleimanov B.I. From weak discontinuities to nondissipative shock waves. *J. Exp. Theor. Phys.,* 2010, vol. 110, no. 1, pp. 133–146. doi:10.1134/S1063776110010164
11. Tresse Ar. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations (in French). *Acta Math.,* 1894, vol. 18, no. 1, pp. 1–88. doi:10.1007/BF02418270
12. Tresse Ar. *Détermination des invariants ponctuels de l'equation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$. Lepzig, S. Hirzel, 1896, 87 p.
13. Lie S. Classifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III. *Archiv for Matematik og Naturvidenskab*, 1883, B. VIII, N. 4, S. 371–458.
14. Dmitrieva V.V. Point-invariant classes of third-order ordinary differential equations. *Math. Notes*, 2001, vol. 70, no. 2, pp. 175–180.
15. Bocharov A.V., Sokolov V.V., Svinolupov S.I. *On some equivalence problems for differential equations.* Preprint Erwin Schrodinger Institute for Mathematical Physics, preprint no. 54, Vienna, 1993, 12 p.
16. Euler N., Wolf T., Leach P.G.L., Euler M. Linearizable third-order ordinary differential equations and generalized Sundman transformations: The Case $X''' = 0$. *Acta Appl. Math.,* 2003, vol. 76, no. 1, pp. 89–115. doi:10.1023/A:1022838932176
17. Suksern S., Naboonmee K. Linearization of Fifth-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations. *Int. J. Diff. Eq.,* 2018, vol. 2018, article no. 3048428. 17 p. doi:10.1155/2018/3048428

Received January 16, 2023
Revised January 28, 2023
Accepted January 30, 2023

Bulat Irekovich Suleimanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics of Ufa Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: bisul@mail.ru .

Cite this article as: B. I. Suleimanov. Zeros of solutions of third-order L–A pairs and linearizable ordinary differential equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 180–189 .