ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Л. И. Родина, А. В. Черникова

Рассматриваются модели однородных и структурированных (например, по возрасту, полу или другому признаку) популяций, заданные разностными уравнениями. Динамика структурированной популяции при отсутствии эксплуатации определяется системой уравнений $x(k+1) = F\big(x(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; здесь $F(x)$ — вектор-столбец с координатами $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — вещественными неотрицательными непрерывными функциями; $x(k) = \big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big)$, где $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ — количество ресурса i-го вида или возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$. Однородная популяция задана разностным уравнением $x(k+1) = f\big(x(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Предполагается, что популяция подвержена промысловому изъятию $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0,1]^n$ в фиксированные моменты времени $k = 0, 1, 2, \ldots$ и имеется возможность управлять этим процессом для достижения определенного результата сбора ресурса. Таким образом, рассматриваются модели эксплуатируемых популяций, заданные системами уравнений $x(k+1) = F\big((1-u(k))x(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Исследуется задача оптимального сбора возобновляемого ресурса на неограниченном временном промежутке при стационарном и общем режимах эксплуатации. Рассматриваются характеристики сбора ресурса, первая из которых — эффективность сбора, равная пределу при $k \to \infty$ отношения стоимости ресурса, полученной за k сборов, к сумме приложенных для этого управлений (усилий сбора). Другая — средняя временная выгода, заданная пределом при $k \to \infty$ среднего арифметического стоимости ресурса за k сборов. Получены наибольшие значения данных характеристик и описаны стратегии промысла, при которых достигаются эти значения. Показано, что если при эксплуатации популяции учитывать все возможные управления, то можно определить значение эффективности сбора больше, чем максимальное значение эффективности на множестве стационарных управлений. С другой стороны, набольшее значение средней временной выгоды, вычисленное на множестве всех управлений, совпадает с наибольшим значением на множестве стационарных управлений и не зависит от $x(0)$. Результаты работы проиллюстрированы на примерах эксплуатируемой популяции, заданной дискретным логистическим уравнением и структурированной популяции, состоящей из двух видов.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу, режимы эксплуатации популяции, оптимальная эксплуатация, эффективность сбора ресурса, средняя временная выгода.

L. I. Rodina, A. V. Chernikova. On infinite-horizon optimal exploitation of a renewable resource.

We consider models of homogeneous and structured (for example, by age, gender, or other attribute) populations given by difference equations. The dynamics of a structured population in the absence of exploitation is given by the system of equations $x(k+1) = F\big(x(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; here $F(x)$ is a column vector with coordinates $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, which are real nonnegative continuous functions, and $x(k) = \big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big)$, where $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$, is the amount of resource of the ith type or age class at time $k = 0, 1, 2, \ldots$. A homogeneous population is given by the difference equation $x(k+1) = f\big(x(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. It is assumed that the population is subject to harvesting $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0,1]^n$ at fixed times $k = 0, 1, 2, \ldots$, and this process can be controlled to achieve a certain result of resource harvesting. Thus, we consider the models of the exploited populations given by the systems of equations $x(k+1) = F\big((1-u(k))x(k)\big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. We study the infinite-horizon problem of optimal harvesting of a renewable resource for stationary and general exploitation modes. The characteristics of resource harvesting are considered, the first of which is the harvesting efficiency equal to the limit as $k \to \infty$ of the ratio of the cost of the resource gathered in k harvestings to the amount of applied control (harvesting efforts). Another characteristic is the mean time profit, which is the limit as $k \to \infty$ of the arithmetic mean of the cost of the resource over k harvestings. We find the highest values of these characteristics and describe the harvesting strategies under which these values are attained. It is shown that if all possible controls are taken into account in population exploitation, then a value of harvesting efficiency greater than the highest efficiency on the set of stationary controls can be attained. On the other hand, the largest value of the mean time profit calculated on the set of all controls coincides with the largest value on the set of stationary controls and does not depend on $x(0)$. The results are illustrated by the examples of an exploited population given by a discrete logistic equation and a structured population consisting of two species.

Keywords: model of a population subject to harvesting, population exploitation modes, optimal exploitation, resource harvesting efficiency, average time profit.

MSC: 39A23, 39A99, 49N90, 93C55

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-167-179

Введение

Проблема эффективного управления промысловым изъятием возобновляемых ресурсов привлекает внимание ученых на протяжении многих лет. Примерно с середины прошлого столетия многие научные работы посвящались теоретическому описанию и экономическому обоснованию решения этого вопроса (см. [1]). В частности, хорошо изучена и описана оптимальная стратегия сбора популяций рыб, заданных различными моделями (см. [2; 3]).

Важное значение с экономической точки зрения имеют исследования таких характеристик, как доход от добычи ресурса и усилие, прикладываемое для сбора (см. [4]). В [5] показано существование интенсивности эксплуатации для модели популяции, учитывающей внутривидовую конкуренцию, при этом стационарное состояние доставляет максимум выгоды от эксплуатации. Для случая, когда ресурс распределен на окружности, условия оптимальности описаны в [6].

Влияние промысла на развитие структурированных популяций, заданных системами разностных уравнений, исследовано в [7; 8] и других работах этих авторов. Показано, что для некоторых моделей структурированных по возрасту популяций оптимальным является изъятие фиксированной доли только одной из возрастных групп; при одновременной эксплуатации обоих возрастов максимум дохода не достигается. Основные результаты [7; 8] получены методами численного исследования и компьютерного моделирования. Подробный обзор работ по данной тематике приведен в [9].

В настоящей статье исследованы модели динамики однородных популяций и популяций, структурированных по возрасту, полу или видам, заданных автономными разностными уравнениями. Рассмотрены вопросы выбора оптимальной стратегии промыслового изъятия ресурса популяции для достижения наилучшего результата сбора. Данная работа является продолжением [10], в которой исследуется задача оптимального сбора возобновляемого ресурса на конечном и бесконечном промежутках времени. Отметим, что в [10] сначала находится наибольшее значение суммарной стоимости ресурса на конечном промежутке времени, а затем этот результат используется для получения максимального значения средней временной выгоды. Здесь предложен новый способ доказательства, с помощью которого удалось получить стратегию оптимального сбора ресурса не только для максимизации средней временной выгоды, но и для новой характеристики — эффективности сбора ресурса.

1. Определения характеристик сбора ресурса для моделей популяций, заданных разностными уравнениями

Сначала приведем описание исследуемых моделей популяций, которые могут быть как однородными, так и неоднородными (структурированными). Под *однородной* будем понимать популяцию, состоящую из одного вида (здесь количество видов $n = 1$). *Структурированной* назовем популяцию, состоящую из $n \geqslant 2$ отдельных видов $x_1, \ldots, x_n$, либо разделенную на n групп по возрасту или другому признаку. Пусть $x(k) = \big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big)$, где $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ — количество ресурса i-го вида или возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$; $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — вещественные неотрицательные непрерывные функции, заданные для всех $x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$; $F(x)$ — вектор-столбец с координатами $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Рассматриваем популяцию, динамика которой *при отсутствии эксплуатации* задана системой разностных уравнений

$$x(k+1) = F\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.1}$$

Также будем исследовать систему (1.1), в которой функции $f_i(x)$ заданы в некоторой области $I \subset \mathbb{R}^n_+$; здесь нужно дополнительно предполагать, что $F(I) \subseteq I$, тогда решение $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ системы (1.1) продолжаемо.

Далее рассмотрим модель *эксплуатируемой популяции.* Обозначим

$$U \doteq \{\overline{u} \colon \overline{u} = \bigl(u(0), u(1), \dots, u(k), \dots\bigr)\}, \quad \text{где} \quad u(k) = \bigl(u_1(k), \dots, u_n(k)\bigr) \in [0,1]^n,$$

и будем интерпретировать последовательность $\overline{u} \in U$ как управление, которое можно изменять для достижения определенного результата сбора ресурса. Пусть $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ — количество ресурса i-го вида в момент k до сбора, тогда модель эксплуатируемой популяции определяется следующей системой уравнений:

$$x(k+1) = F\bigl((1-u(k))x(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.2}$$

где $(1-u(k))x(k) \doteq \bigl((1-u_1(k))x_1(k), \dots, (1-u_n(k))x_n(k)\bigr)$. Считаем, что решение системы (1.2) продолжаемо для всех $\overline{u} \in U$ (условия продолжаемости приведены в [10]).

Неоднородность ресурса может сказываться на стоимости добываемой продукции, поэтому будем предполагать, что стоимость условной единицы i-го вида равна $C_i \geqslant 0$ (и все постоянные $C_1, \dots, C_n$ одновременно не равны нулю). Следовательно, стоимость всей продукции в момент времени k можно определить как $z(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i(k) u_i(k)$.

Первую характеристику сбора ресурса назовем *эффективностью сбора.* Положим ее равной нижнему пределу при $k \to \infty$ отношения стоимости ресурса, полученной за k сборов, к сумме приложенных для этого управлений (усилий сбора):

$$E_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} z(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(j)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(j)}, \tag{1.3}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i(0) > 0$. В случае, если в (1.3) существует предел при $k \to \infty$, эффективность сбора ресурса будем обозначать как $E\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$. Отметим, что в статье [11] определен подобный показатель эффективности сбора для распределенного ресурса.

Второй характеристикой будем считать *среднюю временную выгоду* от извлечения ресурса, введенную в работе [10]:

$$H_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) \doteq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} z(j) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j)\,.$$

Если при $k \to \infty$ существует предел выражения $\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j)$, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$.

2. Вычисление характеристик сбора ресурса при стационарном режиме эксплуатации

Под *стационарным режимом эксплуатации* популяции, заданной системой (1.2), будем понимать такой способ добычи ресурса, при котором $u(k) \equiv u = (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. При данном режиме система (1.2) принимает вид

$$x(k+1) = F\bigl((1-u)x(k)\bigr), \quad k = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{2.1}$$

Обозначим через $x(k, u, x_0) = \bigl(x_1(k, u, x_0), \dots, x_n(k, u, x_0)\bigr)$ решение системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Если система (2.1) имеет неподвижную точку (положение равновесия) $\xi(u) = \big(\xi_1(u),\ldots,\xi_n(u)\big) \in \mathbb{R}^n_+$, то $\xi(u) = F\big((1-u)\xi(u)\big)$. Пусть $\|x\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Напомним (см. [12, с. 44]), что неподвижная точка $\xi(u)$ системы (2.1) называется *асимптотически устойчивой*, если для любого начального условия $x(0)=x_0$ из некоторой окрестности точки $\xi(u)$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty}\big\|x(k,u,x_0)-\xi(u)\big\| = 0. \tag{2.2}$$

Множество начальных точек $x(0)$, для которых имеет место (2.2), называется *множеством притяжения точки* $\xi(u)$; обозначим его как $A\big(\xi(u)\big)$. Отметим, что если $\xi(u)$ не является асимптотически устойчивой, то ее множество притяжения может состоять из нескольких точек или является промежутком, содержащим данную точку. Примеры таких систем приведены в [13, с. 21, 25].

Утверждение 1. *Пусть при стационарном режиме эксплуатации* $u(k)\equiv u$, $k=0,1,\ldots$ *система* (2.1) *имеет неподвижную точку* $\xi(u)$. *Тогда для любой начальной точки* $x(0)\in A\big(\xi(u)\big)$ *выполнены равенства*:

$$E\big(\overline{u},x(0)\big) = \sum_{i=1}^n C_i\xi_i(u)u_i\Big(\sum_{i=1}^n u_i\Big)^{-1}, \tag{2.3}$$

$$H\big(\overline{u},x(0)\big) = \sum_{i=1}^n C_i\xi_i(u)u_i. \tag{2.4}$$

Отметим, что равенство (2.4) доказано в [10], (2.3) доказывается аналогично. □

Убедимся в верности утверждения для вычисления эффективности сбора ресурса и средней временной выгоды в случае, когда система (2.1) имеет цикл длины $\ell \geqslant 2$. Обозначим k-ю итерацию функции F через F^k, т. е. $F^1=F$, $F^k=F(F^{k-1})$, $k=2,3,\ldots$.

Напомним следующие определения (см. [14, с. 9]). Точка $\beta^0(u)$ называется *периодической точкой периода* $\ell\in\mathbb{N}$ для системы (2.1), если $F^\ell(\beta^0(u))=\beta^0(u)$ и $F^m(\beta^0(u))\neq\beta^0(u)$ при $m=1,\ldots,\ell-1$. Если $\ell\geqslant 2$, то каждая из точек $\beta^m(u)=F^m(\beta^0(u))$, $m=1,\ldots,\ell-1$ также является периодической точкой периода ℓ, т. е. точки $\beta^0(u),\ldots,\beta^{\ell-1}(u)$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B(u)=\big\{\beta^0(u),\ldots,\beta^{\ell-1}(u)\big\}$ *периода* ℓ. Цикл $B(u)$ системы (2.1) называется *притягивающим* (*устойчивым*), если существует окрестность V (область притяжения цикла) такая, что $F(V)\subset V$ и $\bigcap\limits_{k\geqslant 0} F^k(V) = B(u)$.

Утверждение 2. *Предположим, что система* (2.1) *при стационарном режиме эксплуатации* $u(k)\equiv u$, $k=0,1,\ldots$ *имеет цикл* $B(u)=\big\{\beta^0(u),\ldots,\beta^{\ell-1}(u)\big\}$ *длины* $\ell\geqslant 2$. *Тогда для любой начальной точки* $x(0)$ *из области притяжения* V *данного цикла выполнены равенства*

$$E\big(\overline{u},x(0)\big) = \frac{1}{\ell\sum\limits_{i=1}^n u_i}\sum_{i=1}^n C_i\big(\beta_i^0(u)+\ldots+\beta_i^{\ell-1}(u)\big)u_i, \tag{2.5}$$

$$H\big(\overline{u},x(0)\big) = \frac{1}{\ell}\sum_{i=1}^n C_i\big(\beta_i^0(u)+\ldots+\beta_i^{\ell-1}(u)\big)u_i. \tag{2.6}$$

Доказательство. Равенство (2.6) доказано в [10]. Найдем значение эффективности сбора ресурса при стационарной эксплуатации $u(k)\equiv u=(u_1,\ldots,u_n)$, $k=0,1,\ldots$:

$$E_*\big(\overline{u},x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^n C_ix_i(j)u_i(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^n u_i(j)} = \varliminf_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}\sum\limits_{i=1}^n C_ix_i(j)u_i}{k\sum\limits_{i=1}^n u_i} = \frac{H_*\big(\overline{u},x(0)\big)}{\sum\limits_{i=1}^n u_i}. \tag{2.7}$$

Поскольку предел $H\big(\overline{u},x(0)\big)=H_*\big(\overline{u},x(0)\big)$ существует и для него выполнено (2.6), то из (2.7) следует, что предел $E\big(\overline{u},x(0)\big)=E_*\big(\overline{u},x(0)\big)$ также существует и для любой начальной точки $x(0)\in V$ справедливо (2.5). □

3. Оптимальные режимы эксплуатации однородной популяции для достижения наибольшей эффективности сбора ресурса или средней временной выгоды

Рассмотрим сначала однородную популяцию, количество ресурса которой в момент времени k обозначим через $x(k)$, $k=0,1,2,\dots$. Пусть развитие популяции при отсутствии эксплуатации описывается автономным разностным уравнением

$$x(k+1)=f(x(k)),\quad k=0,1,2,\dots, \tag{3.1}$$

где $f(x)$ — вещественная неотрицательная непрерывная функция, заданная для всех $x\in\mathbb{R}_+\doteq[0,+\infty)$. Также будем рассматривать функции $f(x)$, заданные на отрезке $I=[0,a]$, причем $f(I)\subseteq I$, что обеспечивает продолжаемость решения уравнения (3.1). Предполагаем, что в каждый момент времени $k=0,1,2,\dots$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k)\in[0,1]$. Пусть теперь $x(k)$ — количество ресурса в момент k до сбора, тогда оставшееся после сбора количество ресурса равно $(1-u(k))x(k)$ и модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$x(k+1)=f((1-u(k))x(k)),\quad k=0,1,2,\dots. \tag{3.2}$$

Выпишем определения характеристик сбора ресурса для однородной популяции. Здесь без ограничения общности можно считать, что стоимость ресурса $C_1=1$, поэтому из (1.3) получаем, что *эффективность сбора ресурса* задается равенством

$$E_*\big(\overline{u},x(0)\big)\doteq\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}x(j)u(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}. \tag{3.3}$$

Средняя временная выгода определяется следующим образом:

$$H_*\big(\overline{u},x(0)\big)\doteq\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}x(j)u(j). \tag{3.4}$$

Если пределы (3.3) и (3.4) существуют, эффективность сбора ресурса и среднюю временную выгоду будем обозначать как $E\big(\overline{u},x(0)\big)$ и $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ соответственно.

В данном разделе получены условия, при которых существуют пределы эффективности и средней временной выгоды для однородной популяции. Также находим наибольшие значения данных характеристик при различных режимах эксплуатации.

Запишем следствие утверждений 1, 2 для однородной популяции.

Следствие 1. *Предположим, что уравнение* (3.2) *при стационарном режиме эксплуатации* $u(k)\equiv u$, $k=0,1,2,\dots$ *имеет неподвижную точку* $\xi(u)$. *Тогда для любой начальной точки* $x(0)\in A\big(\xi(u)\big)$ *выполнены равенства*

$$E\big(\overline{u},x(0)\big)=\xi(u),\quad H\big(\overline{u},x(0)\big)=\xi(u)u. \tag{3.5}$$

Если уравнение (3.2) *при стационарном режиме эксплуатации* $u(k)\equiv u$, $k=0,1,2,\dots$ *обладает циклом* $B(u)=\big\{\beta^0(u),\dots,\beta^{\ell-1}(u)\big\}$ *длины* $\ell\geqslant 2$, *то для любой начальной точки* $x(0)$ *из области притяжения данного цикла имеем*

$$E\big(\overline{u},x(0)\big)=\frac{1}{\ell}\big(\beta^0(u)+\ldots+\beta^{\ell-1}(u)\big),\quad H\big(\overline{u},x(0)\big)=\frac{u}{\ell}\big(\beta^0(u)+\ldots+\beta^{\ell-1}(u)\big).$$

Обозначим через $E\bigl(\overline{u}_j, x(0)\bigr)$ эффективность сбора ресурса, которая достигается при стационарном способе эксплуатации $u(k)\equiv u_j$, $k=0,1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,m$. Также рассмотрим функцию $d(x)\doteq f(x)-x$.

Следствие 2. *Предположим, что* $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)=h\leqslant\max\limits_{x\in\mathbb{R}_+}d(x)$ *достигается при различных стационарных режимах эксплуатации* $u(k)\equiv u_j$, $k=0,1,2,\ldots$, $j=1,\ldots,m$, $m\geqslant 2$ *и* $0<u_1<u_2<\ldots<u_m$. *Тогда*

$$E\bigl(\overline{u}_1, x(0)\bigr)>E\bigl(\overline{u}_2, x(0)\bigr)>\ldots>E\bigl(\overline{u}_m, x(0)\bigr). \tag{3.6}$$

Доказательство. Из (3.5) следует, что $H\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)=\xi(u_j)u_j=h$ при $u(k)\equiv u_j$, $k=0,1,2,\ldots$. Тогда $E\bigl(\overline{u}_j, x(0)\bigr)=\xi(u_j)=h/u_j$ для всех $j=1,\ldots,m$. Далее, если $u_1<u_2<\ldots<u_m$, то $\dfrac{h}{u_1}>\dfrac{h}{u_2}>\ldots>\dfrac{h}{u_m}$, что равносильно неравенству (3.6). □

Рассмотрим задачу нахождения максимальной эффективности сбора ресурса.

Теорема 1. *Предположим, что функция $f(x)$ достигает максимального значения в точке $x^*>0$, $x^*\leqslant f(x^*)$ и $x(0)\in A\bigl(f(x^*)\bigr)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *функция $E\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ достигает наибольшего значения $E\bigl(\overline{u}^*, x(0)\bigr)=f(x^*)$ на множестве стационарных управлений при $u(k)\equiv u^*=1-\dfrac{x^*}{f(x^*)}$, $k=0,1,2,\ldots$;*

2) *если $x(0)\leqslant f(x^*)$, то $E\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ достигает наибольшего значения $E\bigl(\overline{u}^*, x(0)\bigr)=f(x^*)$ на множестве всех управлений U при $u(k)\equiv u^*=1-\dfrac{x^*}{f(x^*)}$, $k=0,1,2,\ldots$;*

3) *если $x(0)>f(x^*)$, то $E\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ достигает наибольшего значения $E\bigl(\overline{u}^*, x(0)\bigr)=x(0)$ на множестве всех управлений U при $\overline{u}^*=(1,0,\ldots,0,\ldots)$.*

Доказательство. Сначала найдем наибольшее значение функции $E\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)$ на множестве стационарных управлений. Отметим, что при $u(k)\equiv u^*=1-\dfrac{x^*}{f(x^*)}$, $k=0,1,2,\ldots$, уравнение (3.2) принимает вид $x(k+1)=f\Bigl(\dfrac{x^*}{f(x^*)}x(k)\Bigr)$, $k=0,1,2,\ldots$ и имеет неподвижную точку $f(x^*)$. Данное значение является максимальным среди всех значений неподвижных точек $\xi(u)$ уравнения (3.2), так как $\xi(u)$ не может превосходить наибольшего значения функции $f(x)$. В силу следствия 1 $E\bigl(\overline{u}^*, x(0)\bigr)=f(x^*)$ для любой начальной точки $x(0)\in A\bigl(f(x^*)\bigr)$.

Пусть теперь $x(0)\leqslant f(x^*)$ и $\overline{u}\in U$. Поскольку $x(k)\leqslant f(x^*)$ для всех $k=1,2,\ldots$, то

$$E_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)\doteq\varliminf_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}x(j)u(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{f(x^*)\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}=f(x^*),$$

откуда справедливо второе утверждение теоремы.

Рассмотрим $x(0)>f(x^*)$. Отметим, что эффективность достигает значения $x(0)$ при управлении $\overline{u}^*=(1,0,\ldots,0,\ldots)$. Далее, из $x(k)\leqslant f(x^*)<x(0)$, $k=1,2,\ldots$ вытекает

$$E_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)\doteq\varliminf_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1}x(j)u(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\frac{x(0)\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}u(j)}=x(0).$$

Таким образом, неравенство $E_*\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr)\leqslant x(0)$ выполнено для любого $\overline{u}\in U$. □

З а м е ч а н и е 1. Если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения в нескольких точках $x_1^*,\ldots,x_r^*$, $r\geqslant 2$, то $E\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)=f(x_1^*)=\ldots=f(x_r^*)$ при различных стационарных режимах управления $u(k)\equiv u_i^*=1-\dfrac{x_i^*}{f(x_i^*)}$, $i=1,\ldots,r$, $k=0,1,2,\ldots$. Отметим, что при данных управлениях могут получиться разные значения средней временной выгоды.

Теорема 2. *Пусть функция* $d(x)\doteq f(x)-x$ *достигает наибольшего значения* $d(\widehat{x})>0$ *в точке* $\widehat{x}\in\mathbb{R}_+$. *Тогда для любого* $x(0)\in A\bigl(f(\widehat{x})\bigr)$ *функция* $H\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)$ *достигает максимального значения* $d(\widehat{x})$ *на множестве всех управлений* U *при* $u(k)\equiv\widehat{u}=1-\dfrac{\widehat{x}}{f(\widehat{x})}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы $d(\widehat{x})=f(\widehat{x})-\widehat{x}>0$, поэтому $f(\widehat{x})>\widehat{x}$, и, следовательно, $\widehat{u}=1-\dfrac{\widehat{x}}{f(\widehat{x})}\in(0,1]$. Пусть $\xi(u)$ — произвольная неподвижная точка уравнения (3.2) при $u(k)\equiv u\in(0,1]$, $k=0,1,2,\ldots$, тогда

$$\xi(u)=f\bigl((1-u)\xi(u)\bigr) \tag{3.7}$$

и для функции $z(u)\doteq u\xi(u)$ выполнено равенство

$$z(u)=uf\bigl((u^{-1}-1)z(u)\bigr). \tag{3.8}$$

Из (3.8) найдем производную $z'(u)$ как производную неявной функции:

$$z'(u)=\frac{f\bigl((u^{-1}-1)z\bigr)-\dfrac{z}{u}f'\bigl((u^{-1}-1)z\bigr)}{1-(1-u)f'\bigl((u^{-1}-1)z\bigr)}=\frac{z\bigl(1-f'((u^{-1}-1)z)\bigr)}{u\bigl(1-(1-u)f'((u^{-1}-1)z)\bigr)}.$$

Отсюда, $z'(u)=0$, если $z(u)=0$ или $f'\bigl((u^{-1}-1)z\bigr)=1$. В случае $z(u)=u\xi(u)=0$ получаем значение средней временной выгоды $H\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)=0$. Равенство $f'\bigl((u^{-1}-1)z\bigr)=1$ равносильно $f'((1-u)\xi(u))=1$; оно достигается в точках экстремума функции $d(x)\doteq f(x)-x$. Если $d(x)$ имеет точку максимума $\widehat{x}$, то положим $(1-u)\xi(u)=\widehat{x}$; из (3.7) следует, что $\xi(u)=f(\widehat{x})$, поэтому $\widehat{u}=1-\dfrac{\widehat{x}}{f(\widehat{x})}$. Далее, в силу следствия 1 при стационарном режиме эксплуатации $\overline{u}=(\widehat{u},\widehat{u},\ldots)$ для любой начальной точки $x(0)\in A\bigl(f(\widehat{x})\bigr)$ выполнено

$$H\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)=\xi(\widehat{u})\widehat{u}=f(\widehat{x})\Bigl(1-\frac{\widehat{x}}{f(\widehat{x})}\Bigr)=f(\widehat{x})-\widehat{x}=d(\widehat{x}).$$

Данное значение является наибольшим на множестве всех стационарных управлений, так как $\widehat{x}$ — точка максимума функции $d(x)$.

Покажем, что значение средней временной выгоды $d(\widehat{x})$ — наибольшее на множестве всех управлений U. Обозначим через $\widetilde{x}(k)=(1-u(k))x(k)$, $k=0,1,2,\ldots$, размер популяции после извлечения ресурса. Тогда $x(k)u(k)=x(k)-\widetilde{x}(k)=f\bigl(\widetilde{x}(k-1)\bigr)-\widetilde{x}(k)$, $k=1,2,\ldots$. Таким образом,

$$H_*\bigl(\overline{u},x(0)\bigr)\doteq\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}x(j)u(j)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\Bigl(x(0)u(0)+\sum_{j=1}^{k-1}f\bigl(\widetilde{x}(j-1)\bigr)-\widetilde{x}(j)\Bigr)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{x(0)u(0)+f\bigl(\widetilde{x}(0)\bigr)-\widetilde{x}(k-1)}{k}+\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-2}f\bigl(\widetilde{x}(j)\bigr)-\widetilde{x}(j)$$

$$\leqslant 0-\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\widetilde{x}(k-1)}{k}+\lim_{k\to\infty}\frac{k-2}{k}d(\widehat{x})=-\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\widetilde{x}(k-1)}{k}+d(\widehat{x}).$$

Из неравенства $\overline{\lim_{k\to\infty}} \dfrac{\widetilde{x}(k-1)}{k} \geqslant 0$ получаем, что выражение в последней строке не превосходит $d(\widehat{x})$, поэтому $H_*\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant d(\widehat{x})$ для любых $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}_+$. □

П р и м е р 1. Рассмотрим однородную популяцию, заданную дискретным логистическим уравнением

$$x(k+1) = 3.2(1-u)x(k)\big(1-(1-u)x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.9}$$

Найдем значение эффективности при стационарном режиме эксплуатации для любого $u \in (0,1]$ и наибольшее значение $E\big(\overline{u}, x(0)\big)$.

Пусть $\widetilde{x}(k) = (1-u)x(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — размер популяции после извлечения ресурса. Тогда из (3.9) получаем

$$\widetilde{x}(k+1) = 3.2(1-u)\widetilde{x}(k)\big(1-\widetilde{x}(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.10}$$

Пусть $\lambda = 3.2(1-u)$, тогда уравнение (3.10) имеет вид

$$\widetilde{x}(k+1) = \lambda\widetilde{x}(k)\big(1-\widetilde{x}(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots ;$$

свойства его решений хорошо изучены и описаны, в частности в монографии [14, с. 8–13]. Так, из [14] следует, что при $\lambda \in (0,1]$ уравнение (3.10) имеет только одну неподвижную точку $x = 0$ и она устойчивая; при $\lambda \in (1;3]$ неподвижная точка $x = 0$ теряет устойчивость и появляется еще одна устойчивая неподвижная точка $x^* = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$. Далее, при переходе λ через значение $\lambda_1 = 3$ неподвижная точка x^* становится неустойчивой и при $\lambda \in (3; 1+\sqrt{6}]$ от нее рождается устойчивый цикл периода два, который образуют точки $\beta_{1,2} = \dfrac{\lambda + 1 \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}$.

Из результатов предыдущего абзаца и следствия 1 получаем, что при $u \geqslant 11/16$ эффективность $E\big(\overline{u}, x(0)\big) = \xi(u) = 0$. При $u \in \big[1/16, 11/16\big)$ найдем $x^* = 1 - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{11-16u}{16(1-u)}$, откуда следует, что

$$E\big(\overline{u}, x(0)\big) = \xi(u) = \frac{x^*}{1-u} = \frac{11-16u}{16(1-u)^2}.$$

При $\lambda > 3$, т. е. при $u \in \big(0, 1/16\big)$ выводим

$$E\big(\overline{u}, x(0)\big) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2(1-u)} = \frac{21-16u}{32(1-u)^2}.$$

Несложно посчитать, что максимальное значение эффективности $E\big(\overline{u}^*, x(0)\big)$ равно 4/5 и достигается при $u^* = 3/8$. Отметим, что наибольшее значение $E\big(\overline{u}, x(0)\big)$ можно найти сразу по теореме 1 как наибольшее значение функции $f(x) = 3.2x(1-x)$.

П р и м е р 2. Рассмотрим однородную популяцию, которая при стационарном режиме эксплуатации $u(k) \equiv u \in (0,1]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, задана разностным уравнением (3.9). Найдем значение средней временной выгоды при данном режиме эксплуатации для любого $u \in (0,1]$ и наибольшее значение $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$.

Из результатов примера 1 вытекает, что при $u \geqslant 11/16$ значение средней временной выгоды равно нулю; при $u \in \big[1/16, 11/16\big)$ выполнено равенство

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \xi(u)u = \frac{11u - 16u^2}{16(1-u)^2}.$$

При $\lambda > 3$, т. е. при $u \in \big(0, 1/16\big)$ получаем

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \frac{(\beta_1 + \beta_2)u}{2(1-u)} = \frac{21u - 16u^2}{32(1-u)^2};$$

значит, наибольшее значение средней временной выгоды $H\big(\overline{u},x(0)\big)=121/320$ и достигается при $\widehat{u}=11/21$. Наибольшее значение $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ можно также найти по теореме 2 как наибольшее значение функции $d(x)=3.2x(1-x)-x$, которое достигается в точке $\widehat{x}=11/32$ и равно $121/320$.

В работе [15] показано, что не всегда экономически целесообразно добиваться максимального значения средней временной выгоды при извлечении ресурса. Поэтому представляет интерес задача нахождения наибольшей эффективности при фиксированном значении средней временной выгоды $H\big(\overline{u},x(0)\big)=h<d(x^*)$. В частности, пусть для уравнения (3.9) значение $H\big(\overline{u},x(0)\big)=0.375$. Несложно посчитать, что оно достигается при $\widehat{u}_1=0.5$ и $\widehat{u}_2\approx 0.5455$. При данных значениях $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ эффективности определяются как $E\big(\overline{u}_1,x(0)\big)=0.75$ и $E\big(\overline{u}_2,x(0)\big)=0.6875$ соответственно. Полагая $H\big(\overline{u},x(0)\big)=0.25$, находим, что данное значение средней временной выгоды достигается при $\widehat{u}_1\approx 0.3149$ и $\widehat{u}_2\approx 0.6154$. При этом эффективности сбора $E\big(\overline{u}_1,x(0)\big)\approx 0.7938$ и $E\big(\overline{u}_2,x(0)\big)\approx 0.3937$. Таким образом, при одинаковых значениях средней временной выгоды эффективность получается больше, если значение управления меньше.

Стоит отметить, что при наибольшем значении средней временной выгоды $H\big(\overline{u},x(0)\big)\approx 0.3781$ эффективность сбора достигает значения $E\big(\overline{u},x(0)\big)\approx 0.7219$, а при наибольшей эффективности, равной $E\big(\overline{u},x(0)\big)=0.8$, средняя временная выгода $H\big(\overline{u},x(0)\big)=0.3$.

4. Оптимизация характеристик сбора ресурса для структурированной популяции

Напомним, что через $\widetilde{x}(k)=(1-u)x(k)$, $k=0,1,2,\ldots$, обозначаем размер популяции после сбора ресурса. При стационарном режиме управления $u(k)\equiv u$, $k=0,1,2,\ldots$, система (2.1) имеет вид

$$\widetilde{x}(k+1)=(1-u)F\big(\widetilde{x}(k)\big),\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{4.1}$$

Пусть $\widetilde{\xi}(u)=\big(\widetilde{\xi}_1(u),\ldots,\widetilde{\xi}_n(u)\big)$ — неподвижная точка (4.1), тогда $\widetilde{\xi}(u)=(1-u)F\big(\widetilde{\xi}(u)\big)$ и

$$\widetilde{\xi}_i(u)=(1-u_i)f_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big),\quad i=1,\ldots,n. \tag{4.2}$$

Теорема 3. *Предположим, что функция*

$$E(x)\doteq\sum_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(x)-x_i\big)\Big(n-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{f_i(x)}\Big)^{-1}$$

достигает наибольшего значения $E(x^*)$ в точке $x^*\in\mathbb{R}^n_+$ и $x^*_i\leqslant f_i(x^*)\neq 0$ для любого $i=1,\ldots,n$. Тогда для любого $x(0)\in A\big(F(x^*)\big)$ функция $E\big(\overline{u},x(0)\big)$ достигает максимального значения $E(x^*)$ на множестве стационарных управлений при

$$u(k)\equiv u^*=\Big(1-\frac{x^*_1}{f_1(x^*)},\ldots,1-\frac{x^*_n}{f_n(x^*)}\Big),\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 1 нужно найти наибольшее значение функции

$$W(u)\doteq\sum_{i=1}^{n}C_i\xi_i(u)u_i\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\Big)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}C_if_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big)u_i\Big(\sum_{i=1}^{n}u_i\Big)^{-1},$$

где $\widetilde{\xi}(u)$ является неподвижной точкой уравнения (4.1). Тогда из (4.2) получаем

$$W(u)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}C_if_i(\widetilde{\xi}(u))-\sum\limits_{i=1}^{n}C_i(1-u_i)f_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big)}{n-\sum\limits_{i=1}^{n}(1-u_i)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(\widetilde{\xi}(u))-\widetilde{\xi}_i(u)\big)}{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\widetilde{\xi}_i(u)}{f_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big)}}=E\big(\widetilde{\xi}(u)\big).$$

Следовательно, наибольшее значение функции $W(u)$ совпадает с наибольшим значением $E\big(\widetilde{\xi}(u)\big)$ и достигается при $\widetilde{\xi}(u)=x^*$. Так как $\widetilde{\xi}(u)$ — неподвижная точка уравнения (4.1), то $x_i^*=(1-u_i^*)f_i(x^*)$, поэтому $u_i^*=1-\dfrac{x_i^*}{f_i(x^*)}$, $i=1,\ldots,n$. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Если учитывать не только стационарные управления, то можно получить значение эффективности сбора большее, чем $E(x^*)$. Например, если $\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix_i(0)>nE(x^*)$, то при управлениях $u(0)=(1,1,\ldots,1)$ и $u(k)=(0,0,\ldots,0)$, $k=1,2,\ldots$, эффективность

$$E\big(\overline{u},x(0)\big)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(0)>E(x^*).$$

Теорема 4. *Предположим, что функция*

$$D(x)\doteq\sum_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(x)-x_i\big)$$

достигает наибольшего значения $D(\widehat{x})$ в точке $\widehat{x}\in\mathbb{R}_+^n$ и $\widehat{x}_i\leqslant f_i(\widehat{x})\neq 0$ для любого $i=1,\ldots,n$. Тогда для любого $x(0)\in A\big(F(\widehat{x})\big)$ функция $H\big(\overline{u},x(0)\big)$ достигает максимального значения $D(\widehat{x})$ на множестве всех управлений U при

$$u(k)\equiv\widehat{u}=\Big(1-\frac{\widehat{x}_1}{f_1(\widehat{x})},\ldots,1-\frac{\widehat{x}_n}{f_n(\widehat{x})}\Big),\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 1 нужно найти наибольшее значение функции

$$z(u)\doteq\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(u)u_i=\sum_{i=1}^{n}C_if_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big)u_i,$$

где $\widetilde{\xi}(u)$ — неподвижная точка уравнения (4.1). Тогда из (4.2) следует

$$z(u)=\sum_{i=1}^{n}C_if_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big)-\sum_{i=1}^{n}C_i(1-u_i)f_i\big(\widetilde{\xi}(u)\big)=\sum_{i=1}^{n}C_i\big(f_i(\widetilde{\xi}(u))-\widetilde{\xi}_i(u)\big)=D\big(\widetilde{\xi}(u)\big).$$

Поэтому наибольшее значение функции $z(u)$ совпадает с наибольшим значением $D(x)$ и достигается при $\widetilde{\xi}(u)=\widehat{x}$. Далее, так как $\widetilde{\xi}(u)$ — неподвижная точка уравнения (4.1), то

$$\widehat{x}_i=(1-u_i)f_i(\widehat{x})\ \text{ и }\ \widehat{u}_i=1-\frac{\widehat{x}_i}{f_i(\widehat{x})},\quad i=1,\ldots,n.$$

Доказательство того, что значение средней временной выгоды $D(\widehat{x})$ является наибольшим на множестве всех управлений U, аналогично доказательству данного утверждения для однородной популяции в теореме 2. $\square$

П р и м е р 3. Рассмотрим модель взаимодействия двух видов, которая при отсутствии эксплуатации задана системой разностных уравнений

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)\big(a+bx_2(k)-cx_1(k)\big),\\ x_2(k+1)=x_2(k)\big(a+bx_1(k)-cx_2(k)\big),\end{cases}\quad k=0,1,2,\ldots,\tag{4.3}$$

где $a>2$, $c>b>0$. Пусть $C_1=C_2=1$. Найдем наибольшие значения исследуемых в работе характеристик сбора ресурса.

Для вычисления максимального значения средней временной выгоды составим функцию

$$D(x) = D(x_1, x_2) \doteq \sum_{i=1}^{2} C_i\big(f_i(x) - x_i\big) = (a-1)(x_1 + x_2) + 2bx_1x_2 - c(x_1^2 + x_2^2). \tag{4.4}$$

Стандартные вычисления показывают, что наибольшим значением $D(x)$ является

$$D(\widehat{x}) = D(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \frac{(a-1)^2}{2(c-b)}, \quad \text{где} \quad \widehat{x}_1 = \widehat{x}_2 = \frac{a-1}{2(c-b)}.$$

Согласно теореме 4 функция $H\big(\overline{u}, x(0)\big)$ достигает максимального значения $D(\widehat{x})$ на множестве всех управлений U при $u(k) \equiv \widehat{u} = \Big(\frac{a-1}{a+1}, \frac{a-1}{a+1}\Big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее, рассмотрим функцию

$$E(x) = D(x_1, x_2)\Big(2 - \frac{1}{a + bx_2 - cx_1} - \frac{1}{a + bx_1 - cx_2}\Big)^{-1},$$

где $D(x_1, x_2)$ задана (4.4). Максимум $E(x)$ равен $E(x^*) = \dfrac{a^2}{4(c-b)}$ и достигается при $x_1^* = x_2^* = \dfrac{a}{2(c-b)}$. В силу теоремы 3 эффективность сбора ресурса $E\big(\overline{u}, x(0)\big)$ принимает наибольшее значение $E(x^*)$ на множестве стационарных управлений при $u(k) \equiv u^* = \Big(\dfrac{a-2}{a}, \dfrac{a-2}{a}\Big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Отметим, что если учитывать не только стационарные управления (в частности, приведенные в замечании 2), то можно добиться большего значения эффективности, однако такой способ эксплуатации может привести к исчезновению популяции. Данный пример также показывает, что для популяции (4.3) при стационарном способе эксплуатации невозможно одновременно достичь наибольших значений и эффективности, и средней временной выгоды.

Заключение

В настоящей работе рассматриваются характеристики сбора возобновляемого ресурса, такие как эффективность сбора и средняя временная выгода; исследуемая популяция может быть однородной или структурированной, состоящей из нескольких классов. Получены равенства для вычисления данных характеристик при стационарном режиме эксплуатации в случае, когда система, определяющая динамику популяции, обладает неподвижной точкой или циклом. Находится наибольшее значение эффективности сбора ресурса при стационарном и общем режимах эксплуатации; показано, что данное значение, посчитанное при любых $\overline{u} \in U$, зависит от начального размера популяции $x(0)$. С другой стороны, максимальное значение средней временной выгоды, вычисленное на множестве всех управлений U, не зависит от $x(0)$. Результаты исследований проиллюстрированы на примерах вычисления характеристик сбора ресурса для однородной популяции, заданной дискретным логистическим уравнением и структурированной популяции, состоящей из двух видов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Scott Gordon H.** The economic theory of a common-property resource: The fishery // J. Polit. Econ. 1954. Vol. 62. P. 124–142. doi: 10.1016/s0092-8240(05)80048-5
2. **Brauer F., Sanchez D.A.** Constant rate population harvesting: equilibrium and stability // Theor. Popul. Biol. 1975. Vol. 8, no. 1. P. 12–30. doi: 10.1016/0040-5809(75)90036-2
3. **Freedman H.I., So J. W. H.** Persistence in discrete models of a population which may be subjected to harvesting // Natural Resource Modeling. 1987. Vol. 2, no. 1. P. 135–145. doi: 10.1111/j.1939-7445.1987.tb00029.x

4. **Brites N.M., Braumann C.A.** Fisheries management in random environments: Comparison of harvesting policies for the logistic model // Fisheries research. 2017. Vol. 195. P. 238–246. doi: 10.1016/j.fishres.2017.07.016
5. **Davydov A.A., Platov A.S.** Optimal stationary solution for a model of exploitation of a population under intraspecific competition // J. Math. Sci. 2014. Vol. 201, no. 6. P. 746–751. doi: 10.1007/s10958-014-2023-8
6. **Зеликин М.И., Локуциевский Л.В., Скопинцев С.В.** Об оптимальном сборе ресурса на окружности // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 521–532. doi: 10.4213/mzm11310
7. **Неверова Г.П., Абакумов А.И., Фрисман Е.Я.** Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Мат. биология и биоинформатика. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–13. doi: 10.17537/2016.11.1
8. **Ревуцкая О.Л., Фрисман Е.Я.** Влияние равновесного промысла на сценарии развития двухвозрастной популяции // Информатика и системы управления. 2017. Т. 53, № 3. С. 36–48. doi:10.22250/isu.2017.53.36-48
9. **Upmann T., Uecker H., Hammann L., Blasius B.** Optimal stock–enhancement of a spatially distributed renewable resource // J. Economic Dynamics and Control. 2021. Vol. 123. Article no. 104060. doi: 10.1016/j.jedc.2020.104060
10. **Егорова А.В., Родина Л.И.** Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2019. Т. 29, вып. 4. С. 501–517. doi: 10.20537/vm190403
11. **Беляков А.О., Давыдов А.А.** Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 38–46. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46
12. **Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.** Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
13. **Родина Л.И.** Разностные уравнения как модели биологических процессов. Владимир: Владимир. гос. ун-т, 2022. 82 с.
14. **Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В.** Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
15. **Волдеаб М.С., Родина Л.И.** О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вест. российских ун-тов. Математика. 2022. Т. 27, № 137. С. 16–26. doi: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26

Поступила 24.10.2022
После доработки 26.12.2022
Принята к публикации 16.01.2023

Родина Людмила Ивановна
д-р физ.-мат. наук
профессор
кафедра функционального анализа и его приложений
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
г. Владимир
профессор
кафедра математики
Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”
г. Москва
e-mail: LRodina67@mail.ru

Черникова Анастасия Владимировна
аспирант
кафедра функционального анализа и его приложений
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
г. Владимир
e-mail: nastik.e@bk.ru

REFERENCES

1. Scott Gordon H. The Economic Theory of a Common-Property Resource: The Fishery. *J. Polit. Econ.*, 1954, vol. 62, pp. 124–142. doi: 10.1016/s0092-8240(05)80048-5
2. Brauer F., Sanchez D.A. Constant rate population harvesting: equilibrium and stability. *Theor. Popul. Biol.*, 1975, vol. 8, no. 1, pp. 12–30. doi: 10.1016/0040-5809(75)90036-2
3. Freedman H.I., So J.W.-H. Persistence in discrete models of a population which may be subjected to harvesting // *Natural Resource Modeling,* 1987, vol. 2, no. 1, pp. 135–145. doi: 10.1111/j.1939-7445.1987.tb00029.x
4. Brites N.M., Braumann C.A. Fisheries management in random environments: Comparison of harvesting policies for the logistic model. *Fisheries Research,* 2017, vol. 195, pp. 238–246. doi: 10.1016/j.fishres.2017.07.016
5. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal stationary solution for a model of exploitation of a population under intraspecific competition. *J. Math. Sci.,* 2014, vol. 201, no 6, pp. 746–751. doi: 10.1007/s10958-014-2023-8
6. Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Skopincev S.V. On optimal harvesting of a resource on a circle. *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 3–4, pp. 521–532. doi: 10.1134/S0001434617090243
7. Neverova G.P., Abakumov A.I., Frisman E.Ya. Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study. *Mat. Biologija i Bioinformatika*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 1–13 (in Russian). doi: 10.17537/2016.11.1
8. Revutskaya O.L., Frisman E.Ya. Influence of stationary harvesting on development of a two-age population scenario. *Informatika i Sistemy Upravleniya*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 36–48 (in Russian). doi: 10.22250/isu.2017.53.36-48
9. Upmann T., Uecker H., Hammann L., Blasius B. Optimal stock–enhancement of a spatially distributed renewable resource. *J. Econ. Dynamics and Control,* 2021, vol. 123, article no. 104060. doi: 10.1016/j.jedc.2020.104060
10. Egorova A.V., Rodina L.I. On optimal harvesting of renewable resource from the structured population. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 501–517 (in Russian). doi: 10.20537/vm190403
11. Belyakov A.O., Davydov A.A., Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 14–21. doi: 10.1134/S0081543817090036
12. Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. *Stability of biological communities.* Moscow, Mir Publ., 1983, 319 p. ISBN 10: 0828523711. Original Russian text was published in Ustoichivost' biologicheskikh soobshchestv, Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p.
13. Rodina L.I. *Raznostnye uravneniya kak modeli biologicheskikh protsessov* [Difference equations as models of biological processes]. Vladimir, Vladimir. State Univ. Publ., 2022. 82 p.
14. Sharkovsky A.N., Kolyada S.F., Sivak A.G., Fedorenko V.V. *Dynamics of one-dimensional maps*, Dordrecht,, Springer, 1997, 262 p. doi: 10.1007/978-94-015-8897-3 . Original Russian text was published in Dinamika odnomernykh otobrazhenii, Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989, 216 p.
15. Woldeab M.S., Rodina L.I. About the methods of renewable resourse extraction from the structured population, *Vestnik Rossiiskikh Universitetov. Matematika*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 16–26 (in Russian). doi: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26

Received October 24, 2022
Revised December 26, 2022
Accepted January 16, 2023

Lyudmila Ivanovna Rodina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vladimir State University, Vladimir, 600000 Russia; Prof., Department of Mathematics, National University of Science and Technology MISiS, Moscow, 119049 Russia, e-mail: LRodina67@mail.ru .

Anastasia Vladimirovna Chernikova, doctoral student, Vladimir State University, Vladimir, 600000 Russia, e-mail: nastik.e@bk.ru .

Cite this article as: L. I. Rodina, A. V. Chernikova. On infinite-horizon optimal exploitation of a renewable resource. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 167–179 .