ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 1 2023

УДК 517.982.272+515.122.55

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ТЕСНОТЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ БЭРА ПЕРВОГО КЛАССА

А. В. Осипов

В работе исследуются различные виды тесноты пространства $B_1(X)$ вещественнозначных функций Бэра первого класса, определенных на топологическом пространстве X, наделенном топологией поточечной сходимости.

Ключевые слова: теснота, веерная теснота, сильная веерная теснота, T-теснота, множественная теснота, функциональное пространство.

A. V. Osipov. Different kinds of tightness on the space of Baire-one functions.

We study different kinds of tightness of the space $B_1(X)$ of Baire-one real-valued functions defined on a topological space X with the topology of pointwise convergence.

Keywords: tightness, fan tightness, strongly fan tightness, T-tightness, set-tightness, function space.

MSC: 54C30, 54C35, 54D65

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-160-166

Введение

Число Линделёфа — один из самых важных кардинальных инвариантов типа компактности. Никак на первый взгляд не связан с ним кардинальный инвариант — теснота. Число Линделёфа по сути — глобальный инвариант, а теснота — инвариант по существу точечный. Однако в [1] были приведены две теоремы: теорема Асанова и теорема Архангельского — Пыткеева. Эти теоремы показывают двойственную взаимосвязь числа Линделёфа и тесноты между пространством непрерывных вещественнозначных функций $C_p(X)$ в топологии поточечной сходимости и тихоновским пространством X.

В статье [2] были изучены различные виды тесноты на пространстве $C_\lambda(X)$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X с множественно-открытой (λ-открытой) топологией. Настоящая работа является естественным продолжением исследования различных видов тесноты на пространстве $B_1(X)$ вещественнозначных функций Бэра первого класса. Напомним, что $f \in B_1(X)$, если существует последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ непрерывных вещественнозначных функций такая, что $f = \lim f_n$, т. е. $f(x) = \lim f_n(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Изучение кардинальнозначных функций на пространствах функций Бэра $B_\alpha(X)$ $(1 \le \alpha \le \omega_1)$ проводилось А. В. Пестряковым ([3], см. также [4]), в частности, он исследовал тесноту пространства $B_1(X)$. В предлагаемой работе предметом исследования являются веерная теснота, сильная веерная теснота, T-теснота и множественная теснота пространства $B_1(X)$.

1. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — семейства подмножеств топологического пространства (X, τ) и κ — бесконечное кардинальное число. Напомним определения некоторых базисных селекционных принципов.

∘ X удовлетворяет селекционному принципу $S_1^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ($X \in S_1^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$), если для каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{A}$ мы можем выбрать $B_\alpha \in A_\alpha$ такое, что $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

∘ X удовлетворяет селекционному принципу $S_{fin}^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ($X \in S_{fin}^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$), если для каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{A}$ мы можем выбрать $B_\alpha \in [A_\alpha]^{<\omega}$ такое, что $\bigcup\{B_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

Если $\kappa = \omega$, то пишем $S_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $S_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Покрытие $\mathcal{U}$ пространства X называют *ω-покрытием*, если X не принадлежит $\mathcal{U}$ и каждое конечное подмножество пространства X содержится в элементе, принадлежащем $\mathcal{U}$. Покрытие $\mathcal{U}$ пространства X называют *γ-покрытием*, если X не принадлежит $\mathcal{U}$ и каждое конечное подмножество пространства X содержится во всех элементах, принадлежащих $\mathcal{U}$, кроме конечного числа.

В этой статье $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут следующие семейства покрытий пространства X:

$\mathcal{O}$: семейство всех открытых покрытий пространства X;

Ω: семейство всех открытых ω-покрытий пространства X;

Γ: семейство всех открытых γ-покрытий пространства X;

$\mathcal{Z}_\Omega$: семейство всех ω-покрытий Z_σ-множествами пространства X.

В частности, пространства, обладающие селекционными принципами $S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ и $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$, называют пространствами Менгера и Ротбергера соответственно.

Для топологического пространства (X,τ) и фиксированной точки $x \in X$ мы используем символ Ω_x для обозначения множества $\{A \subset X : x \in \overline{A} \setminus A\}$.

Напомним определения тесноты и различных видов тесноты для произвольного топологического пространства.

∘ *Теснотой* топологического пространства (X,τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ, такой что для любого $A \subseteq X$ и $x \in \overline{A}$ существует $B \subseteq A$ такое, что $| B | \leq \kappa$ и $x \in \overline{B}$. Эту функцию обозначают как $t(X)$.

∘ *Веерной теснотой* топологического пространства (X,τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ, такой что для любой точки $x \in X$ и каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ элементов семейства Ω_x существует трансфинитная последовательность $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ конечных множеств таких, что $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ для каждого $\alpha < \kappa$, и $x \in cl(\bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha)$, т. е. выполняется $S_{fin}^\kappa(\Omega_x,\Omega_x)$. Эту функцию обозначают как $vet(X)$.

∘ *Сильной веерной теснотой* топологического пространства (X,τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любой точки $x \in X$ выполняется $S_1^\kappa(\Omega_x,\Omega_x)$. Мы будем обозначать эту функцию как $vet_1(X)$.

∘ *T-теснотой* топологического пространства X называют наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств, где $cf(\kappa) > \tau$, то $\bigcup\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ замкнутое множество.

Это определение было введено Юхасом в работе [5]. Поскольку семейство $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ возрастающее и $cf(\kappa)$ — регулярный кардинал, мы можем говорить, что T-теснота $T(X)$ есть наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств, где κ регулярный кардинал больший чем τ, то $\bigcup\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — замкнутое подмножество в X.

∘ *Множественной-теснотой* (set-tightness) $t_s(X)$ пространства X называют наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $A \subset X$ и $x \in \overline{A} \setminus A$, то существует семейство $\{A_\alpha : \alpha < \tau\}$ подмножеств A таких, что $x \notin \overline{A_\alpha}$ для любого $\alpha < \tau$ и $x \in \overline{\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \tau\}}$.

Это понятие было впервые введено в работе [6] и называлось "квази-характер". Термин set-tightness был предложен Юхасом в работе [5].

Заметим, что выполняются следующие отношения между кардинальнозначными функциями.

— $t_s(X) \leq T(X) \leq t(X) \leq vet(X) \leq vet_1(X)$. (Соотношения $t_s(X) \leq T(X) \leq t(X)$ были показаны в [5]).

— Если X компакт, то $t_s(X) = t(X)$ [6].

Напомним, что нуль-множеством называют подмножество A пространства X, если $A = f^{-1}(0)$ для некоторой $f \in C(X)$. Подмножество A пространства X называют *ко-нуль-* (или функционально открытым) множеством, если $X \setminus A$ — нуль-множество. Подмножество B пространства X называют *Z_σ-множеством*, если B представимо в виде счетного объединения нуль-множеств. Дополнение до Z_σ-множества называют *Coz_δ-множеством*. Ясно, что любое Coz_δ-множество есть пересечение счетного числа ко-нуль-множеств. Выполняется следующая характеристика функций Бэра первого класса: $f \in B_1(X)$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(U)$ является Z_σ-множеством пространства X [7, Exercise 3.A.1].

В этой работе мы рассматриваем пространства функций, определенных на бесконечном *тихоновском* пространстве X. Это формальное ограничение (как для пространства непрерывных функций, так и для бэровских функций), поскольку для любого топологического пространства X мы можем применить функтор Тихонова (тихоновский функтор), получив тихоновское пространство X_τ с тем же запасом непрерывных и, следовательно, бэровских функций. Отметим, что, например, для множества борелевских функций это не так.

Так как $B_1(X)$ — однородное топологическое пространство, то основные локальные свойства мы можем рассматривать для простоты в точке $\mathbf{0}$ — это функция, тождественно равная 0 на всем пространстве X, и символ Ω_0 означает множество $\{A \subset B_1(X) \colon \mathbf{0} \in \overline{A} \setminus A\}$.

2. Веерная и сильная веерная теснота

Числом Линделёфа $l(X)$ пространства X называется наименьший бесконечный кардинал τ, для которого каждое открытое покрытие пространства X содержит подпокрытие мощности τ.

А. В. Пестряков охарактеризовал тесноту $t(B_1(X))$ пространства $B_1(X)$ через супремум числа Линделёфа конечных степеней пространства $X_{\aleph_0}$. Напомним, что пространство $X_{\aleph_0} = (X, \tau_{\aleph_0})$ — это $\aleph_0$-модификация пространства (X, τ), т. е. топология $\tau_{\aleph_0}$ на X порождена всеми нуль-множествами пространства (X, τ).

Теорема 2.1 (Пестряков). *Для любого топологического пространства X выполняется $t(B_1(X)) = \sup\{l(X^n_{\aleph_0}) : n \in \mathbb{N}\}$.*

Следствие 2.1. *Пространство $B_1(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда $X_{\aleph_0}$ есть линделёфовое пространство.*

Следствие 2.2. *Пространство $B_1(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда $X_{\aleph_0}$ обладает свойством $S_1(\Omega, \Gamma)$.*

В основном результате этого раздела мы используем следующую теорему.

Теорема 2.2 [8, Proposition 3]. *Если A — Coz_δ-подмножество пространства X, то существует функция Бэра $f : X \to [0, 1]$ первого класса такая, что $A = f^{-1}(0)$.*

Если A и B — дизъюнктные Coz_δ-подмножества пространства X, то существует функция Бэра $f : X \to [0, 1]$ первого класса такая, что $A = f^{-1}(0)$ и $B = f^{-1}(1)$.

Теорема 2.3. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $vet_1(B_1(X)) = \kappa$;

(2) $B_1(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$;

(3) $X \in S_1^\kappa(\mathcal{Z}_\Omega, \mathcal{Z}_\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что пп. (1) и (2) эквивалентны по определению.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ будет трансфинитная последовательность $\mathcal{Z}_\sigma$ ω-покрытий. Для каждой пары $K \in [X]^{<\omega}$ и Z_σ-множества $U \supseteq K$ пространства X пусть $f_{K,U}$ будет функцией Бэра первого класса из X в $[0,1]$ такой, что $f_{K,U}(K) \subseteq \{0\}$ и $f_{K,U}(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Докажем существование этой функции. Поскольку $U = \bigcup Z_i$, где Z_i — нуль-множество для каждого $i \in \mathbb{N}$, существует i' такое, что $K \subseteq Z_{i'}$. Получаем, что $Z_{i'}$ и $X \setminus U$ — два дизъюнктных Coz_δ-множества. По теореме 2.2 существует функция Бэра первого класса $f : X \to [0,1]$ такая, что $f(Z_{i'}) \subseteq \{0\}$ и $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Положим $f_{K,U} := f$.

Пусть для каждого $\alpha < \kappa$ $A_\alpha = \{f_{K,U} \colon K \in [X]^{<\omega}, K \subseteq U \in \mathcal{U}_\alpha\}$. Тогда для каждого $K \in [X]^{<\omega}$ существует $f_{K,U} \in A_\alpha$. Заметим, что $\mathbf{0} \in \overline{A_\alpha}$ для каждого $\alpha < \kappa$. Так как $B_1(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$, то существует трансфинитная последовательность $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$ такая, что для каждого α, $K_\alpha \in [X]^{<\omega}$, $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ и $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$.

Мы докажем, что $\{U_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \in \mathcal{Z}_\Omega$. Пусть $F \in [X]^{<\omega}$, точка $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$, отсюда следует, что существует α такое, что $[F, (-1,1)]$ содержит функцию f_{K_α,U_α}. Тогда $F \subseteq U_\alpha$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — трансфинитная последовательность подмножеств пространства $B_1(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, что $\mathbf{0} \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}$.

Для биекции $i : \omega \times \kappa \mapsto \kappa$ положим $A_{n,\alpha} := A_{i(n,\alpha)}$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \kappa$ и каждого $K \in [X]^{<\omega}$ окрестность $[K, (-1/n, 1/n)]$ точки $\mathbf{0}$ пересекает $A_{n,\alpha}$, а значит, существует функция $f_{K,n,\alpha} \in A_{n,\alpha}$ такая, что $|f_{K,n,\alpha}(x)| < 1/n$ для каждого $x \in K$.

Поскольку $f_{K,n,\alpha}$ — функция Бэра первого класса, существует Z_σ-множество $U_{K,n,\alpha}$ такое, что $f_{K,n,\alpha}(U_{K,n,\alpha}) \subseteq (-1/n, 1/n)$. Пусть $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{U_{K,n,\alpha} \colon K \in [X]^{<\omega}\}$.

Для любого $K \in [X]^{<\omega}$ множество $K \neq X$; поэтому можно полагать, что все множества вида $U_{K,n,\alpha}$ не совпадают с X.

Так для каждого $\alpha < \kappa$ и $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n,\alpha} \in \mathcal{Z}_\Omega$. У каждой трансфинитной последовательности $\{\mathcal{U}_{n,\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$ при условии, что $X \in S_1^\kappa(\mathcal{Z}_\Omega, \mathcal{Z}_\Omega)$, существует последовательность $\{U_{K_{n,\alpha}} \colon \alpha < \kappa\}$, где каждое $K_{n,\alpha} \in [X]^{<\omega}$ такое, что $\{U_{K_{n,\alpha}} \colon \alpha < \kappa\} \in \mathcal{Z}_\Omega$.

Определим $B = \{f_{K,n,\alpha} \colon n \in \mathbb{N}, U_{K,n,\alpha} \in \{U_{K_{n,\alpha}} \colon \alpha < \kappa\}\}$. Заметим, что $|B| \leq \kappa$, и $\mathbf{0} \in \overline{B}$. Отсюда следует, что $B_1(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$.

Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Для топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $B_1(X)$ *имеет счетную сильную веерную тесноту;*

(2) $X \in S_1(\mathcal{Z}_\Omega, \mathcal{Z}_\Omega)$.

Аналогично предыдущей теореме можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.4. *Для топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $vet(B_1(X)) = \kappa$;

(2) $B_1(X) \in S_{fin}^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$;

(3) $X \in S_{fin}^\kappa(\mathcal{Z}_\Omega, \mathcal{Z}_\Omega)$.

Следствие 2.4. *Для топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $B_1(X)$ *имеет счетную веерную тесноту*;

(2) $X \in S_{fin}(\mathcal{Z}_\Omega, \mathcal{Z}_\Omega)$.

3. T-теснота

Для характеризации T-тесноты пространства $B_1(X)$ мы определим свойство $T_B(\tau)$, которое будет естественным обобщением $T(X)$.

Пространство X обладает свойством $T_B(\tau)$ ($X \in T_B(\tau)$), если для каждого регулярного кардинала κ, большего чем τ, и каждой возрастающей последовательности $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ семейств Z_σ подмножеств пространства X такой, что $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{Z}_\Omega$ существует $\beta < \kappa$, при котором $\mathcal{U}_\beta \in \mathcal{Z}_\Omega$.

Теорема 3.5. *Для топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $T(B_1(X)) \leq \tau$;

(2) $X \in T_B(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $T(B_1(X)) \leq \tau$. Тогда если $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств пространства $B_1(X)$ и κ — регулярный кардинал, больший чем τ, то $\bigcup\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — замкнутое подмножество в $B_1(X)$. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — возрастающая последовательность семейств Z_σ подмножеств пространства X такая, что $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{Z}_\Omega$. Обозначим $\mathcal{U}_{\alpha,K} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_\alpha : K \subset \mathcal{U}\}$ для каждого $\alpha < \kappa$ и $K \in [X]^{<\omega}$. Для каждого $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}$ пусть $f_{K,\mathcal{U}}$ — функция Бэра первого класса из X в $[0,1]$ такая, что $f_{K,\mathcal{U}}(K) = \{0\}$ и $f_{K,\mathcal{U}}(X \setminus \mathcal{U}) = \{1\}$. Рассмотрим множество $A_\alpha = \{f_{K,\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}\}$, $\alpha < \kappa$.

По условию (1) мы получаем, что множество $A = \bigcup_{\alpha<\kappa}\overline{A_\alpha}$ — замкнутое подмножество пространства $B_1(X)$.

Пусть $\langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle$ — стандартная базисная окрестность точки $\mathbf{0}$, т. е. $\langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle := \{f \in B_1(X) : |f(x)| < \varepsilon$ для каждого $x \in K\}$. Тогда существуют $\alpha < \kappa$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_\alpha$, где $K \subset \mathcal{U}$.

В этом случае $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}$ и существует $f \in A_\alpha \bigcap \langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle$. Следовательно, окрестность точки $\mathbf{0}$ пересекает некоторое A_α, $\alpha < \kappa$, т. е. $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$. Отсюда следует, что существует $\beta < \kappa$ и $\mathbf{0} \in \overline{A_\beta}$.

Мы докажем, что семейство $\mathcal{U}_\beta \in \mathcal{Z}_\Omega$.

Пусть $F \in [X]^{<\omega}$. Тогда окрестность $\langle \mathbf{0}, F, 1\rangle$ точки $\mathbf{0}$ пересекает A_β; пусть выполняется $f_{F,\mathcal{U}} \in A_\beta \bigcap \langle \mathbf{0}, F, 1\rangle$. Значит, $f_{F,\mathcal{U}}(X \setminus \mathcal{U}) = 1$ и, таким образом, $F \subset \mathcal{U} \in \mathcal{U}_\beta$. Следовательно, $\mathcal{U}_\beta \in \mathcal{Z}_\Omega$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что для каждого регулярного кардинала κ, большего чем τ, и каждой возрастающей последовательности $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ семейств Z_σ подмножеств пространства X такой, что $\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{Z}_\Omega$ существует $\beta < \kappa$, при котором $\mathcal{U}_\beta \in \mathcal{Z}_\Omega$. Пусть κ — регулярный кардинал, больший чем τ, и $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых подмножеств пространства $B_1(X)$. Предположим, что $g \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$. Так как $B_1(X)$ однородное пространство, мы можем предпологать, что $g = \mathbf{0}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \kappa$: $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{f^{-1}(W_n) : f \in A_\alpha\}$, где $W_n = (-1/n, 1/n)$, и $\mathcal{U}_n = \bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{U}_{n,\alpha}$; $\mathcal{U}_n \in \mathcal{Z}_\Omega$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть $F \in [X]^{<\omega}$, и рассмотрим окрестность $[F, W_n]$ точки $\mathbf{0}$. В силу того что $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$, существует $\alpha < \kappa$ и $f \in A_\alpha \bigcap [F, W_n]$. Тогда $F \subset f^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_{n,\alpha}$.

Значит, $\mathcal{U}_n \in \mathcal{Z}_\Omega$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти $\alpha_n < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_{n,\alpha_n} \in \mathcal{Z}_\Omega$. Пусть $\gamma = \sup \alpha_n$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n,\gamma} \in \mathcal{Z}_\Omega$. Мы докажем, что $\mathbf{0} \in A_\gamma$. Пусть $[F, W]$ — окрестность $\mathbf{0}$ и выберем $n \in \mathbb{N}$ при $W_n \subset W$. Так как $\mathcal{U}_{n,\gamma} \in \mathcal{Z}_\Omega$, существует $f \in A_\gamma$ такое, что $F \subset f^{-1}(W_n)$. В этом случае $f \in A_\gamma \bigcap [F, W]$. Отсюда $\mathbf{0} \in \overline{A_\gamma} = A_\gamma$. Мы получили, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ — замкнутое подмножество в пространстве $B_1(X)$.

Теорема доказана.

4. Множественная теснота

Для характеризации множественной тесноты пространства $B_1(X)$ мы определим свойство $t_s^B(\tau)$, которое будет естественным обобщением свойства $t_s(\tau)$ в C_p-теории [9].

Пусть $\mathcal{U}$ будет семейством Z_σ множеств пространства X и $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) = \{Z(U) : U \in \mathcal{U}\}$ — семейство Coz_δ-множеств пространства X, индексируемое $\mathcal{U}$. Пару $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ будем называть *t_s-парой*, если (1) $Z(U) \subset U \neq X$ для каждого $U \in \mathcal{U}$, (2) $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) \in \mathcal{Z}_\Omega$.

Пространство X обладает свойством $t_s(\tau)$ ($X \in t_s(\tau)$), если для каждой t_s-пары $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ существует $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ ($\alpha < \tau$) такое, что любое $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \notin \mathcal{Z}_\Omega$, при этом $\bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{Z}_\Omega$.

Теорема 4.1. *Для топологического пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $t_s(B_1(X)) \leq \tau$;

(2) $X \in t_s(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $t_s(B_1(X)) \leq \tau$. Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ будет t_s-парой в пространстве X. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ выберем $f \in B_1(X)$ такую, что $f_U \restriction Z(U) \equiv 0$ и $f_U \restriction (X \setminus U) \equiv 1$. Пусть $A = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$. Очевидно, что $\mathbf{0} \in \overline{A} \setminus A$. В силу того что $t_s(B_1(X)) \leq \tau$, существует $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ ($\alpha < \tau$) такое, что

(1) $\mathbf{0} \notin \overline{\{f_U : U \in \mathcal{U}_\alpha\}}$ для любого $\alpha < \tau$,

(2) $\mathbf{0} \in \overline{\{f_U : U \in \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha\}}$.

Если для некоторого $\alpha < \tau$ $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \in \mathcal{Z}_\Omega$, то $\mathbf{0} \in \overline{\{f_U : U \in \mathcal{U}_\alpha\}}$. Получаем, что по условию (1) $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \notin \mathcal{Z}_\Omega$ для любого $\alpha < \tau$. Более того, мы можем заметить, что $\bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{Z}_\Omega$. Действительно, пусть $F \in [X]^{<\omega}$. По условию (2) для окрестности $[F, (-1, 1)]$ точки $\mathbf{0}$ существует $U \in \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha$ такое, что $f_U \in F, (-1, 1)]$. Получаем, что $F \subset U$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $X \in t_s(\tau)$. Пусть $A \subset B_1(X)$ и $g \in \overline{A} \setminus A$. Так как пространство $B_1(X)$ однородно, мы можем предполагать, что $g = \mathbf{0}$. Для каждого $f \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть $U(n, f) = f^{-1}(W_n)$ и $Z(n, f) = f^{-1}(I_{n+1})$, где $W_n = \Big(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\Big)$ и $I_n = \Big[-\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\Big]$. Полагаем $\mathcal{U}_n = \{U(n, f) : f \in A\}$ и $\mathcal{Z}_n = \{Z(n, f) : f \in A\}$.

Если множество $\{n \in \mathbb{N} : X \in \mathcal{U}_n\}$ бесконечно, то мы сможем найти последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, которая равномерно сходится к $\mathbf{0}$. Так, без уменьшения общности мы можем считать, что $X \notin \mathcal{U}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{Z}_\Omega$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $F \in [X]^{<\omega}$ и рассмотрим окрестность $[F, W_{n+1}]$ точки $\mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{0} \in \overline{A}$, существует $f \in [F, W_{n+1}] \bigcap A$. Тогда $f(F) \subset W_{n+1} \subset I_{n+1}$; получаем, что $F \subset f^{-1}(I_{n+1}) = Z(n, f)$. Таким образом, $(\mathcal{U}_n, \mathcal{Z}(\mathcal{U}_n))$ t_s-пара для каждого $n \in \mathbb{N}$. По условию $t_s(\tau)$ мы имеем семейство $\{A_{n,\alpha} : n \in \mathbb{N}, \alpha < \tau\}$ подмножеств множества A такое, что (а) $\{Z(n, f) : f \in A_{n,\alpha}\} \notin \mathcal{Z}_\Omega$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \tau$, (б) $\{U(n, f) : f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}\} \in \mathcal{Z}_\Omega$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Из условия (а) следует, что $\mathbf{0} \notin \overline{A_{n,\alpha}}$. Действительно, пусть $F \in [X]^{<\omega}$ такое, что $F \not\subseteq Z(n, f)$ для любого $f \in A_{n,\alpha}$, и рассмотрим окрестность $[F, W_{n+1}]$ точки $\mathbf{0}$. Тогда очевидно, что $[F, W_{n+1}] \bigcap A_{n,\alpha} = \varnothing$. По условию (б) $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup\{A_{n,\alpha} : n \in \mathbb{N}, \alpha < \tau\}}$. Действительно, пусть $F \in [X]^{<\omega}$ и W — окрестность 0 в $\mathbb{R}$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $W_n \subset W$. Поскольку$\{U(n, f) : f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}\} \in \mathcal{Z}_\Omega$, существует $f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}$ такое, что $F \subset U(n, f)$. Отсюда следует, что $f \in [F, W] \bigcap (\bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha})$. Таким образом, $t_s(B_1(X)) \leq \tau$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Архангельский А.В.** Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
2. **Осипов А.В.** Различные виды тесноты функционального пространства // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 192–199. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-192-199

3. **Пестряков А.В.** О пространствах бэровских функций. Исследования по теории выпуклых множеств и графов / Акад. Наук СССР, Уральский научный центр. Свердловск, 1987. Vol. 82. С. 53–59.
4. **Osipov A.V.** On generalization of theorems of Pestryakov // Topol. Appl. 2020. Vol. 283. Article no. 107399. doi: 10.1016/j.topol.2020.107399
5. **Juhász I.** Variations on tightness // Studia Sci. Math. Hangar. 1989. No. 24. P. 179–186.
6. **Arhangel'skii A.V., Isler R., Tironi G.** On pseudo radial spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. 1986. No. 27. P. 137–154. URL: http://dml.cz/dmlcz/106435
7. **Lukeš J., Malý J., Zajiček L.** Fine topology methods in real analysis and potential theory. Berlin: Springer, 1986 (Lecture Notes in Mathematics; vol. 1189).
8. **Kalenda O.F.K., Spurný J.**, Extending Baire-one functions on topological spaces // Topol. Appl. 2005. Vol. 149, no. 1-3. P. 195–216. doi: 10.1016/j.topol.2004.09.007
9. **Sakai M.** Variations on tightness in function spaces // Topol. Appl. 2000. Vol. 101, no. 3. P. 273–280. doi: 10.1016/S0166-8641(98)00127-8

Поступила 17.10.2022
После доработки 2.02.2023
Принята к публикации 6.02.2023

Осипов Александр Владимирович
д-р. физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет;
Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург
e-mail: OAB@list.ru

REFERENCES

1. Arkhangel'skii A.V. *Topological function spaces.* Math. its Appl., vol. 78, Dordrecht: Kluwer, 1992, 205 p. ISBN: 0-7923-1531-6 . Original Russian text published in Arkhangel'skii A.V. *Topologicheskie prostranstva funktsii*, Moscow: MGU Publ., 1989, 222 p.
2. Osipov A.V. Different kinds of tightness of a function space. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. Uro RAN*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 192–199. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-192-199
3. Pestryakov A.V. On spaces of Baire functions, investigations in the theory of convex sets and graphs. In: *Issledovanij po teorii vipuklih mnogestv i grafov*, Sverdlovsk: Akad. Nauk SSSR, Ural. Nauchn. Centr Publ., 1987, vol. 89, pp. 53–59 (in Russian).
4. Osipov A.V. On generalization of theorems of Pestryakov *Topol. Appl.*, 2020, vol. 283, article no. 107399. doi: 10.1016/j.topol.2020.107399
5. Juhász I. Variations on tightness. *Studia Sci. Math. Hangar.*, 1989, no. 24, pp. 179–186.
6. Arhangel'skii A.V., Isler R., Tironi G. On pseudo-radial spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1986, vol. 27, no. 1, pp. 137–154. Available on: http://dml.cz/dmlcz/106435
7. Lukeš J., Malý J., Zajiček L. *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1189, Berlin, Springer, 1986, 482 p.
8. Kalenda O.F.K. , Spurný J., Extending Baire-one functions on topological spaces. *Topol. Appl.*, 2005, vol. 149, no. 1-3, pp. 195–216. doi: 10.1016/j.topol.2004.09.007
9. Sakai M. Variations on tightness in function spaces. *Topol. Appl.*, 2000, vol. 101, no. 3, pp. 273–280. doi: 10.1016/S0166-8641(98)00127-8

Received October 17, 2022
Revised February 02, 2023
Accepted February 06, 2023

Alexander Vladimirovich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Ural State University of Economicis, Yekaterinburg, 620144 Russia, e-mail: OAB@list.ru .

Cite this article as: A. V. Osipov. Different kinds of tightness on the space of Baire-one functions.. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 160–166 .